Существование решения одной краевой задачи с функциональным граничным условием

А.Я. Лепин

Аннотация. Указаны условия существования решения краевой задачи

$$x'' = f(t,x,x'), \quad p(x(0)) + x'(0) = 0, \quad Hx = 0.$$

УДК 517.927

В работе [1] для краевой задачи

$$x'' = g(t,x,x') + h(t,x,x'), \quad t \in I = [0,1],$$

$$p\,x(0) + x'(0) = 0, \quad x(1) = \alpha x(\eta), \quad p \in R, \quad \alpha \le 0, \quad 0 < \eta < 1,$$

при выполнении условий

$$x' g(t,x,x') \le 0,$$

$$\mid h(t,x,x') \mid \le \alpha(t) \mid x \mid + b(t) \mid x' \mid + u(t) \mid x \mid^r + v(t) \mid x' \mid^k + c(t), \quad 0 \le r,$$

$$k < 1, \quad (\mid p \mid + a_1) e^{b_1} < 1, \quad \alpha_1 = \|a\|_1 = \int_0^1 \mid a(t) \mid dt, \quad b_1 = \|b\|_1$$

доказано существование решения. Аналогичные краевые задачи рассматривались в работах [2] - [4]. Наша цель - рассмотреть более общую краевую задачу с функциональным граничным условием и дать условия разрешимости краевой задачи в терминах функций a, b и $p_+ = \max\{0,p\}$ и норм a_1, b_1 и p_+. Рассмотрим краевую задачу

$$x'' = f(t,x,x'), \quad p(x(0)) + x'(0) = 0, \quad Hx = 0, \tag{1}$$

где функция $f : I \times R^2 \to R$ удовлетворяет условиям Каратеодори, $p \in C(R,R)$ и $H \in C(C^1(I,R),R)$. Будем предполагать, что выполняются следующие условия.

1. Найдутся $a,b,c,d \in L_1(I,[0,+\infty))$ такие, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $e \in L_1(I,[0,+\infty))$ такое, что

$$\begin{aligned} f(t,x,x') \ge -(a(t) + \varepsilon c(t))x \quad &+ (b(t) + \varepsilon d(t))x' - e(t), \\ &(t,x,x') \in I \times [0,+\infty) \times (-\infty,0], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(t,x,x') \leq -(a(t)+\varepsilon c(t))x \quad &+(b(t)+\varepsilon d(t))x' + e(t), \\ &(t,x,x') \in I \times (-\infty,0] \times ([0,+\infty). \end{aligned}$$

2. Любое решение x_N задачи Коши

$$x'' = f(t,x,x'), \quad x(0) = N, \quad x'(0) = -p(N), \quad N \in R \tag{2}$$

продолжимо на весь интервал I.

3. Найдутся $p_+, q \in [0,+\infty)$ такие, что

$$p(x) \geq p_+x - q, \quad x \leq 0, \quad p(x) \leq p_+x + q, \quad x \geq 0.$$

4. Найдется $N_* > 0$ такое, что для любого $x \in C^1(I,R)$ из $x > N_*$ следует $Hx \geq 0$ и из $x < -N_*$ следует $Hx \leq 0$.

Теорема 1 *Если решение y задачи Коши*

$$y'' = -a(t)y + b(t)y', \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -p_+ \tag{3}$$

положительно, то существует решение краевой задачи (1).

Доказательство. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы при $e_\varepsilon \in L_1(I,[0,+\infty))$, $\|e_\varepsilon\| \leq \varepsilon$ решение $y_\varepsilon : I \to R$ задачи Коши

$$y'' = -(a(t)+\varepsilon c(t))y + (b(t)+\varepsilon d(t))y' - e_\varepsilon(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -p_+ - \varepsilon$$

было положительно и удовлетворяло неравенству $y_\varepsilon(1) > y(1)/2$. Из условия 1 по ε находим $e(t)$. Пусть

$$N_1 = \max\{2N_*/y(1), \varepsilon^{-1}q, \varepsilon^{-1}\|e\|_1\} + 1,$$

x_{N_1} – решение задачи Коши (2) при $N = N_1$, y_* – решение задачи Коши

$$\begin{aligned} y_*'' \quad &= -(a(t)+\varepsilon c(t))y_* + (b(t)+\varepsilon d(t))y_*' - e(t)/(N_1-1), \\ &y_*(0) = 1, \quad y_*'(0) = -p_+ - \varepsilon \end{aligned} \tag{4}$$

и $z = x_{N_1}'y_* - y_*'x_{N_1}$. Покажем, что справедливо неравенство $z \geq 0$. Действительно, $z(0) = x_{N_1}'(0)y_*(0) - y_*'(0)x_{N_1}(0) \geq -p_+N_1 - q + (p_+ + \varepsilon)N_1 > 0$. Пусть

$$t_1 = \sup\{t \in I : (\forall \tau \in [0,t])(z(\tau) \geq 0)\}.$$

Заметим, что из $z \geq 0$ на интервале $[0,t_1]$ следует $x_{N_1}'/x_{N_1} \geq y_*'/y_*$. Откуда $(\ln x_{N_1})' \geq (\ln y_*)'$. Интегрируя от 0 до t, имеем $\ln x_{N_1}(t) - \ln x_{N_1}(0) \geq \ln y_*(t) - \ln y_*(0)$. Следовательно, $x_{N_1}(t)/x_{N_1}(0) \geq y_*(t)/y_*(0)$ или $x_{N_1}(t) \geq N_1 y_*(t)$. Если $t_1 = 1$, то $z \geq 0$. Пусть $t_1 \in (0,1)$. Если $x_{N_1}'(t_1) \geq 0$, то $z(t_1) = x_{N_1}(t_1)y_*(t_1) - y_*'(t_1)x_{N_1}(t_1) > 0$, что противоречит определению t_1. Если $x_{N_1}'(t_1) < 0$, то пусть $t_2 \in (t_1,1)$ такое, что $x_{N_1}'(t) < 0$ и $x_{N_1}(t) > (N_1-1)y_*(t)$ для $t \in (t_1,t_2)$. Тогда на интервале $[t_1,t_2]$

$$x_{N_1}'' = f(t,x_{N_1},x_{N_1}) \geq -(a(t)+\varepsilon c(t))x_{N_1} + (b(t)+\varepsilon d(t))x_{N_1}' - e(t). \tag{5}$$

Умножая неравенство (5) на y_*, уравнение (4) – на x_{N_1} и вычитая, получаем

$$\begin{aligned} x''_{N_1}y_* - y''_* x_{N_1} \geq (b(t)+\varepsilon d(t))(x'_{N_1}y_* - y'_* x_{N_1}) - e(t)y_* \quad &+ e(t)x_{N_1}/(N_1-1) \\ &\geq (b(t)+\varepsilon d(t))z. \end{aligned}$$

Из $z(t_1) = 0$ и

$$x''_{N_1}y_* - y''_* x_{N_1} = (x'_{N_1}y_* - y'_* x_{N_1})' = z' \geq (b(t)+\varepsilon d(t))z$$

по теореме сравнения для дифференциальных неравенств первого порядка получаем неравенство $z(t) \geq 0$, $t \in [t_1, t_2]$, что противоречит определению t_1. Из $z \geq 0$ аналогично предыдущему получаем $x_{N_1} \geq N_1 y_*$. Следовательно, $x_{N_1} \geq N_1 y_* > 2N_* y_*/y(1) \geq N_*$. Аналогично для решения x_{-N_1} задачи Коши (2) при $N = -N_1$ получаем неравенство $x_{-N_1} < -N_*$. Следовательно, $Hx_{N_1} \geq 0$ и $Hx_{-N_1} \leq 0$. Множество решений x_N задач Коши (2) при $N \in [-N_1, N_1]$ связно. Следовательно, найдутся $N_0 \in [-N_1, N_1]$ и решение x_{N_0} задачи Коши (2) при $N = N_0$ такие, что $Hx_{N_0} = 0$. Ясно, что x_{N_0} является решением краевой задачи (1).

Пример 1. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{gathered} x'' = -a(t) \mid x \mid - b(t) \mid x' \mid + \min\{0, -2x'^3\}, \\ p_+ x(0) + x'(0) = 0, \quad x(1) - 1 = 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Если найдется $\tau \in (0,1]$ такое, что $y(\tau) = 0$, где y – решение задачи Коши (3), то краевая задача (6) не имеет решения.

Теорема 2 *Если $(p_+ + a_1)e^{b_1} < 1$, то существует решение краевой задачи (1).*

Доказательство. По теореме 1, достаточно доказать, что решение y задачи Коши (3) положительно. Из $y'' = -a(t)y + b(t)y'$ и $y \geq 0$ следует $y'' \geq b(t)y' - a(t)$. Рассмотрим задачу Коши

$$z' = b(t)z - a(t), \quad z(0) = -p_+. \tag{7}$$

Из теоремы сравнения для дифференциальных неравенств первого порядка следует неравенство $y' \geq z$. Для задачи Коши (7) решение имеет вид

$$z(t) = -p_+ \exp(\int_0^t b(s)ds) - \int_0^t a(s)\exp(\int_s^t b(\theta)d\theta)ds. \tag{8}$$

Из (8) следует оценка $y' \geq z \geq -(p_+ + a_1)e^{b_1}$. Следовательно, $y(t) \geq 1 - t(p_+ + a_1)e^{b_1} > 0$, $t \in I$.

Аналогично доказательству теоремы 2 можно доказать следующий результат.

Теорема 3 *Если $(p_+ + a_1)e^{b_1} = 1$ и $a_1 + b_1 > 0$, то существует решение краевой задачи (1).*

Пример 2. Рассмотрим краевую задачу

$$x'' = f_\sigma(t, x, x'), \quad p_+ x(0) + x'(0) = 0, \quad x(1) - 1 = 0, \tag{9}$$

где $\sigma \in (0, 1/3)$ и

$$f_\sigma(t,x,x') = \min\{0, -a_1\sigma^{-1}x\} + \min\{0, -2\sigma^{-1}x'^3\}, \quad (t,x,x') \in [0,\sigma) \times R^2,$$
$$f_\sigma(t,x,x') = \min\{0, b_1\sigma^{-1}x'\}, \quad (t,x,x') \in [\sigma, 2\sigma) \times R^2,$$
$$f_\sigma(t,x,x') = 0, \quad (t,x,x') \in [2\sigma, 1] \times R^2.$$

Если $(p_+ + a_1)e^{b_1} = 1$ и $a_1 = b_1 = 0$, то краевая задача (9) не имеет решения.

Если $(p_+ + a_1)e^{b_1} > 1$, то при достаточно малом σ краевая задача (9) не имеет решения.

Список литературы

[1] W. Feng, Solutions and positiv solutions for some three-point boundary value problems, Dynamical systems and differential equations, AIMS, 2003, 263-272.

[2] W. Feng, J.R.L. Webb, Solvability of m-point boundary value problems with nonlinear growth, J. Math. Anal. Appl., 212 (1997), 467-480.

[3] C.P. Gupta, A second order m-point boundary value problem at resonance, Nonlinear Analysis: TMA, 24 (1995), 1483-1489.

[4] C.P. Gupta, S.K. Ntouyas, P.Ch. Tsamatos, On an m-point boundary value problem for second-order differential equations, Nonlinear Analysis: TMA, 23 (1994), 1427-1436.

A.Ya. Lepin. Existence of a solution of some boundary value problem with functional boundary condition.

Summary. The conditions are given for solvability of the boundary value problem

$$x'' = f(t,x,x'), \quad p(x(0)) + x'(0) = 0, \quad Hx = 0.$$

MSC 34B99

A. Lepins. Par vienas robežproblēmas ar funkcionālo robežnosacījumu atrisināmību.

Anotācija. Noradīti atrisinājuma eksistences nosacījumi robežproblēmai

$$x'' = f(t,x,x'), \quad p(x(0)) + x'(0) = 0, \quad Hx = 0.$$

Institute of Mathematics
and Computer Science,
University of Latvia
Riga, Rainis blvd 29

Received 04.12.2006