# Об одной краевой задаче для ОДУ четвертого порядка

Ю.А. Клоков

**Аннотация.** Указаны достаточные условия существования решения краевой задачи

$$x'''' = f(t, x, x', x'', x''')$$

$$x(0) = x'(0) = x(\tau) = x'(\tau) = 0,$$

УДК 517.927.4

Эта статья является продолжением работ [1] – [5], посвященных краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка.

Рассмотрим задачу

$$x'''' = f(t, x, x', x'', x'''), \tag{1}$$

$$x(0) = x'(0) = x(\tau) = x'(\tau) = 0, \tag{2}$$

где

$$f \in C(I \times R^4), \quad I = [0, \tau], \quad I_0 = (0, \tau).$$

Под решением понимается функция $x(t) \in C^4(I)$.

**Теорема.** Пусть

$$\begin{array}{l} f \leq H(t), \quad 0 \leq x \leq N_0, \quad |x'| \leq N_1, f \geq -H(t), \quad -N_0 \leq x \leq 0, \quad |x'| \leq N_1 \\ N_0 = \frac{\tau^3}{48} \int\limits_0^\tau H(s)ds, \quad N_1 = \frac{4}{\tau} N_0, \quad H \in C(I), \quad H(t) \geq 0, \quad \forall t \in I, \end{array} \tag{3}$$

где неравенства (3) выполняются для $\forall t \in I$ и $\forall (x'', x''') \in R^2$. Предположим далее, что для любого $N_0 > 0, \quad N_1 > 0$ существует $B > 0$ такое, что

$$|f(t, x, x', x'', x''')| \leq B(1 + |x''|^5 + |x'''|^{\frac{5}{3}}) \tag{4}$$

для $|x| \leq N_0, \quad |x'| \leq N_1$, и $\forall (t, x'', x''') \in (I \times R^2)$. Тогда решение задачи (1), (2) существует. Для доказательства теоремы нам понадобится

**Лемма.** Пусть $x(t), \quad t \in I,$ есть решение уравнения (1), для которого выполняется условие (4) и, кроме того, $\int\limits_0^\tau x''^2(t)dt < M$ (для некоторого $M > 0$).

Тогда существует постоянная $N > 0$ такая, что

$$|x''(t)| \leq N, \quad |x'''(t)| \leq N, \quad \forall t \in I, \tag{5}$$

причем постоянная $N$ зависит только от постоянных $N_0, N_1, M, B$. Эта лемма является частным случаем теоремы 2, доказанной в работе [6].

Заметим, что в условии (4) показатели степеней 5 и $\frac{5}{3}$ являются точными и не могут быть увеличены.

**Доказательство теоремы.** Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$x'''' = f(t, \delta(-N_0, x, N_0), \delta(-N_1, x', N_1), \delta(-N, x'', N), \delta(-N, x''', N), \tag{6}$$

где $N$ постоянная, определенная в лемме неравенством (5) в предположении, что $M = \frac{\tau^3}{48}(\int\limits_0^\tau H(s)ds)^2$, и $\delta(p, x, q), \quad p, x, q \in C(R^3)$, определена условиями $\delta(p, x, q) = p, \quad x \leq p, \quad \delta(p, x, q) = x, \quad p \leq x \leq q, \delta(p, x, q) = q, \quad x \geq q$. Правая часть уравнения (6) ограничена и поэтому решение задачи (6), (2) существует (см. [7], стр.23 - 27). Обозначим его через $x(t), \quad t \in I$. Установим априорные оценки для этого решения и его производных. Умножая (6) на $x(t)$, и учитывая (3), найдем

$$xx'''' \leq |x|H(t), \quad \forall t \in I. \tag{7}$$

Дважды интегрируя (7) от $t = 0$ до $t = \tau$ и учитывая (2), найдем

$$\int\limits_0^\tau x''^2(t)dt \leq \int\limits_0^\tau |x(t)| \cdot H(t)dt. \tag{8}$$

Пусть $G(t, s) \leq 0, \quad (t, s) \in [0, \tau]^2$ есть функция Грина для задачи $z'' = 0, \quad z(0) = z(\tau) = 0$, так что

$$G(t, s) = -\tau^{-1}(\tau - t)s, \quad t \geq s, \qquad G(t, s) = -\tau^{-1}t(\tau - s), \quad t \leq s. \tag{9}$$

Тогда

$$x(t) = \int\limits_0^\tau G(t, s)x''(s)ds \tag{10}$$

Используя неравенство Гельдера из (10), (8), найдем

$$x^2(t) = (\int\limits_0^\tau G(t, s)x''(s)ds)^2 \leq \int\limits_0^\tau G^2(t, s)ds \int\limits_0^\tau x''^2(s)ds \leq \int\limits_0^\tau G^2(t, s)ds \int\limits_0^\tau |x(s)|H(s)ds \tag{11}$$

Далее легко проверяется неравенство

$$\int\limits_0^\tau G^2(t,s)ds = \frac{t^2(\tau-t)^2}{3\tau} \le \frac{\tau^3}{48}, \quad \forall t \in I. \tag{12}$$

Пусть $t_0 \in I_0$ есть точка максимума для $|x(t)|$. Из (11), (12) следует

$$|x(t_0)| \le \frac{\tau^3}{48} \int\limits_0^\tau H(s)ds, \tag{13}$$

а из (11), (12), (13) находим

$$x^2(t) \le \frac{t^2(\tau-t)^2}{3\tau} \cdot \frac{\tau^3}{48} \left( \int\limits_0^\tau H(s)ds \right)^2$$

или

$$|x(t)| \le \frac{\tau t(\tau-t)}{12} \int\limits_0^\tau H(s)ds \le \frac{\tau^3}{48} \int\limits_0^\tau H(s)ds = N_0. \tag{14}$$

Из (14) и (8) находим

$$\int\limits_0^\tau x''^2(t)dt \le M := \frac{\tau^3}{48} \left( \int\limits_0^\tau H(s)ds \right)^2. \tag{15}$$

Из (10) и (9), используя неравенство Гельдера, находим

$$\begin{aligned} |x'(t)| &= \left| \left( \int\limits_0^t \tfrac{s(\tau-t)}{\tau} x''(s)ds + \int\limits_t^\tau \tfrac{t(\tau-s)}{\tau} x''(s)ds \right)'_t \right| \le \\ &\le \int\limits_0^t \tfrac{s}{\tau} |x''(s)|ds + \int\limits_t^\tau \tfrac{\tau-s}{\tau} |x''(s)|ds \le \\ &\le \left[ \left( \int\limits_0^t \tfrac{s^2}{\tau^2} ds \right)^{\frac12} + \left( \int\limits_t^\tau (\tfrac{\tau-s}{\tau})^2 ds \right)^{\frac12} \right] \left( \int\limits_0^\tau x''^2(s)ds \right)^{\frac12}; \end{aligned}$$

Откуда и из (15) следует

$$|x'(t)| \le (\frac{\tau}{3})^{\frac12} M^{\frac12} = \frac{\tau^2}{12} \int\limits_0^\tau H(s)ds = \frac{4}{\tau} N_0 = N_1. \tag{16}$$

Так как $x(t)$ и $x'(t)$ удовлетворяют оценкам (14) и (16), то из леммы следуют оценки (5). При выполнении этих оценок решение задачи (6), (2) совпадает с решением задачи (1), (2). Тем самым теорема доказана.

## Литература

1. Беспалова С.А., Клоков Ю.А. //Дифференциальные уравнения. 1989. т. 25. Nr. 4. стр. 573 - 578.

2. Беспалова С.А., Клоков Ю.А. //Дифференциальные уравнения. 1990. т. 26. Nr. 6. стр. 931 - 933.

3. Беспалова С.А., Клоков Ю.А. //Дифференциальные уравнения. 1992. т. 28. Nr. 9. стр. 1484 – 1490.

4. Клоков Ю.А. //LU zinatniskie raksti.Diferencialvienadojumi. 1995, s. 599, lpp. 25 - 29.

5. Клоков Ю.А. //Дифференциальные уравнения. 1987. т. 23. Nr. 4. стр. 611 - 618.

6. Клоков Ю.А. //LU zinatniskie raksti.Diferencialvienadojumi. 2004. s. 4, lpp. 30 - 34.

7. Васильев Н.Н.,Клоков Ю.А. Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. Рига, "Зинатне", 1978.

**Yu.A. Klokov. On some boundary value problem for the fourth order ordinary differential equations.**

**Summary.** Sufficient conditions for existence of a solution to the Dirihlet problem

$$x'''' = f(t, x, x', x'', x'''),$$

$$x(0) = x'(0) = x(\tau) = x'(\tau) = 0$$

are given.

MSC 34B99

**J.A. Klokovs. Par vienu ceturtās kārtas robežproblēmu.**

Noradīti atrisinājuma eksistences pietiekamie nosacījumi ceturtās kārtas robežproblēmai

$$x'''' = f(t, x, x', x'', x'''),$$

$$x(0) = x'(0) = x(\tau) = x'(\tau) = 0.$$

Institute of Mathematics
and Computer Science,
University of Latvia
Riga, Rainis blvd 29

Received 07.11.2006