Краевые задачи для φ-Лапласиана с максимальным решением

Л.А.Лепин

Аннотация. Для φ-Лапласиана ищутся краевые задачи, которые обладают максимальным решением.

УДК 517.927

Рассмотрим краевую задачу

$$(\varphi(t,x,x'))' = f(t,x,x'), \quad t \in I = [a,b], \tag{1}$$

$$\begin{aligned} H_1(x(a),x(b),x'(a),x'(b)) = H_1x = h_1, \\ H_2(x(a),x(b),x'(a),x'(b)) = H_2x = h_2, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\alpha \le x \le \beta, \quad U, \tag{3}$$

где функция $\varphi \in C(I \times R^2, R)$ строго возрастает по последнему аргументу, функция $f : I \times R^2 \to R$ удовлетворяет условиям Каратеодори: $f(\cdot,x,y)$ измерима на I при фиксированных $x,y \in R$, $f(t,\cdot,\cdot)$ непрерывна на R^2 при $t \in I$ и для любого компактного множества $P \subset R^2$ найдется функция $g \in L(I,R)$ такая, что для всех $(t,x,y) \in I \times P$ справедливо неравенство $\mid f(t,x,y) \mid \le g(t)$, $H_1, H_2 \in C(R^4,R)$, $h_1,h_2 \in R$, $\alpha \in \mathrm{Lip}\,(\mathrm{I},\mathrm{R})$ – нижняя функция: для любых $t_1 \in (a,b)$ и $t_2 \in (t_1,b)$ из существования производных $\alpha'(t_1)$ и $\alpha'(t_2)$ следует неравенство

$$\varphi(t_2,\alpha(t_2),\alpha'(t_2)) - \varphi(t_1,\alpha(t_1),\alpha'(t_1)) \ge \int_{t_1}^{t_2} f(t,\alpha(t),\alpha'(t))dt,$$

$\beta \in \mathrm{Lip}\,(\mathrm{I},\mathrm{R})$ – верхняя функция: для любых $t_1 \in (a,b)$ и $t_2 \in (t_1,b)$ из существования производных $\beta'(t_1)$ и $\beta'(t_2)$ следует неравенство

$$\varphi(t_2,\beta(t_2),\beta'(t_2)) - \varphi(t_1,\beta(t_1),\beta'(t_1)) \le \int_{t_1}^{t_2} f(t,\beta(t),\beta'(t))dt,$$

$\alpha \le \beta$, U – подмножество множества условий:
1. $\alpha(a) = \beta(a)$, 2. $\alpha'(a) < \beta'(a)$, 3. $\alpha'(a) = \beta'(a)$, 4. $\alpha'(a) > \beta'(a)$,
5. $\alpha(b) = \beta(b)$, 6. $\alpha'(b) < \beta'(b)$, 7. $\alpha'(b) = \beta'(b)$, 8. $\alpha'(b) > \beta'(b)$,

9. $(\forall x, y \in S)((x \leq y \wedge x'(a) \leq y'(a) \Rightarrow x'(b) \leq y'(b)) \wedge (x \leq y \wedge x'(b) \geq y'(b) \Rightarrow x'(a) \geq y'(a)))$,

A. $\alpha \in S$, B. $\beta \in S$, C. $H_1\alpha = H_1\beta$, D. $H_2\alpha = H_2\beta$,

S – множество решений $x : I \to R$ уравнения (1).

В работе [1] для $\varphi(t, x, x') = x'$ найдены все теоремы существования максимального решения краевой задачи (1)-(3) в терминах классов монотонности, а в работе [2] показано, что других теорем такого типа нет. Наша цель состоит в том, чтобы показать, что все теоремы работы [1] справедливы для краевой задачи (1)-(3).

Постановка задачи

Определение 1. Функция $x \in C^1(I, R)$ является решением уравнения (1), если $\varphi(t, x(t), x'(t))$ – абсолютно непрерывная функция и уравнение (1) удовлетворяется почти всюду на I.

Определение 2. Функция $H \in C(R^4, R)$ имеет тип монотонности $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$, где $\sigma_i \in \{0, -, +, 1\}$, если при $\sigma_i = 0$ функция H не зависит от i-го аргумента, при $\sigma_i = -$ функция H не возрастает по i-му аргументу, при $\sigma_i = +$ функция H не убывает по i-му аргументу, а при $\sigma_i = 1$ на i-й аргумент функции H условия не накладываются. Класс монотонности $M(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ состоит из функций, имеющих тип монотонности $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$.

Разрешимость краевой задачи (1)-(3) будет выводиться из разрешимости задачи Дирихле

$$(\varphi(t, x, x'))' = f(t, x, x'), \quad x(a) = A, \quad x(b) = B, \quad \alpha_1 \leq x \leq \beta_1. \tag{4}$$

Будем говорить, что выполняется условие E, если задача Дирихле (4) имеет решение для любых нижней функции α_1, верхней функции β_1, $\alpha \leq \alpha_1 \leq \beta_1 \leq \beta$, $A \in [\alpha_1(a), \beta_1(a)]$, $B \in [\alpha_1(b), \beta_1(b)]$ и множество этих решений компактно. Заметим, что условие E выполняется, если добавить условия типа Нагумо или Шредера.

Пусть M_1 и M_2 – классы монотонности. Наша цель – выяснить, при каких M_1, M_2 и U справедливо следующее утверждение.

Утверждение. Для любых $H_1 \in M_1$, $H_2 \in M_2$, $h_1 \in [H_1\alpha, H_1\beta]$ и $h_2 \in [H_2\alpha, H_2\beta]$ из $H_1\alpha \leq H_1\beta$, $H_2\alpha \leq H_2\beta$ и условий U и E следует существование максимального решения краевой задачи (1)-(3).

Набор (M_1, M_2, U), подстановка которого в формулировку утверждения делает его верным, будем называть теоремой. Если набор не является теоремой, то можно построить противоречивый пример. Поэтому такой набор будем называть примером. Обозначим через ТЕ множество всех наборов (M_1, M_2, U), через ТМ – множество всех теорем, а через ЕМ – множество всех примеров. В ТЕ введем частичный порядок следующим образом: $(M_1, M_2, U_1) \leq (M_3, M_4, U_2)$, если $M_1 \subset M_3$, $M_2 \subset M_4$ и $U_2 \subset U_1$. Пусть ТМ$_{max}$ – множество максимальных элементов множества ТМ, а ЕМ$_{min}$ – множество минимальных элементов множества ЕМ. Из $t_1 \in$ТМ, $t_2 \in$ТЕ и $t_2 \leq t_1$ следует, что t_2 является частным случаем теоремы t_1. Поэтому $t_2 \in$ТМ. Аналогично из $e_1 \in$ЕМ, $e_2 \in$ТЕ и $e_1 \leq e_2$ следует $e_2 \in$ЕМ. Поэтому ТМ$_{max}$ полностью определяет множество ТМ, а ЕМ$_{min}$ – множество ЕМ. Теорему

ТМ$_n$. Для любых $H_1 \in M(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$, $H_2 \in M(\sigma_5, \sigma_6, \sigma_7, \sigma_8)$, $h_1 \in [H_1\alpha, H_1\beta]$ и $h_2 \in [H_2\alpha, H_2\beta]$ из $H_1\alpha \leq H_1\beta$, $H_2\alpha \leq H_2\beta$ и условий U и E следует существование

максимального решения краевой задачи (1)-(3).
Коротко будем записывать так:

$$TM_n. \quad \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4.\sigma_5\sigma_6\sigma_7\sigma_8.u_1u_2u_3u_4u_5u_6u_7u_8u_9u_Au_Bu_Cu_D, \tag{5}$$

где n – номер теоремы, $u_i = i$, если i-е условие входит в U и u_i пусто в противном случае. Краевая задача (1)-(3) и условия 1-D обладают симметрией, которой естественно воспользоваться для уменьшения нуждающихся в доказательстве теорем. Если поменять H_1 и H_2 местами, то теорема (5) переходит в теорему

$$TM_nH. \quad \sigma_5\sigma_6\sigma_7\sigma_8.\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4.u_1u_2u_3u_4u_5u_6u_7u_8u_9u_Au_Bu_Cu_D.$$

Замена в уравнении (1) независимой переменной t на $-t$ переводит теорему (5) в теорему

$$TM_nt. \quad \sigma_2\sigma_1\sigma_4'\sigma_3'.\sigma_6\sigma_5\sigma_8'\sigma_7'.u_5u_8u_7u_6u_1u_4u_3u_2u_9u_Au_Bu_Cu_D,$$

где $1' = 1$, $+' = -$, $-' = +$, $0' = 0$. Замена u_C на C и H_1 на $-H_1$ переводит теорему (5) в теорему

$$TM_nC. \quad \sigma_1'\sigma_2'\sigma_3'\sigma_4'.\sigma_5\sigma_6\sigma_7\sigma_8.u_1u_2u_3u_4u_5u_6u_7u_8u_9u_Au_BCu_D.$$

Замена u_D на D и H_2 на $-H_2$ переводит теорему (5) в теорему

$$TM_nD. \quad \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4.\sigma_5'\sigma_6'\sigma_7'\sigma_8'.u_1u_2u_3u_4u_5u_6u_7u_8u_9u_Au_Bu_CD.$$

Применяя описанные симметрии, из TM$_{max}$ можно получить порождающие теоремы TM$_g$. Если их доказать, то будут доказаны все теоремы TM. Приведем список порождающих теорем.

TM$_g$001. 1 – – 0. – 1 0 +, Tb02
TM$_g$002. 1 1 – +. 1 – – 0. 1, Tb03
TM$_g$003. – – – 0. – – – 0. 2, Tb04
TM$_g$004. – 1 0 +. – 0 + 0. 3, Tb05
TM$_g$005. – – – 0. – – – 0. 3, Tb05
TM$_g$006. – – – 0. – 0 + 0. 3, Tb05
TM$_g$007. – 0 + 0. – 0 + 0. 3, Tb05
TM$_g$008. – 1 0 +. – 0 + 0. 4, Tb06
TM$_g$009. – – – 0. – 0 + 0. 4, Tb06
TM$_g$010. – 0 + 0. – 0 + 0. 4, Tb06
TM$_g$011. 1 1 1 +. 1 - 1 0. 1 3, Tb08
TM$_g$012. 1 1 1 1. 1 1 1 1. 1 4, Tb89
TM$_g$013. 1 1 – +. 1 1 – +. 1 5, Tb09
TM$_g$014. 1 – – +. 1 – 0 –. 1 6, Tb10
TM$_g$015. 1 – 0 –. 1 – 0 –. 1 6, Tb10
TM$_g$016. 1 – – +. 1 – – +. 1 7, Tb11
TM$_g$017. 1 – – +. 1 – 0 –. 1 7, Tb11
TM$_g$018. 1 – 0 –. 1 – 0 –. 1 7, Tb11
TM$_g$019. 1 – – +. 1 – – +. 1 8, Tb12
TM$_g$020. 1 1 1 1. 1 1 1 1. 2 3, Tb90

TM_g021. 1 1 1 1. 1 1 1 1. 2 4, Tb91
TM_g022. 1 1 1 1. 1 1 1 1. 3 4, Tb92
TM_g023. – 0 + 0. 0 – 0 –. 3 6, Tb16
TM_g024. – 0 + 0. 0 – 0 –. 3 7, Tb17
TM_g025. – 0 + 0. 0 – 0 –. 4 6, Tb18
TM_g026. 1 1 1 +. 1 1 1 +. 1 3 5, Tb20
TM_g027. 1 – 1 +. 1 – 1 –. 1 3 6, Tb21
TM_g028. 1 – 1 –. 1 – 1 –. 1 3 6, Tb21
TM_g029. 1 – 1 +. 1 – 1 +. 1 3 7, Tb22
TM_g030. 1 – 1 +. 1 – 1 –. 1 3 7, Tb22
TM_g031. 1 – 1 –. 1 – 1 –. 1 3 7, Tb22
TM_g032. 1 – 1 +. 1 – 1 +. 1 3 8, Tb23
TM_g033. 1 1 1 1. 1 1 1 1. 1 3 5 7, Tb24
TM_g034. – + + +. – – – 0. 3 9, Tb05
TM_g035. – + + +. – 0 + 0. 3 9, Tb05
TM_g036. – + + +. – – – 0. 4 9, Tb07
TM_g037. – + + +. – 0 + 0. 4 9, Tb07
TM_g038. 1 – – 1. 1 – – –. 1 6 9, Tb10
TM_g039. 1 – – 1. 1 – – 1. 1 7 9, Tb11
TM_g040. – – – 0. 0 – – –. 2 6 9, Tb13
TM_g041. 0 – – –. 0 – – –. 2 6 9, Tb13
TM_g042. – – – 0. 0 – – –. 2 7 9, Tb14
TM_g043. 0 – – –. 0 – – –. 2 7 9, Tb14
TM_g044. – – – 0. 0 – – –. 3 6 9, Tb16
TM_g045. – 0 + +. 0 – – –. 3 6 9, Tb16
TM_g046. 0 – – –. 0 – – –. 3 6 9, Tb16
TM_g047. – – – 0. 0 – – –. 3 7 9, Tb17
TM_g048. – 0 + +. – 0 + +. 3 7 9, Tb17
TM_g049. – 0 + +. 0 – – –. 3 7 9, Tb17
TM_g050. – 0 + +. 0 – – –. 4 6 9, Tb19H
TM_g051. 1 – 1 1. 1 – 1 –. 1 3 6 9, Tb21
TM_g052. 1 – 1 1. 1 – 1 1. 1 3 7 9, Tb22
TM_g053. – – 1 0. – – 1 0. 3 B, Tb05
TM_g054. – – + 0. – – + 0. 4 B, Tb07
TM_g055. – – + 0. – – – 0. 4 B, Tb07
TM_g056. 1 – – +. 1 – – –. 1 6 B, Tb10
TM_g057. 1 – – –. 1 – – –. 1 6 B, Tb10
TM_g058. 1 – – 1. 1 – – 1. 1 7 B, Tb11
TM_g059. – – – –. – – – –. 2 6 B, Tb13H
TM_g060. – – – –. – – 0 +. 2 6 B, Tb13H
TM_g061. – – – 1. – – – 1. 2 7 B, Tb14
TM_g062. – – – +. – – – +. 2 8 B, Tb15
TM_g063. – – 1 –. – – 1 –. 3 6 B, Tb16H
TM_g064. – – – –. – – 0 +. 3 6 B, Tb16H
TM_g065. – – 1 1. – – 1 1. 3 7 B, Tb17
TM_g066. – – + –. – – + –. 4 6 B, Tb18

TM_g067. 1 – 1 1. 1 – 1 1. 1 3 7 B, Tb22
TM_g068. – 1 + +. – – – 0. 3 9 B, Tb05
TM_g069. – 1 + +. – 0 + 0. 3 9 B, Tb05
TM_g070. – 1 + +. – – – 0. 4 9 B, Tb07
TM_g071. – 1 + +. – 0 + 0. 4 9 B, Tb07
TM_g072. – – + +. – – – –. 3 6 9 B, Tb16
TM_g073. – – + +. – – – –. 4 6 9 B, Tb19H
TM_g074. 1 – – –. – 1 + +. 9 A B, Tb26
TM_g075. 1 1 1 1. 1 – – –. 1 9 A B, Tb27
TM_g076. 1 – – –. 0 – – –. 2 9 A B, Tb28
TM_g077. – – – –. – – – –. 2 9 A B, Tb28
TM_g078. 1 – – –. 0 – – –. 3 9 A B, Tb31
TM_g079. – – 1 –. – – 1 –. 3 9 A B, Tb31
TM_g080. 1 1 1 1. 1 – 1 –. 1 3 9 A B, Tb34
TM_g081. 1 1 1 1. 1 1 1 1. 1 5 9 A B, Tb35
TM_g082. 1 1 1 1. 1 – 1 1. 1 7 9 A B, Tb36
TM_g083. 1 1 1 1. 1 1 1 1. 1 8 9 A B, Tb93
TM_g084. 1 1 1 1. 1 1 1 1. 2 7 9 A B, Tb94
TM_g085. 1 1 1 1. 1 1 1 1. 2 8 9 A B, Tb95
TM_g086. 1 1 0 0. – – 0 0. C, Tb01
TM_g087. + – – 0. – – – 0. C, Tb40
TM_g088. 1 + 0 +. 1 – – +. 1 C, Tb42
TM_g089. + – – 0. 0 0 + 0. 3 C, Tb05C
TM_g090. + – – 0. 0 0 + 0. 4 C, Tb06C
TM_g091. 1 + 1 +. 1 – 1 +. 1 3 C, Tb49
TM_g092. + – – –. – – 0 +. 3 9 C, Tb45
TM_g093. 0 + + +. – 0 + +. 3 9 C, Tb43
TM_g094. + – – –. – – 0 +. 4 9 C, Tb45
TM_g095. 0 + + +. – 0 + +. 4 9 C, Tb46
TM_g096. + – – –. – – – 0. 9 A C, Tb54
TM_g097. 1 1 1 1. 1 – – 0. 1 9 A C, Tb55
TM_g098. 1 + + +. 1 – – +. 1 9 A C, Tb56
TM_g099. 1 0 0 0. 0 – – 0. 2 9 A C, Tb57
TM_g100. 1 0 0 0. – + + +. 3 9 A C, Tb78
TM_g101. 1 0 0 0. 0 – – 0. 3 9 A C, Tb59
TM_g102. 1 0 0 0. – + + +. 4 9 A C, Tb78
TM_g103. 1 1 1 1. 1 – 1 0. 1 3 9 A C, Tb63
TM_g104. 1 1 1 1. 1 1 – +. 1 5 9 A C, Tb64
TM_g105. 1 1 1 1. 1 – – –. 1 6 9 A C, Tb65
TM_g106. 1 1 1 1. 1 – – 1. 1 7 9 A C, Tb66
TM_g107. 1 1 1 1. 1 – – +. 1 8 9 A C, Tb67
TM_g108. 1 0 0 0. 0 – – –. 2 6 9 A C, Tb68
TM_g109. + – – –. 0 – – –. 2 6 9 A C, Tb68
TM_g110. 1 0 0 0. 0 – – –. 2 7 9 A C, Tb69
TM_g111. + – – –. 0 – – –. 2 7 9 A C, Tb69
TM_g112. 1 0 0 0. 0 – – –. 3 6 9 A C, Tb71

$\mathrm{TM}_g113.\ + - - -.\ 0 - - -.\ 3\ 6\ 9\ \mathrm{A\ C}$, Tb71
$\mathrm{TM}_g114.\ 1\ 0\ 0\ 0.\ 0 - - -.\ 3\ 7\ 9\ \mathrm{A\ C}$, Tb72
$\mathrm{TM}_g115.\ + - - -.\ - 0 + +.\ 3\ 7\ 9\ \mathrm{A\ C}$, Tb72
$\mathrm{TM}_g116.\ 1\ 1\ 1\ 1.\ 1\ 1\ 1\ +.\ 1\ 3\ 5\ 9\ \mathrm{A\ C}$, Tb74
$\mathrm{TM}_g117.\ 1\ 1\ 1\ 1.\ 1 - 1\ -.\ 1\ 3\ 6\ 9\ \mathrm{A\ C}$, Tb75
$\mathrm{TM}_g118.\ 1\ 1\ 1\ 1.\ 1 - 1\ 1.\ 1\ 3\ 7\ 9\ \mathrm{A\ C}$, Tb76
$\mathrm{TM}_g119.\ 1\ 1\ 1\ 1.\ 1 - 1\ +.\ 1\ 3\ 8\ 9\ \mathrm{A\ C}$, Tb77
$\mathrm{TM}_g120.\ 1\ 1\ 1\ 1.\ - - 0\ 0.\ \mathrm{B\ C}$, Tb52x
$\mathrm{TM}_g121.\ 1 + + +.\ - - 0\ +.\ \mathrm{B\ C}$, Tb53x
$\mathrm{TM}_g122.\ 1\ 1\ 1\ 1.\ 1 - - 0.\ 1\ \mathrm{B\ C}$, Tb55x
$\mathrm{TM}_g123.\ 1 + + +.\ 1 - - +.\ 1\ \mathrm{B\ C}$, Tb56x
$\mathrm{TM}_g124.\ 1\ 1\ 1\ 1.\ - - - 0.\ 2\ \mathrm{B\ C}$, Tb57x
$\mathrm{TM}_g125.\ 1\ 1\ 1\ 1.\ - - 1\ 0.\ 3\ \mathrm{B\ C}$, Tb59x
$\mathrm{TM}_g126.\ 1\ 1\ 1\ 1.\ - - + 0.\ 4\ \mathrm{B\ C}$, Tb61x
$\mathrm{TM}_g127.\ 1\ 1\ 1\ 1.\ 1 - 1\ 0.\ 1\ 3\ \mathrm{B\ C}$, Tb63x
$\mathrm{TM}_g128.\ 1\ 1\ 1\ 1.\ 1\ 1 - +.\ 1\ 5\ \mathrm{B\ C}$, Tb64x
$\mathrm{TM}_g129.\ 1\ 1\ 1\ 1.\ 1 - - -.\ 1\ 6\ \mathrm{B\ C}$, Tb65x
$\mathrm{TM}_g130.\ 1\ 1\ 1\ 1.\ 1 - - 1.\ 1\ 7\ \mathrm{B\ C}$, Tb66x
$\mathrm{TM}_g131.\ 1\ 1\ 1\ 1.\ 1 - - +.\ 1\ 8\ \mathrm{B\ C}$, Tb67x
$\mathrm{TM}_g132.\ 1\ 1\ 1\ 1.\ - - - -.\ 2\ 6\ \mathrm{B\ C}$, Tb68x
$\mathrm{TM}_g133.\ 1\ 1\ 1\ 1.\ - - - 1.\ 2\ 7\ \mathrm{B\ C}$, Tb69x
$\mathrm{TM}_g134.\ 1\ 1\ 1\ 1.\ - - - +.\ 2\ 8\ \mathrm{B\ C}$, Tb70x
$\mathrm{TM}_g135.\ 1\ 1\ 1\ 1.\ - - 1\ -.\ 3\ 6\ \mathrm{B\ C}$, Tb71x
$\mathrm{TM}_g136.\ 1\ 1\ 1\ 1.\ - - 1\ 1.\ 3\ 7\ \mathrm{B\ C}$, Tb72x
$\mathrm{TM}_g137.\ 1\ 1\ 1\ 1.\ - - + -.\ 4\ 6\ \mathrm{B\ C}$, Tb73x
$\mathrm{TM}_g138.\ 1\ 1\ 1\ 1.\ 1\ 1\ 1\ +.\ 1\ 3\ 5\ \mathrm{B\ C}$, Tb74x
$\mathrm{TM}_g139.\ 1\ 1\ 1\ 1.\ 1 - 1\ -.\ 1\ 3\ 6\ \mathrm{B\ C}$, Tb75x
$\mathrm{TM}_g140.\ 1\ 1\ 1\ 1.\ 1 - 1\ 1.\ 1\ 3\ 7\ \mathrm{B\ C}$, Tb76x
$\mathrm{TM}_g141.\ 1\ 1\ 1\ 1.\ 1 - 1\ +.\ 1\ 3\ 8\ \mathrm{B\ C}$, Tb77x
$\mathrm{TM}_g142.\ 1\ 0\ 0\ 0.\ - 1 + +.\ 3\ 9\ \mathrm{B\ C}$, Tb78x
$\mathrm{TM}_g143.\ + + + +.\ - - + +.\ 3\ 9\ \mathrm{B\ C}$, Tb60x
$\mathrm{TM}_g144.\ 1\ 0\ 0\ 0.\ - 1 + +.\ 4\ 9\ \mathrm{B\ C}$, Tb78x
$\mathrm{TM}_g145.\ + + + +.\ - - + +.\ 4\ 9\ \mathrm{B\ C}$, Tb62x
$\mathrm{TM}_g146.\ 1\ 1\ 1\ 1.\ - - - -.\ 2\ 9\ \mathrm{A\ B\ C}$, Tb28
$\mathrm{TM}_g147.\ 1\ 1\ 1\ 1.\ - - 1\ -.\ 3\ 9\ \mathrm{A\ B\ C}$, Tb31
$\mathrm{TM}_g148.\ 1\ 1\ 0\ 0.\ 1\ 1\ 0\ 0.\ \mathrm{C\ D}$, Tb81
$\mathrm{TM}_g149.\ 1\ 1\ 1\ 0.\ 1\ 1\ 1\ 0.\ 1\ 3\ \mathrm{C\ D}$, Tb84
$\mathrm{TM}_g150.\ 1\ 0\ 0\ 1.\ 1\ 0\ 0\ 1.\ 1\ 6\ 9\ \mathrm{C\ D}$, Tb83t
$\mathrm{TM}_g151.\ 1\ 0\ 1\ 1.\ 1\ 0\ 1\ 1.\ 1\ 3\ 6\ 9\ \mathrm{C\ D}$, Tb87
$\mathrm{TM}_g152.\ 1\ 0\ 0\ 0.\ + - - -.\ 9\ \mathrm{A\ C\ D}$, Tb88
$\mathrm{TM}_g153.\ + - - -.\ + - - -.\ 9\ \mathrm{A\ C\ D}$, Tb88
$\mathrm{TM}_g154.\ 1\ 1\ 1\ 1.\ 1\ 1\ 1\ 1.\ 1\ 9\ \mathrm{A\ C\ D}$, Tb88
$\mathrm{TM}_g155.\ 1\ 1\ 1\ 1.\ 1\ 1\ 1\ 1.\ \mathrm{B\ C\ D}$, Tb88x

В таблице после запятой стоит идентификатор теоремы из работы [3], из которой следует существование решения краевой задачи для соответствующей теоремы. Так, существование решения краевой задачи для теоремы TM_g001 следует из теоремы

Tb02 работы [3]. Далее ссылки на работу [3] будем опускать. Остается доказать существование максимального решения. Симметрии TbnH, Tbnt, TbnC и TbnD аналогичны соответствующим симметриям для TMn. Если

$$Tbn.\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4.\sigma_5\sigma_6\sigma_7\sigma_8.u_1u_2u_3u_4u_5u_6u_7u_8u_9u_Au_Bu_Cu_D, \tag{6}$$

то замена в уравнении (1) x на -x переводит теорему (6) в теорему

$$Tbnx.\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4.\sigma_5\sigma_6\sigma_7\sigma_8.u_1u_2u_3u_4u_5u_6u_7u_8u_9u_Bu_Au_Cu_D.$$

Существование максимального решения

Теорема 1 *Для теорем* TM_g*001-*TM_g*155 существует максимальное решение краевой задачи (1)-(3).*

Доказательство. Теоремы TM_g012, TM_g020-TM_g022 и TM_g083-TM_g085 технические. Их условия противоречивы. Они тривиально истинны. Функция β является максимальным решением краевой задачи (1)-(3) для теорем TM_g053-TM_g054, TM_g057-TM_g059, TM_g061-TM_g063, TM_g065-TM_g067, TM_g077, TM_g079, TM_g081, TM_g120, TM_g122, TM_g124-TM_g141, TM_g146-TM_g147 и TM_g155. Максимальное решение задачи Дирихле

$$(\varphi(t,x,x'))' = f(t,x,x'), \quad x(a) = \beta(a), \quad x(b) = \beta(b), \quad \alpha \le x \le \beta$$

является максимальным решением краевой задачи (1)-(3) для теорем TM_g013, TM_g026, TM_g033, TM_g086 и TM_g148-TM_g149.

Множество решений краевой задачи (1)-(3) обозначим SH. Для доказательства существования максимального решения краевой задачи (1)-(3) достаточно показать, что для любых $x, y \in SH$ существует $z \in SH$ такое, что $z \ge s = \max\{x, y\}$. Действительно, если SH состоит из конечного числа решений, то существование максимального решения очевидно. Пусть SH состоит из бесконечного числа решений. Обозначим через r_i, $i = 1, 2, \ldots$ рациональные точки интервала I и через $x_i \in SH$ такие решения, что $x_i(r_i) = \max\{x(r_i) : x \in SH\}$. Определим последовательность z_i, $i = 1, 2, \ldots$ следующим образом: $z_1 = x_1$ и $z_i \in SH$, $i = 2, 3, \ldots$ такие, что $z_i \ge \max\{z_{i-1}, x_i\}$. Ясно, что $\lim_{i\to\infty} z_i = z \in SH$ и z – максимальное решение краевой задачи (1)-(3).

Без ограничения общности будем считать, что $x(a) \ge y(a)$ и $x'(a) \ge y'(a)$ при $x(a) = y(a)$. Заметим, что s – нижняя функция. Обозначим через u решение задачи Дирихле

$$(\varphi(t,u,u'))' = f(t,u,u'), \quad u(a) = s(a), \quad u(b) = s(b), \quad s \le u \le \beta.$$

Если выполняется условие 9, $x(a) = y(a)$ или $x(b) \ge y(b)$, то $u \in SH$ и его можно взять в качестве z. Следовательно, теоремы TM_g038-TM_g039, TM_g051-TM_g052, TM_g075, TM_g080, TM_g082, TM_g097-TM_g098, TM_g103-TM_g107, TM_g116-TM_g119, TM_g150-TM_g151 и TM_g154 доказаны и при наличии условия 9 можно рассматривать только случай $x(a) > y(a)$ и $x(b) < y(b)$. При этом $x'(a) \le u'(a) \le y'(a)$ и $x'(b) \le u'(b) \le y'(b)$. Условия монотонности для H_1 и H_2 гарантируют $u \in SH$ для теорем TM_g035, TM_g037, TM_g041, TM_g043, TM_g045-TM_g046, TM_g048-TM_g050, TM_g093, TM_g095, TM_g099

-TM$_g$102, TM$_g$108-TM$_g$115 и TM$_g$152-TM$_g$153. Если в теореме присутствуют условия 1 и 3, то эта теорема следует из аналогичной теоремы без условия 3. Так, теорема TM$_g$011. 1 1 1 +. 1 – 1 0. 1 3 следует из теоремы TM$_g$002. 1 1 – +. 1 – – 0. 1. Следовательно, теоремы TM$_g$011, TM$_g$027-TM$_g$032 и TM$_g$091 можно не доказывать. Осталось доказать теоремы TM$_g$001-TM$_g$010, TM$_g$014-TM$_g$019, TM$_g$023-TM$_g$025, TM$_g$034, TM$_g$036, TM$_g$040, TM$_g$042, TM$_g$044, TM$_g$047, TM$_g$055-TM$_g$056, TM$_g$060, TM$_g$064, TM$_g$068-TM$_g$074, TM$_g$076, TM$_g$078, TM$_g$087-TM$_g$090, TM$_g$092, TM$_g$094, TM$_g$096, TM$_g$121, TM$_g$123 и TM$_g$142-TM$_g$145.

Рассмотрим теорему TM$_g$001. 1 – – 0. – 1 0 +. Из $H_1 s \le H_1 x = h_1$ следует $H_1 s \le h_1$. Если $x(b) \ge y(b)$, то $H_2 s \le H_2 x = h_2$. Если $x(b) < y(b)$, то $H_2 s \le H_2 y = h_2$. Следовательно, $H_2 s \le h_2$. Существование z следует из Tb02. 1 – – 0. – 1 0 +.

Рассмотрим теорему TM$_g$002. 1 1 – +. 1 – – 0. 1. Если $x(b) \ge y(b)$, то $H_1 s \le H_1 x = h_1$. Если $x(b) < y(b)$, то $H_1 s \le H_1 y = h_1$. Следовательно $H_1 s \le h_1$. Из $H_2 s \le H_2 x = h_2$ следует $H_2 s \le h_2$. Существование z следует из теоремы Tb03. 1 1 – +. 1 – – 0. 1.

Рассмотрим теоремы TM$_g$003. – – – 0. – – – 0. 2, TM$_g$005. – – – 0. – – – 0. 3. Если $u'(a) \ge \beta'(a)$, то существует решение z краевой задачи

$$(\varphi(t,z,z'))' = f(t,z,z'), \quad -z'(a) = -\beta'(a), \quad z(b) = u(b), \quad u \le z \le \beta \tag{7}$$

по теореме Tb02. 1 – – 0. – 1 0 +. Из $h_1 \ge H_1\alpha \ge H_1 z \ge H_1\beta \ge h_1$ и $h_2 \ge H_2\alpha \ge H_2 z \ge H_2\beta \ge h_2$ следует $H_1 z = h_1$ и $H_2 z = h_2$. Пусть $u'(a) < \beta'(a)$. Из $h_1 = H_1 x \ge H_1 u \ge H_1\beta \ge h_1$ и $h_2 = H_2 x \ge H_2 u \ge H_2\beta \ge h_2$ следует $H_1 u = h_1$, $H_2 u = h_2$ и $z = u$.

Рассмотрим теоремы TM$_g$004. – 1 0 +. – 0 + 0. 3, TM$_g$008. – 1 0 +. – 0 + 0. 4. Из $h_2 \ge H_2\alpha \ge H_2\beta \ge h_2$ следует $H_2\alpha = H_2\beta = h_2$. Если $x(b) \ge y(b)$, то $H_1 s \le H_1 x = h_1$. Если $x(b) < y(b)$, то $H_1 s \le H_1 y = h_1$. Следовательно, $H_1 s \le h_1$. Из $H_2 s = H_2 x = h_2$ следует $H_2 s = h_2$. Существование z следует из теоремы Tb40HD. – 1 – +. – + + 0. D.

Рассмотрим теоремы TM$_g$006. – – – 0. - 0 + 0. 3, TM$_g$009. – – – 0. - 0 + 0. 4. Из $h_2 \ge H_2\alpha \ge H_2\beta \ge h_2$ следует $H_2\alpha = H_2\beta = h_2$. Из $H_1 s \le H_1 x = h_1$ следует $H_1 s \le h_1$, а из $H_2 s = H_2 x = h_2$ следует $H_2 s = h_2$. Существование z следует из теоремы Tb40HD. – 1 – +. – + + 0. D.

Рассмотрим теоремы TM$_g$007. – 0 + 0. – 0 + 0. 3, TM$_g$010. – 0 + 0. – 0 + 0. 4. Если $u'(a) \ge \beta'(a)$, то существует решение z краевой задачи (7). Из $h_1 \ge H_1\alpha \ge H_1 z \ge H_1\beta \ge h_1$ и $h_2 \ge H_2\alpha \ge H_2 z \ge H_2\beta \ge h_2$ следует $H_1 z = h_1$ и $H_2 z = h_2$. Пусть $u'(a) < \beta'(a)$. Из $h_1 \ge H_1\alpha \ge H_1 u \ge H_1 x = h_1$ и $h_2 \ge H_2\alpha \ge H_2 u \ge H_2 x = h_2$ следует $H_1 u = h_1$, $H_2 u = h_2$ и $z = u$.

Рассмотрим теоремы TM$_g$014. 1 – – +. 1 - 0 –. 1 6, TM$_g$017. 1 – – +. 1 – 0 –. 1 7. Из $h_2 \ge H_2\alpha \ge H_2\beta \ge h_2$ следует $H_2\alpha = H_2\beta = h_2$. Если $x(b) > y(b)$ или $x(b) = y(b)$ и $x'(b) \ge y'(b)$, то $H_1 s = H_1 x = h_1$ и $H_2 s = H_2 x = h_2$. Если $x(b) < y(b)$ или $x(b) = y(b)$ и $x'(b) > y'(b)$, то $H_1 s \le H_1 y = h_1$ и $H_2 s = H_2 y = h_2$. Следовательно, $H_1 s \le h_1$ и $H_2 s = h_2$. Существование z следует из теоремы Tb42HD. 1 – – +. 1 – 0 –. 1 D.

Рассмотрим теоремы TM$_g$015. 1 – 0 –. 1 – 0 –. 1 6, TM$_g$018. 1 - 0 –. 1 – 0 –. 1 7. Если $u'(b) \le \beta'(b)$, то существует решение z краевой задачи

$$(\varphi(t,z,z'))' = f(t,z,z'), \quad z(a) = u(a), \quad z'(b) = \beta'(b), \quad u \le z \le \beta \tag{8}$$

по теореме Tb02. 1 – – 0. – 1 0 +. Из $h_1 \ge H_1\alpha \ge H_1 z \ge H_1\beta \ge h_1$ и $h_2 \ge H_2\alpha \ge H_2 z \ge H_2\beta \ge h_2$ следует $H_1 z = h_1$ и $H_2 z = h_2$. Пусть $u'(b) > \beta'(b)$. Если $x(b) > y(b)$ или

$x(b) = y(b)$ и $x'(b) \leq y'(b)$, то $h_1 \geq H_1\alpha \geq H_1u \geq H_1x = h_1$ и $h_2 \geq H_2\alpha \geq H_2u \geq H_2x = h_2$. Если $x(b) < y(b)$ или $x(b) = y(b)$ и $x'(b) > y'(b)$, то $h_1 \geq H_1\alpha \geq H_1u \geq H_1y = h_1$ и $h_2 \geq H_2\alpha \geq H_2u \geq H_2y = h_2$. Следовательно, $H_1u = h_1$, $H_2u = h_2$ и $z = u$.

Рассмотрим теоремы TM_g016. 1 − − +. 1 − − +. 1 7, TM_g019. 1 − − +. 1 − − +. 1 8. Если $u'(b) \leq \beta'(b)$, то существует решение z краевой задачи (8). Из $h_1 \geq H_1\alpha \geq H_1z \geq H_1\beta \geq h_1$ и $h_2 \geq H_2\alpha \geq H_2z \geq H_2\beta \geq h_2$ следует $H_1z = h_1$ и $H_2z = h_2$. Пусть $u'(b) > \beta'(b)$. Если $x(b) > y(b)$ или $x(b) = y(b)$ и $x'(b) \leq y'(b)$, то $h_1 = H_1x \geq H_1u \geq H_1\beta \geq h_1$ и $h_2 = H_2x \geq H_2u \geq H_2\beta \geq h_2$. Если $x(b) < y(b)$ или $x(b) = y(b)$ и $x'(b) > y'(b)$, то $h_1 = H_1x \geq H_1u \geq H_1\beta \geq h_1$ и $h_2 = H_2y \geq H_2u \geq H_2\beta \geq h_2$. Следовательно, $H_1u = h_1$, $H_2u = h_2$ и $z = u$.

Рассмотрим теоремы TM_g023. – 0 + 0. 0 – 0 –. 3 6, TM_g024. – 0 + 0. 0 – 0 –. 3 7, TM_g025. – 0 + 0. 0 – 0 –. 4 6. Из $h_1 \geq H_1\alpha \geq H_1\beta \geq h_1$ и $h_2 \geq H_2\alpha \geq H_2\beta \geq h_2$ следует $H_1\alpha = H_1\beta = h_1$ и $H_2\alpha = H_2\beta = h_2$. Из $H_1s = H_1x = h_1$ следует $H_1s = h_1$. Если $x(b) > y(b)$ или $x(b) = y(b)$ и $x'(b) \leq y'(b)$, то $H_2s = H_2x = h_2$. Если $x(b) < y(b)$ или $x(b) = y(b)$ и $x'(b) > y'(b)$, то $H_2s = H_2x = h_2$. Следовательно, $H_2s = h_2$. Существование z следует из теоремы Tb40CD. – + + 0. + 1 + –. C D.

Рассмотрим теоремы TM_g034. – + + +. – – – 0. 3 9, TM_g036. – + + +. – – – 0. 4 9. Из $h_1 = H_1x \leq H_1u \leq H_1y = h_1$ и $H_2u \leq H_2x = h_2$ следует $H_1u = h_1$ и $H_2u \leq h_2$. Если $u'(a) \leq \beta'(a)$, то $h_2 \leq H_2\beta \leq H_2u$. Следовательно, $H_1u = h_1$, $H_2u = h_2$ и $z = u$. Если $u'(a) > \beta'(a)$, то существование z следует из теоремы Tb07. – 1 + +. – – 1 0. 4.

Рассмотрим теоремы TM_g040. – – – 0. 0 – – – . 2 6 9, TM_g042. – – – 0. 0 – – –. 2 7 9, TM_g044. – – – 0. 0 – – –. 3 6 9, TM_g047. – – – 0. 0 – – –. 3 7 9. Из $h_2 \geq H_2\alpha \geq H_2\beta \geq h_2$ следует $H_2\alpha = H_2\beta = h_2$. Из $H_1u \leq H_1x = h_1$ и $h_2 = H_2y \leq H_2u \leq H_2x = h_2$ следует $H_1u \leq h_1$ и $H_2u = h_2$. Если $u'(a) \leq \beta'(a)$, то $h_1 \leq H_1\beta \leq H_1u$. Следовательно, $H_1u = h_1$, $H_2u = h_2$ и $z = u$. Если $u'(a) > \beta'(a)$, то существование z следует из теоремы Tb07HD. – – 1 0. + 1 – –. 4 D.

Рассмотрим теорему TM_g055. – – + 0. – – – 0. 4 B. Из $h_1 \geq H_1\alpha \geq H_1\beta \geq h_1$ следует $H_1\alpha = H_1\beta = h_1$. Если $H_2\beta = h_2$, то $z = \beta$. Пусть $H_2\beta > h_2$. Тогда $s'(a) = x'(a) > \beta'(a)$. Из $H_1s \leq H_1x = h_1$ и $H_2s \leq H_2x = h_2$ следует $H_1s \leq h_1$ и $H_2s \leq h_2$. Существование z следует из теоремы Tb07. – 1 + +. – – 1 0. 4.

Рассмотрим теорему TM_g056. 1 – – +. 1 – – –. 1 6 B. Из $h_2 \geq H_2\alpha \geq H_2\beta \geq h_2$ следует $H_2\alpha = H_2\beta = h_2$. Если $H_1\beta = h_1$, то $z = \beta$. Пусть $H_1\beta > h_1$. Тогда $x'(b) < \beta'(b)$ и $y'(b) < \beta'(b)$. Если $x(b) > y(b)$ или $x(b) = y(b)$ и $x'(b) \leq y'(b)$, то $s'(b) = x'(b) < \beta'(b)$, $H_1s = H_1x = h_1$ и $H_2s = H_2x = h_2$. Если $x(b) < y(b)$ или $x(b) = y(b)$ и $x'(b) > y'(b)$, то $s'(b) = y'(b) < \beta'(b)$, $H_1s \leq H_1y \leq h_1$ и $H_2s \leq H_2y = h_2$. Следовательно, $s'(b) < \beta'(b)$, $H_1s \leq h_1$ и $H_2s \leq h_2$. Существование z следует из теоремы Tb10. 1 – – 1. 1 – – –. 1 6.

Рассмотрим теоремы TM_g060. – – – –. – – 0 +. 2 6 B, TM_g064. – – – –. – – 0 +. 3 6 B. Из $h_1 \geq H_1\alpha \geq H_1\beta \geq h_1$ следует $H_1\alpha = H_1\beta = h_1$. Если $H_2\beta = h_2$, то $z = \beta$. Пусть $H_2\beta > h_2$. Тогда $x'(b) < \beta'(b)$ и $y'(b) < \beta'(b)$. Если $x(b) > y(b)$ или $x'(b) \leq y'(b)$, то $H_1s \leq H_1x = h_1$, $H_2s = H_2x = h_2$ при $x(b) > y(b)$ и $H_2s \leq H_2y = h_2$ при $x'(b) \leq y'(b)$. Следовательно, $s'(b) < \beta'(b)$, $H_1s \leq h_1$ и $H_2s \leq h_2$. Существование z следует из теоремы Tb07t. 1 – – –. – – 0 1. 6. Если $x(b) \leq y(b)$ и $x'(b) > y'(b)$, то существует решение v краевой задачи

$$(\varphi(t, v, v'))' = f(t, v, v'), \quad v(a) = x(a), \quad v'(b) = x'(b), \quad s \leq v \leq \beta$$

по теореме Tb02. 1 – – 0. – 1 0 +. Тогда $H_1v \le H_1x = h_1$ и $H_2x \le H_2x = h_2$. Следовательно, $v'(b) < \beta'(b)$, $H_1v \le h_1$ и $H_2v \le h_2$. Существование z следует из теоремы Tb07t.

Рассмотрим теоремы TM$_g$068. – 1 + +. – – – 0. 3 9 B, TM$_g$070. – 1 + +. – – – 0. 4 9 B. Из $H_1u \le H_1y = h_1$ и $H_2u \le H_2x = h_2$ следует $H_1u \le h_1$ и $H_2u \le h_2$. Существование z следует из теоремы Tb26H. – 1 + +. 1 – – –. 9 A B.

Рассмотрим теоремы TM$_g$069. – 1 + +. – 0 + 0. 3 9 B, TM$_g$071. – 1 + +. – 0 + 0. 4 9 B. Из $h_2 \ge H_2\alpha \ge H_2\beta \ge h_2$ следует $H_2\alpha = H_2\beta = h_2$. Из $H_1u \le H_1y = h_1$ и $H_2u \le H_2x = h_2$ следует $H_1u \le h_1$ и $H_2u \le h_2$. Существование z следует из теоремы Tb26HD. – 1 + +. 1 + + +. 9 A B D.

Рассмотрим теоремы TM$_g$072. – – + +. – – – –. 3 6 9 B, TM$_g$073. – – + +. – – – –. 4 6 9 B. Из $H_1u \le H_1y = h_1$ и $H_2u \le H_2x = h_2$ следует $H_1u \le h_1$ и $H_2u \le h_2$. Существование z следует из теоремы Tb26H. – 1 + +. 1 – – –. 9 A B.

Рассмотрим теорему TM$_g$074. 1 – – –. – 1 + +. 9 A B. Из $H_1u \le H_1x = h_1$ и $H_2u \le H_2y = h_2$ следует $H_1u \le h_1$ и $H_2u \le h_2$. Существование z следует из теоремы Tb26H. 1 – – –. – 1 + +. 9 A B.

Рассмотрим теоремы TM$_g$076. 1 – – –. 0 – – –. 2 9 A B, TM$_g$078. 1 – – –. 0 – – –. 3 9 A B. Из $h_2 \ge H_2\alpha \ge H_2\beta \ge h_2$ следует $H_2\alpha = H_2\beta = h_2$. Из $H_1u \le H_1y = h_1$ и $h_2 = H_2y \le H_2u \le H_2x = h_2$ следует $H_1u \le h_1$ и $H_2u = h_2$. Существование z следует из теоремы Tb26D. 1 – – –. + 1 – –. 9 A B D.

Рассмотрим теорему TM$_g$087. + – – 0. – – – 0. C. Если $x(b) \ge y(b)$ или $x'(a) \le y'(a)$, то $H_1s = H_1x = h_1$ при $x(b) \ge y(b)$, $h_1 = H_1y \le H_1s \le H_1x \le h_1$ при $x(b) < y(b)$ и $x'(a) \le y'(a)$ и $H_2s \le H_2x = h_2$. Следовательно, $H_1s = h_1$, $H_2s \le h_2$ и существование z следует из теоремы Tb40. + – – 0. – 1 – +. C. Если $x(b) < y(b)$ и $x'(a) > y'(a)$, то $H_1s \le H_1x = h_1$ и существует решение v краевой задачи

$$(\varphi(t,v,v'))' = f(t,v,v'), \quad H_1v = h_1, \quad v(b) = y(b), \quad s \le v \le \beta$$

по теореме Tb02. 1 – – 0. – 1 0 +. Если $v'(a) \ge y'(a)$, то $H_2v \le H_2y = h_2$. Следовательно, $H_1v = h_1$, $H_2v \le h_2$ и существование z следует из теоремы Tb40. Пусть $v'(a) < y'(a)$. Тогда существует решение w краевой задачи

$$(\varphi(t,w,w'))' = f(t,w,w'), \quad -w'(a) = -y'(a), \quad w(b) = y(b), \quad s \le w \le v$$

по теореме Tb02. Из $h_1 = H_1y \le H_1w \le H_1v = h_1$ и $H_2w \le H_2y = h_2$ следует $H_1w = h_1$, $H_2w \le h_2$ и существование z следует из теоремы Tb40.

Рассмотрим теорему TM$_g$088. 1 + 0 +. 1 – – +. 1 C. Если $x(b) > y(b)$ или $x(b) = y(b)$ и $x'(b) \le y'(b)$, то $H_1s = H_1x = h_1$ и $H_2s = H_2x = h_2$. Следовательно, $H_1s = h_1$, $H_2s = h_2$ и существование z следует из теоремы Tb42. 1 + 0 +. 1 – – +. 1 C. Если $x(b) < y(b)$ или $x(b) = y(b)$ и $x'(b) > y'(b)$, то $H_1s = H_1y = h_1$ и $H_2s \le H_2y = h_2$. Следовательно, $H_1s = h_1$, $H_2s \le h_2$ и существование z следует из теоремы Tb42.

Рассмотрим теоремы TM$_g$089. + – – 0. 0 0 + 0. 3 C, TM$_g$090. + – – 0. 0 0 + 0. 4 C. Из $h_2 \ge H_2\alpha \ge H_2\beta \ge h_2$ следует $H_2\alpha = H_2\beta = h_2$. Существование максимального решения следует из теоремы TM$_g$087D. + – – 0. + + + 0. C D.

Рассмотрим теоремы TM$_g$092. + – – –. – – 0 +. 3 9 C, TM$_g$094. + – – –. – – 0 +. 4 9 C. Эти теоремы эквивалентны следующим теоремам T1. + – – –. – – 0 +. 3 V 4 6 9 C, T2. + – – –. – – 0 +. 3 V 4 7 9 C, T3. + – – –. – – 0 +. 4 8 9 C. Теорема T1 следует из теоремы TM_g036t. $+ - - -. - - 0 +. 6$ 9. Теорема T2 следует из теоремы TM_g034t. $+ - - -. - - 0 +. 7$ 9. Докажем теорему T3. Из $h_2 \geq H_2\alpha \geq H_2\beta \geq h_2$, $h_1 = H_1y \leq H_1u \leq H_1x = h_1$ и $H_2u \leq H_2y = h_2$ следует $H_2\alpha = H_2\beta = h_2$, $H_1u = h_1$ и $H_2u \leq h_2$. Если $u'(b) \geq \beta'(b)$, то $h_2 = H_2\beta \leq H_2u \leq h_2$. Следовательно, $H_2u = h_2$ и $z = u$. Пусть $u'(b) < \beta'(b)$. Тогда существует решение z краевой задачи

$$(\varphi(t, z, z'))' = f(t, z, z'), \quad H_1z = h_1, \quad z'(b) = \beta'(b), \quad u \leq z \leq \beta$$

по теореме Tb54. $+ - - -. - - - +$. A C. Из $h_2 = H_2\beta \leq H_2z \leq H_2\alpha = h_2$ следует $H_2z = h_2$.

Рассмотрим теорему TM_g096. $+ - - -. - - - 0$. 9 A C. Из $h_1 = H_1y \leq H_1u \leq H_1x = h_1$ и $H_2u \leq H_2x = h_2$ следует $H_1u = h_1$ и $H_2u \leq h_2$. Существование z следует из теоремы Tb54. $+ - - -. - - - +$. A C.

Рассмотрим теорему TM_g121. $1 + + +. - - 0 +$. B C. Если $H_2\beta = h_2$, то $z = \beta$. Если $\alpha'(b) \geq \beta'(b)$, то $h_2 \geq H_2\alpha \geq H_2\beta \geq h_2$. Следовательно, $H_2\alpha = H_2\beta = h_2$ и $z = \beta$. Пусть $H_2\beta > h_2$ и $\alpha'(b) < \beta'(b)$. Из монотонностей для H_2 следуют неравенства $x'(b) < \beta'(b)$ и $y'(b) < \beta'(b)$. Вместо теоремы $1 + + +. - - 0 +. 6$ B C рассмотрим эквивалентную ей теорему $1 - - -. - - 0 +. 6$ B C. Если $x(b) > y(b)$ или $x(b) = y(b)$ и $x'(b) \leq y'(b)$, то $H_1s = H_1x = h_1$ и $H_2s = H_2x = h_2$. Следовательно, $s'(b) < \beta'(b)$, $H_1s = h_1$, $H_2s = h_2$ и существование z следует из теоремы Tb07t. $1 - - -. - - 0\ 1. 6$. Пусть $x(b) < y(b)$ или $x(b) = y(b)$ и $x'(b) > y'(b)$. Если $x'(b) \leq y'(b)$, то $H_1s \leq H_1x = h_1$ и $H_2s \leq H_2y = h_2$. Следовательно, $s'(b) < \beta'(b)$, $H_1s \leq h_1$, $H_2s \leq h_2$ и существование z следует из теоремы Tb07t. Пусть $x'(b) > y'(b)$. Тогда существует решение v краевой задачи

$$(\varphi(t, v, v'))' = f(t, v, v'), \quad v(a) = x(a), \quad v'(b) = x'(b), \quad s \leq v \leq \beta \tag{9}$$

по теореме Tb02. $1 - - 0. - 1\ 0 +$. Из $H_1v \leq H_1x = h_1$ и $H_2v \leq H_2x = h_2$ следует $v'(b) < \beta'(b)$, $H_1v \leq h_1$, $H_2v \leq h_2$ и существование z следует из теоремы Tb07t.

Рассмотрим теорему TM_g123. $1 + + +. 1 - - +. 1$ B C. Если $H_2\beta = h_2$, то $z = \beta$. Если $\alpha'(b) \geq \beta'(b)$, то $h_2 \geq H_2\alpha \geq H_2\beta \geq h_2$. Следовательно, $H_2\alpha = H_2\beta = h_2$ и $z = \beta$. Пусть $H_2\beta > h_2$ и $\alpha'(b) < \beta'(b)$. Из монотонностей для H_2 следуют неравенства $x'(b) < \beta'(b)$ и $y'(b) < \beta'(b)$. Вместо теоремы $1 + + +. 1 - - +. 1\ 6$ B C рассмотрим эквивалентную ей теорему $1 - - -. 1 - - +. 1\ 6$ B C. Если $x(b) > y(b)$ или $x(b) = y(b)$ и $x'(b) \leq y'(b)$, то $H_1s = H_1x = h_1$ и $H_2s = H_2x = h_2$. Следовательно, $s'(b) < \beta'(b)$, $H_1s = h_1$, $H_2s = h_2$ и существование z следует из теоремы Tb10H. $1 - - -. 1 - - 1. 1\ 6$. Пусть $x(b) < y(b)$ или $x(b) = y(b)$ и $x'(b) > y'(b)$. Если $x'(b) \leq y'(b)$, то $H_1s \leq H_1x = h_1$ и $H_2s \leq H_2y = h_2$. Следовательно, $s'(b) < \beta'(b)$, $H_1s \leq h_1$, $H_2s \leq h_2$ и существование z следует из теоремы Tb10H. Пусть $x'(b) > y'(b)$. Тогда существует решение v краевой задачи (9). Из $H_1v \leq H_1x = h_1$ и $H_2v \leq H_2x = h_2$ следует $v'(b) < \beta'(b)$, $H_1v \leq h_1$, $H_2v \leq h_2$ и существование z следует из теоремы Tb10H.

Рассмотрим теоремы TM_g142. $1\ 0\ 0\ 0. - 1 + +. 3\ 9$ B C, TM_g144. $1\ 0\ 0\ 0. - 1 + +. 4\ 9$ B C. Из $H_1u = H_1x = h_1$ и $H_2u \leq H_2y = h_2$ следует $H_1u = h_1$, $H_2u \leq h_2$ и существование z следует из теоремы Tb26. $1 - - -. - 1 + +. 9$ A B.

Рассмотрим теоремы TM_g143. $+ + + +. - - + +. 3\ 9$ B C, TM_g145. $+ + + +. - - + +. 4\ 9$ B C. Докажем эквивалентную им теорему $- - - -. - - + +. 3$ V $4\ 9$ B C. Из $H_1u \leq H_1x = h_1$ и $H_2u \leq H_2y = h_2$ следует $H_1u \leq h_1$, $H_2u \leq h_2$ и существование z следует из теоремы Tb26. $1 - - -. - 1 + +. 9$ A B.

Список литературы

[1] Л.А.Лепин, Краевые задачи с максимальным решением при условиях 1-D, LU MII Zinātniskie raksti, 6, Rīga, 2006, 35-43.

[2] Л.А.Лепин, Отсутствие максимального решения у краевых задач при условиях 1-D, LU MII Zinātniskie raksti, 7, Rīga, 2007, 25-52.

[3] A.Ja.Lepin, L.A.Lepin and F.Zh.Sadyrbaev, Two-point boundary conditions for φ-Laplasian equations, Functional differential equations, V.12, 2005, № 3-4, 347-363.

L.Lepin. Boundary value problems for φ-Laplacian equation with a maximal solution.

Summary. Boundary value problems are sought for φ-Laplacian equation which have maximal solutions.

MSC 34B99

L.Lepins. Robežproblēmas ar maksimālo atrisinājumu φ-Laplasian diferenciālvienādojumam.

Anotācija. φ-Laplasian diferenciālvienādojumam tiek meklētās robežproblēmas ar maksimālo atrisinājumu.

Institute of Mathematics
and Computer Science,
University of Latvia
Riga, Rainis blvd 29

Received 12.03.2008