Существование решения краевой задачи с функциональными граничными условиями

А.Я. Лепин, Л.А. Лепин

Аннотация. Указаны условия существования решения краевой задачи

$$x'' = f(t,x,x'), \quad p(x) + x'(0) = 0, \quad Hx = 0.$$

УДК 517.927

В работе [1] для краевой задачи

$$x'' = g(t,x,x') + h(t,x,x'), \quad t \in I = [0,1],$$

$$p\,x(0) + x'(0) = 0, \quad x(1) = \alpha x(\eta), \quad p \in R, \quad \alpha \le 0, \quad 0 < \eta < 1,$$

при выполнении условий

$$x' g(t,x,x') \le 0,$$

$$\mid h(t,x,x') \mid \le \alpha(t) \mid x \mid + b(t) \mid x' \mid + u(t) \mid x \mid^r + v(t) \mid x' \mid^k, \quad 0 \le r, \quad k < 1,$$

$$(\mid p \mid + a_1)\exp(b_1) < 1, \quad a_1 = \|a\| = \int_0^1 \mid a(t) \mid dt, \quad b_1 = \|b\|,$$

доказано существование решения. Аналогичные краевые задачи рассматривались в работах [2] - [4]. Наша цель – рассмотреть более общую краевую задачу с функциональными граничными условиями и дать условия разрешимости краевой задачи в терминах функций a, b и $p_+ = \max\{0, p\}$ и норм a_1, b_1 и p_+.

Рассмотрим краевую задачу

$$x'' = f(t,x,x'), \quad p(x) + x'(0) = 0, \quad Hx = 0, \tag{1}$$

где функция $f : I \times R^2 \to R$ удовлетворяет условиям Каратеодори и $p, H \in C(C^1(I,R),R)$. Будем предполагать, что выполняются следующие условия.

1. Найдутся $a, b, c, d \in L(I, [0, +\infty))$ такие, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $e \in L(I, [0, +\infty))$ такое, что

$$\begin{aligned} f(t, x, x') \geq -(\alpha(t) + \varepsilon c(t))x \quad &+ (b(t) + \varepsilon d(t))x' - e(t), \\ &(t, x, x') \in I \times [0, +\infty) \times (-\infty, 0], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(t, x, x') \leq -(\alpha(t) + \varepsilon c(t))x \quad &+ (b(t) + \varepsilon d(t))x' + e(t), \\ &(t, x, x') \in I \times (-\infty, 0] \times [0, +\infty). \end{aligned}$$

2. Любое решение задачи Коши

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(\tau) = N, \quad x'(\tau) = \nu, \quad \tau \in [0, 1], \quad N, \nu \in R$$

продолжимо на интервал $[0, 1]$.

3. Найдутся $p_0 \in C(R, [0, +\infty))$ и $p_+, q \in [0, +\infty)$ такие, что для любого $x \in C^1(I, R)$

$$p_0(x(0)) \geq p(x) \geq p_+ x(0) - q, \quad x(0) \leq 0,$$

$$-p_0(x(0)) \leq p(x) \leq p_+ x(0) + q, \quad x(0) \geq 0.$$

4. Найдется $N_1 > 0$ такое, что для любого $x \in C^1(I, R)$ из $x > N_1$ следует $Hx > 0$ и из $x < -N_1$ следует $Hx < 0$.

Теорема 1 *Если решение задачи Коши*

$$y'' = -a(t)y + b(t)y', \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -p_+ \tag{2}$$

положительно, то существует решение краевой задачи (1).

Для доказательства потребуется следующая теорема (см. [5] - [7]), в которой указаны условия разрешимости краевой задачи

$$x'' = f(t, x, x'), \quad H_1 x = h_1, \quad H_2 x = h_2, \quad \alpha \leq x \leq \beta, \tag{3}$$

где $H_1, H_2 \in C(C^1(I, R), R)$, $h_1, h_2 \in R$, α – нижняя функция, β – верхняя функция и $\alpha \leq \beta$.

Теорема 2 *Если выполняется условие (2) и для любого решения $x : I \to R$ уравнения $x'' = f(t, x, x')$ из $\alpha \leq x \leq \beta$ следует справедливость условий*

$$x(a) = \alpha(a) \wedge x(b) = \alpha(b) \Rightarrow H_1 x \leq h_1 \vee H_2 x \leq h_2, \tag{4}$$

$$x(a) = \alpha(a) \wedge H_2 x = h_2 \Rightarrow H_1 x \leq h_1, \tag{5}$$

$$x(a) = \alpha(a) \wedge x(b) = \beta(b) \Rightarrow H_1 x \leq h_1 \vee H_2 x \geq h_2, \tag{6}$$

$$x(b) = \beta(b) \wedge H_1 x = h_1 \Rightarrow H_2 x \geq h_2, \tag{7}$$

$$x(a) = \beta(a) \wedge x(b) = \beta(b) \Rightarrow H_1 x \geq h_1 \vee H_2 x \geq h_2, \tag{8}$$

$$x(a) = \beta(a) \wedge H_2 x = h_2 \Rightarrow H_1 x \geq h_1, \tag{9}$$

$$x(a) = \beta(a) \wedge x(b) = \alpha(b) \Rightarrow H_1 x \geq h_1 \vee H_2 x \leq h_2, \tag{10}$$

$$x(b) = \alpha(b) \wedge H_1 x = h_1 \Rightarrow H_2 x \leq h_2, \tag{11}$$

то существует решение краевой задачи (3).

Доказательство теоремы 1. Пусть $H_1x = Hx$, $H_2x = p(x)+x'(0)$ и $h_1 = h_2 = 0$. Нужно определить α, β и проверить справедливость условий (4) - (11).

Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы при $e \in L(I,[0,+\infty))$ и $\|e\| \le \varepsilon$ решение $y_\varepsilon : I \to R$ задачи Коши

$$y'' = -(a(t)+\varepsilon c(t))y + (b(t)+\varepsilon d(t))y' - e(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -p_+ - \varepsilon$$

было положительно и удовлетворяло неравенству $y_\varepsilon(1) > y(1)/2$. Из условия 1 по ε находим e. Пусть

$$N_1 = \max\{2N_1/y(1), \varepsilon^{-1}q, \varepsilon^{-1}\|e\|\} + 1,$$

x_N – решение задачи Коши

$$x'' = f(t,x,x'), \quad x(0) = N, \quad x'(0) = \nu \tag{12}$$

при $N \ge N_2$ и $\nu \ge -p_+N - q$, y_* – решение задачи Коши

$$\begin{gathered} y''_+ = -(a(t)+\varepsilon c(t))y_* + (b(t)+\varepsilon d(t))y'_* - e(t)/(N_2-1), \\ y_*(0) = 1, \quad y'_*(0) = -p_+ - \varepsilon \end{gathered} \tag{13}$$

и $z = x'_N y_* - y'_* x_N$. Покажем, что справедливо неравенство $z \ge 0$. Действительно, $z(0) = x'_N(0)y_*(0) - y'_*(0)x_N(0) = \nu + (p_+ + \varepsilon)N \ge -p_+N - q + p_+N + \varepsilon N > 0$. Пусть

$$t_1 = \sup\{t \in I : (\forall \tau \in [0,t])(z(\tau) \ge 0)\}.$$

Заметим, что из $z \ge 0$ на интервале $[0,t_1]$ следует $x'_N/x_N \ge y'_* y_*$. Откуда $(\ln x_N)' \ge (\ln y_*)'$. Интегрируя от 0 до t, имеем $\ln x_N(t) - \ln x_N(0) \ge \ln y_*(t) - \ln y_*(0)$. Следовательно, $x_N(t)/x_N(0) \ge y_*(t)/y_*(0)$ или $x_N(t) \ge Ny_*(t)$. Если $t_1 = 1$, то $z \ge 0$. Пусть $t_1 \in (0,1)$. Если $x'_N(t_1) \ge 0$, то $z(t_1) = x'_N(t_1)y_*(t_1) - y'_*(t_1)x_N(t_1) > 0$, что противоречит определению t_1. Если $x'_N(t_1) < 0$, то пусть $t_2 \in (t_1,1)$ такое, что $x'_N(t) < 0$ и $x_N(t) > (N-1)y_*(t)$ для $t \in (t_1,t_2)$. Тогда на интервале $[t_1,t_2]$

$$x''_N = f(t,x_N,x'_N) \ge -(a(t)+\varepsilon c(t))x_N + (b(t)+\varepsilon d(t))x'_N - e(t). \tag{14}$$

Умножая неравенство (14) на y_*, уравнение (13) на x_N и вычитая, получим

$$\begin{aligned} x''_N y_* - y''_* x_N &\ge (b(t)+\varepsilon d(t))(x'_N y_* - y'_* x_N) - e(t)y_* + e(t)x_N/(N_2-1) \\ &\ge (b(t)+\varepsilon d(t))z. \end{aligned}$$

Из $z(t_1) = 0$ и

$$x''_N y_* - y''_* x_N = (x'_N y_* - y'_* x_N)' = z' \ge (b(t)+\varepsilon d(t))z$$

по теореме сравнения для дифференциальных неравенств первого порядка получаем неравенство $z(t) \ge 0$, $t \in [t_1,t_2]$, что противоречит определению t_1. Из $z \ge 0$ аналогично предыдущему получаем $x_N \ge Ny_*$. Следовательно, $x_N \ge Ny_* > 2N_1y_*/y(1) > N_1$. Аналогично для решения $x_{N\tau}$ задачи Коши

$$x'' = f(t,x,x'), \quad x(\tau) = N, \quad x'(\tau) = 0 \tag{15}$$

при $\tau \in (0,1)$ и $N > N_2$ получаем оценку $x_{N\tau}(t) > N_1$, $t \in [\tau, 1]$. Если рассмотреть задачу Коши (12) при $N \leq -N_2$ и $\nu \leq -p_+N + q$, то аналогично предыдущему получим оценку $x_N < -N_1$ и для решения задачи Коши (15) при $N \leq -N_2$ получаем оценку $x_{N\tau} < -N_1$, $t \in [\tau, 1]$. Из условия 2 следует существование $N_3 > N_2$ такого, что решения задач Коши (12) при $-N_2 \leq N \leq 0$, $p_0(N) \leq \nu \leq -p_+N + q$ и $0 \leq N \leq N_2$, $-p_+N - q \leq \nu \leq p_0(N)$ и решения задач Коши (15) при $\tau \in (0,1)$, $-N_2 \leq N \leq N_2$ удовлетворяют условиям $\mid x_N(1) \mid < N_3$ и $\mid x_{N\tau}(1) \mid < N_3$. Пусть $N_4 = 2N_3/y(1)$, $\alpha = x_{-N_4}$ и $\beta = x_{N_4}$, где x_{-N_4} и x_{N_4} – решения задачи Коши (12) при $\nu = 0$. Ясно, что $\alpha < -N_3$ и $\beta > N_3$.

Проверим справедливость условия (8). Из $x(0) = \beta(0)$ и $x(1) = \beta(1)$ следует $x > N_2 > N_1$. Следовательно, $H_1x = Hx > 0$. Проверим справедливость условия (9). Из $x(0) = \beta(0)$ и $H_2x = p(x) + x'(0) = 0$ следует $x > N_3 > N_1$. Следовательно, $H_1x = Hx > 0$. Проверим справедливость условия (10). Из $x(0) = \beta(0)$ и $x(1) = \alpha(1)$ следует $H_2x = p(x) + x'(0) < 0$. Действительно, из $x(0) = \beta(0)$ и $p(x) + x'(0) \geq 0$ следует $x > N_3$. Проверим справедливость условия (11). Пусть $x(1) = \alpha(1)$ и $H_1x = Hx = 0$. Рассмотрим случай $x(0) \geq N_2$. Если $H_2x = p(x)+x'(0) \geq 0$, то $x > N_1$ и $H_1x = Hx > 0$. Следовательно, $H_2x = p(x) + x'(0) < 0$. Рассмотрим случай $-N_2 < x(0) < N_2$. Если $H_2x = p(x) + x'(0) \geq 0$, то $x(1) > -N_3$. Следовательно, $H_2x = p(x) + x'(0) < -0$. Рассмотрим случай $x(0) < -N_2$. Ясно, что $x < -N_2 < -N_1$. Следовательно, $H_1x = Hx < 0$. Условия (4) - (7) проверяются аналогично.

Пример 1. Покажем, что условие $-p_0(x(0)) \leq p(x)$ при $x(0) \geq 0$ нельзя отбросить. Рассмотрим краевую задачу

$$x'' = 0, \quad -\max\{0, x(0)\}\max\{0, x(1)\} + x'(0) = 0, \quad x(0) - 1 = 0.$$

Ясно, что эта краевая задача не имеет решения.

Пример 2. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{gathered} x'' = -a(t)\max\{0, x\} + b(t)\min\{0, x'\}, \\ p_+\max\{0, x(0)\} + x'(0) = 0, \quad x(1) - 1 = 0. \end{gathered} \tag{16}$$

Если найдется $\tau \in (0,1]$ такое, что $y(\tau) = 0$, где y – решение задачи Коши (2), то краевая задача (16) не имеет решения.

Теорема 3 *Если $(p_+ + a_1)\exp(b_1) < 1$, то существует решение краевой задачи (1).*

Доказательство. По теореме 1 достаточно доказать, что решение y задачи Коши (2) положительно. Предположим противное. Пусть $\tau \in (0,1]$ такое, что $y(t) > 0$ для $t \in [0,\tau)$ и $y(\tau) = 0$. Из $y'' = -a(t)y + b(t)y'$ следует $y'' \geq b(t)y' - a(t)$ для $t \in [0,\tau]$. Рассмотрим задачу Коши

$$z' = b(t)z - a(t), \quad z(0) = -p_+. \tag{17}$$

Из теоремы сравнения для дифференциальных неравенств первого порядка следует неравенство $y'(t) \geq z(t)$, $t \in [0,\tau]$. Для задачи Коши (17) решение имеет вид

$$z(t) = -p_+\exp(\int_0^t b(s)ds) - \int_0^t a(s)\exp(\int_s^t b(\xi)d\xi)ds. \tag{18}$$

Из (18) следует оценка $y'(t) \geq z(t) \geq -(p_+ + a_1)\exp(b_1)$, $t \in [0,\tau]$. Следовательно, $y(\tau) \geq 1 - \tau(p_+ + a_1)\exp(b_1) > 0$.

Замечание. Можно показать, что в условии 4 вместо строгих неравенств $Hx > 0$ и $Hx < 0$ можно потребовать $Hx \geq 0$ и $Hx \leq 0$.

Список литературы

[1] W. Feng, Solutions and positive solutions fore some three-point boundary value problems, Dynamical systems and differential equations, Supplement volume, AIMS, 2003, 263-272.

[2] W. Feng, J.R.L. Webb, Solvability of m-point boundary value problems with nonlinear growth, J. Math. Anal. Appl., 212 (1997), 467-480.

[3] C.P. Gupta, A second order m-point boundary value problem at resonance, Nonlinear Analysis: TMA, 24 (1995), 1483-1489.

[4] C.P. Gupta, S.K. Ntouyas, P.Ch. Tsamatos, On an m-point boundary value problem for second-order differential equations, Nonlinear Analysis: TMA, 23 (1994), 1427-1436.

[5] А.Я. Лепин, Л.А. Лепин, Разрешимость краевых задач между верхней и нижней функциями, LU Zinātniskie raksti, 616, Rīga, 1999, 55-121.

[6] А.Я. Лепин, Л.А. Лепин, Разрешимость краевых задач между верхней и нижней функциями. II, LU MII Zinātniskie raksti, 1, Rīga, 2000, 29-79.

[7] А.Я. Лепин, Существование решений краевых задач для уравнения второго порядка, Дифференц.уравнения, т.26, N 10, 1990, 1729-1737.

A.Lepin, L.Lepin. Existence of solutions to a boundary value problem with functional boundary conditions

Summary. The conditions are given for solvability of a boundary value problem

$$x'' = f(t,x,x'), \quad p(x) + x'(0) = 0, \quad Hx = 0.$$

1991 MSC 34B99

A.Lepins, L.Lepins. Robežproblēmas ar funkcionāliem robežnosacījumiem atrisināmība

Anotācija. Doti robežproblēmas

$$x'' = f(t,x,x'), \quad p(x) + x'(0) = 0, \quad Hx = 0$$

atrisināmības nosacījumi.

Institute of Mathematics
and Computer Science,
University of Latvia
Riga, Rainis blvd 29

Received 22.05.2008