О единственности решения краевых задач для системы двух дифференциальных уравнений первого порядка с линейными граничными условиями, III

В.Д.Пономарев

Аннотация. Доказываются теоремы единственности решения краевой задачи

$$x' = h(t, x, y), \quad y' = f(t, x, y),$$

$$a_1x(a) + a_2x(b) + a_3y(a) + a_4y(b) + a_5 = 0,$$

$$b_1x(a) + b_2x(b) + b_3y(a) + b_4y(b) + b_5 = 0.$$

УДК 517.927

Рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений

$$x' = h(t, x, y), \quad y' = f(t, x, y), \tag{1}$$

со следующими линейными краевыми условиями:

$$\begin{aligned} L_1 = a_1x(a) + a_2x(b) + a_3y(a) + a_4y(b) + a_5 = 0, \\ L_2 = b_1x(a) + b_2x(b) + b_3y(a) + b_4y(b) + b_5 = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где функции $h, f : I \times R^2 \to R$, $I = [a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$, удовлетворяют условию Каратеодори [1], $a_i, b_i \in R$, $i = 1, ..., 5$. Положим $\Delta_{ij} = a_ib_j - a_jb_i$, где $i, j \in \{1, ..., 4\}$. Очевидно $\Delta_{ij} = -\Delta_{ji}$. Непосредственной подстановкой проверяется справедливость равенства:

$$\Delta_{12}\Delta_{34} + \Delta_{13}\Delta_{42} + \Delta_{14}\Delta_{23} = 0. \tag{3}$$

Ниже будут приведены достаточные условия единственности решения краевой задачи (1)-(2), обобщающие соответствующие результаты из работ [2]-[3]. Настоящая работа является продолжением работы [6], [7].

В дальнейшем нам потребуются следующие условия и теорема.

M_1) $h(t, x, y)$ строго возрастает по $y \in R$ при фиксированных $(t, x) \in I \times R$;

M_2) $h(t, x, y)$ возрастает по $y \in R$ при фиксированных $(t, x) \in I \times R$;

M_3) $f(t, x, y)$ строго возрастает по $x \in R$ при фиксированных $(t, y) \in I \times R$;

$M_4)$ $f(t,x,y)$ возрастает по $x \in R$ при фиксированных $(t,y) \in I \times R$.

Для любого $M \in (0,\infty)$ найдутся $k_i \in L(I)$, $i = 1,...,8$ такие, что для любых $(t,x_1,x_2,y_1,y_2) \in I \times [-M,M]^4$ выполняются условия

$E_1)$ $h(t,x_1,y_1) - h(t,x_2,y_1) \le K_1(t)(x_1 - x_2), \quad x_1 \ge x_2;$

$E_2)$ $h(t,x_1,y_1) - h(t,x_2,y_1) \le K_2(t)(x_1 - x_2), \quad x_1 \le x_2;$

$E_3)$ $h(t,x_1,y_1) - h(t,x_2,y_1) \ge K_3(t)(x_1 - x_2), \quad x_1 \ge x_2;$

$E_4)$ $h(t,x_1,y_1) - h(t,x_2,y_1) \ge K_4(t)(x_1 - x_2), \quad x_1 \le x_2;$

$E_5)$ $f(t,x_1,y_1) - f(t,x_1,y_2) \le K_5(t)(y_1 - y_2), \quad y_1 \ge y_2;$

$E_6)$ $f(t,x_1,y_1) - f(t,x_1,y_2) \le K_6(t)(y_1 - y_2), \quad y_1 \le y_2;$

$E_7)$ $f(t,x_1,y_1) - f(t,x_1,y_2) \ge K_7(t)(y_1 - y_2), \quad y_1 \ge y_2;$

$E_8)$ $f(t,x_1,y_1) - f(t,x_1,y_2) \ge K_8(t)(y_1 - y_2), \quad y_1 \le y_2.$

Пусть $(x_1(t), y_1(t))$, $(x_2(t), y_2(t))$, $t \in I$ – решения теоремы (1).

$A_1)$ Для любого $t_0 \in [a,b)$ из $x_1(t_0) = x_2(t_0)$ и $y_1(t_0) > y_2(t_0)$ следует $x_1(b) > x_2(b)$ и $y_1(b) \ge y_2(b)$;

$A_2)$ для любого $t_0 \in (a,b]$ из $x_1(t_0) = x_2(t_0)$ и $y_1(t_0) < y_2(t_0)$ следует $x_1(a) > x_2(a)$ и $y_1(a) < y_2(a)$;

$A_3)$ для любого $t_0 \in [a,b)$ из $x_1(t_0) = x_2(t_0)$ и $y_1(t_0) > y_2(t_0)$ следует $x_1(b) > x_2(b)$ и $y_1(b) > y_2(b)$;

$A_4)$ для любого $t_0 \in (a,b]$ из $x_1(t_0) = x_2(t_0)$ и $y_1(t_0) < y_2(t_0)$ следует $x_1(a) > x_2(a)$ и $y_1(a) \le y_2(a)$;

$A_5)$ для любого $t_0 \in [a,b)$ из $x_1(t_0) > x_2(t_0)$ и $y_1(t_0) = y_2(t_0)$ следует $x_1(b) \ge x_2(b)$ и $y_1(b) > y_2(b)$;

$A_6)$ для любого $t_0 \in (a,b]$ из $x_1(t_0) > x_2(t_0)$ и $y_1(t_0) = y_2(t_0)$ следует $x_1(a) > x_2(a)$ и $y_1(a) < y_2(a)$;

$A_7)$ для любого $t_0 \in [a,b)$ из $x_1(t_0) > x_2(t_0)$ и $y_1(t_0) = y_2(t_0)$ следует $x_1(b) > x_2(b)$ и $y_1(b) > y_2(b)$;

$A_8)$ для любого $t_0 \in (a,b]$ из $x_1(t_0) > x_2(t_0)$ и $y_1(t_0) = y_2(t_0)$ следует $x_1(a) \ge x_2(a)$ и $y_1(a) < y_2(a)$;

$A_9)$ для любого $t_0 \in [a,b]$ из $x_1(t_0) > x_2(t_0)$ и $y_1(t_0) < y_2(t_0)$ следует $x_1(a) > x_2(a)$ и $y_1(a) < y_2(a)$;

$A_{10})$ для любого $t_0 \in [a,b]$ из $x_1(t_0) > x_2(t_0)$ и $y_1(t_0) > y_2(t_0)$ следует $x_1(b) > x_2(b)$ и $y_1(b) > y_2(b)$;

$A_{11})$ для любого $t_0 \in [a,b]$ из $x_1(t_0) \ge x_2(t_0)$ и $y_1(t_0) > y_2(t_0)$ следует $x_1(b) \ge x_2(b)$ и $y_1(b) > y_2(b)$;

$A_{12})$ для любого $t_0 \in [a,b]$ из $x_1(t_0) > x_2(t_0)$ и $y_1(t_0) \le y_2(t_0)$ следует $x_1(a) > x_2(a)$ и $y_1(a) \le y_2(a)$;

$A_{13})$ для любого $t_0 \in [a,b]$ из $x_1(t_0) > x_2(t_0)$ и $y_1(t_0) \ge y_2(t_0)$ следует $x_1(b) > x_2(b)$ и $y_1(b) \ge y_2(b)$;

$A_{14})$ для любого $t_0 \in [a,b]$ из $x_1(t_0) \ge x_2(t_0)$ и $y_1(t_0) < y_2(t_0)$ следует $x_1(a) \ge x_2(a)$ и $y_1(a) < y_2(a)$;

$A_{15})$ для любого $t_0 \in (a,b]$ из $x_1(t_0) < x_2(t_0)$ и $y_1(t_0) = y_2(t_0)$ следует $x_1(a) < x_2(a)$ и $y_1(a) > y_2(a)$;

$A_{16})$ для любого $t_0 \in (a,b]$ из $x_1(t_0) = x_2(t_0)$ и $y_1(t_0) > y_2(t_0)$ следует $x_1(a) < x_2(a)$ и $y_1(a) > y_2(a)$;

$A_{17})$ для любого $t_0 \in (a,b]$ из $x_1(t_0) < x_2(t_0)$ и $y_1(t_0) = y_2(t_0)$ следует $x_1(a) \le x_2(a)$ и $y_1(a) > y_2(a)$;

A_{18}) для любого $t_0 \in [a,b]$ из $x_1(t_0) = x_2(t_0)$ и $y_1(t_0) > y_2(t_0)$ следует $x_1(a) < x_2(a)$ и $y_1(a) \geq y_2(a)$;

A_{19}) для любого $t_0 \in [a,b]$ из $x_1(t_0) < x_2(t_0)$ и $y_1(t_0) > y_2(t_0)$ следует $x_1(a) < x_2(a)$ и $y_1(a) > y_2(a)$;

A_{20}) для любого $t_0 \in [a,b]$ из $x_1(t_0) \leq x_2(t_0)$ и $y_1(t_0) > y_2(t_0)$ следует $x_1(a) \leq x_2(a)$ и $y_1(a) > y_2(a)$;

A_{21}) для любого $t_0 \in [a,b]$ из $x_1(t_0) < x_2(t_0)$ и $y_1(t_0) \geq y_2(t_0)$ следует $x_1(a) < x_2(a)$ и $y_1(a) \geq y_2(a)$.

Теорема 1. Пусть $(x_1(t), y_1(t))$, $(x_2(t), y_2(t))$, $t \in I$ – решения системы (1). Тогда из условий

1) M_1, M_4, E_3, E_4, E_8 следует A_1;
2) M_1, M_4, E_1, E_2, E_6 следует A_2;
3) M_1, M_4, E_3, E_4, E_7 следует A_3;
4) M_1, M_4, E_1, E_2, E_7 следует A_4;
5) M_2, M_3, E_4, E_7, E_8 следует A_5;
6) M_2, M_3, E_1, E_7, E_8 следует A_6;
7) M_2, M_3, E_3, E_7, E_8 следует A_7;
8) M_2, M_3, E_2, E_7, E_8 следует A_8;
9) M_2, M_4, E_1, E_8 следует A_9;
10) M_2, M_4, E_3, E_7 следует A_{10};
11) M_2, M_3, E_4, E_7 следует A_{11};
12) M_2, M_4, E_1, E_7 следует A_{12};
13) M_2, M_4, E_3, E_8 следует A_{13};
14) M_2, M_4, E_2, E_8 следует A_{14};
15) M_2, M_3, E_2, E_5, E_8 следует A_{15};
16) M_1, M_4, E_3, E_4, E_5 следует A_{16};
17) M_2, M_3, E_3, E_5, E_6 следует A_{17};
18) M_1, M_4, E_1, E_4, E_6 следует A_{18};
19) M_2, M_4, E_4, E_5 следует A_{19};
20) M_2, M_3, E_3, E_5 следует A_{20};
21) M_2, M_4, E_4, E_6 следует A_{21}.

Доказательство теоремы дано в [4].

Приведем теорему в терминах поведения решений системы (1) (A_1-A_{21}), дающих достаточные условия единственности решения краевой задачи (1)-(2).

Теорема 2. Пусть выполняются условия $(A_1 \vee A_3 \vee A_{16} \vee A_{20}) \wedge (A_1 \vee A_9 \vee A_{12} \vee A_{14}) \wedge (A_2 \vee A_{14}) \wedge (A_5 \vee A_7) \wedge (A_6 \vee A_7 \vee A_8 \vee A_{13}) \wedge (A_9 \vee A_{12} \vee A_{14}) \wedge (A_9 \vee A_{14}) \wedge (A_{10} \vee A_{13})$, $\Delta_{23} \neq 0$, $\varepsilon\Delta_{12} \geq 0$, $\varepsilon\Delta_{13} \geq 0$, $\varepsilon\Delta_{24} \geq 0$, $\varepsilon\Delta_{43} \geq 0$, где $\varepsilon = sign\,\Delta_{23}$. Тогда краевая задача (1)-(2) не может иметь более одного решения.

Доказательство. Предположим, что краевая задача (1)-(2) имеет два решения: $(x_1(t), y_1(t))$ и $(x_2(t), y_2(t))$. Тогда функции

$$u(t) = x_1(t) - x_2(t), \quad v(t) = y_1(t) - y_2(t)$$

удовлетворяют следующим краевым условиям:

$$\begin{aligned} a_1 u(a) + a_2 u(b) + a_3 v(a) + a_4 v(b) = 0, \\ b_1 u(a) + b_2 u(b) + b_3 v(a) + b_4 v(b) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Из системы (4) имеем

$$u(b) = \frac{\Delta_{31}u(a) + \Delta_{34}v(b)}{\Delta_{23}}, \tag{5}$$

$$v(a) = \frac{\Delta_{12}u(a) + \Delta_{42}v(b)}{\Delta_{23}}. \tag{6}$$

Рассмотрим следующие соотношения:
1) $\Delta_{31}^2 + \Delta_{34}^2 = 0$, $\Delta_{12}^2 + \Delta_{42}^2 = 0$;
2) $\Delta_{31}^2 + \Delta_{34}^2 \neq 0$, $\Delta_{12}^2 + \Delta_{42}^2 = 0$;
3) $\Delta_{31}^2 + \Delta_{34}^2 = 0$, $\Delta_{12}^2 + \Delta_{42}^2 \neq 0$;
4) $\Delta_{31}^2 + \Delta_{34}^2 \neq 0$, $\Delta_{12}^2 + \Delta_{42}^2 \neq 0$.

Из соотношения 1 имеем $u(b) = v(a) = 0$, что в силу теоремы 4 из работы [5] дает $u(t) = v(t) = 0$ для любых $t \in I$. Доказательство для соотношений 2-4 проходит аналогично. Разберем, например, последнее. Для этого рассмотрим следующие случаи:
a) $\Delta_{31} = 0$, $\Delta_{34} \neq 0$, $\Delta_{12} \neq 0$, $\Delta_{42} = 0$;
b) $\Delta_{31} = 0$, $\Delta_{34} \neq 0$, $\Delta_{12} = 0$, $\Delta_{42} \neq 0$;
c) $\Delta_{31} = 0$, $\Delta_{34} \neq 0$, $\Delta_{12} \neq 0$, $\Delta_{42} \neq 0$;
d) $\Delta_{31} \neq 0$, $\Delta_{34} = 0$, $\Delta_{12} \neq 0$, $\Delta_{42} = 0$;
e) $\Delta_{31} = 0$, $\Delta_{34} = 0$, $\Delta_{12} = 0$, $\Delta_{42} \neq 0$;
f) $\Delta_{31} \neq 0$, $\Delta_{34} = 0$, $\Delta_{12} \neq 0$, $\Delta_{42} = 0$;
g) $\Delta_{31} \neq 0$, $\Delta_{34} \neq 0$, $\Delta_{12} \neq 0$, $\Delta_{42} = 0$;
h) $\Delta_{31} \neq 0$, $\Delta_{34} \neq 0$, $\Delta_{12} = 0$, $\Delta_{42} \neq 0$;
i) $\Delta_{31} \neq 0$, $\Delta_{34} \neq 0$, $\Delta_{12} \neq 0$, $\Delta_{42} \neq 0$.

Предположим, что $\varepsilon = 1$(случай $\varepsilon = -1$ рассматривается аналогично). Тогда $\Delta_{23} > 0$, $\Delta_{12} \geq 0$, $\Delta_{13} \geq 0$, $\Delta_{24} \geq 0$, $\Delta_{43} \geq 0$. Из соотношения

$$\Delta_{14} \cdot \Delta_{23} = \Delta_{12} \cdot \Delta_{43} + \Delta_{13} \cdot \Delta_{24}$$

следует, что $\Delta_{14} \geq 0$. Заметим, что для случаев a), c), g), h), i) $\Delta_{14} > 0$, а для случаев b), d), e), f) $\Delta_{14} = 0$.

Рассмотрим случай i)(остальные разбираются аналогично). Из (5), (6) имеем

$$u(b) = \frac{\Delta_{34}}{\Delta_{23}}(v(b) + \frac{\Delta_{31}}{\Delta_{34}}u(a)), \tag{7}$$

$$v(a) = \frac{\Delta_{42}}{\Delta_{23}}(v(b) + \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{42}}u(a)). \tag{8}$$

Не теряя общности, считаем $v(a) \geq 0$. Для случая i) имеем

$$\Delta_{23} > 0, \quad \Delta_{12} > 0, \quad \Delta_{13} > 0, \quad \Delta_{24} > 0, \quad \Delta_{43} > 0. \tag{9}$$

Из (3) и (9) получаем

$$\Delta_{12} \cdot \Delta_{43} + \Delta_{13} \cdot \Delta_{24} > 0,$$

$$\frac{\Delta_{31}}{\Delta_{34}} - \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{42}} > 0. \tag{10}$$

Так как $v(a) \geq 0$, то из (8) и (9) имеем

$$v(b) + \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{42}} u(a) \leq 0.$$

Рассмотрим два случая

I. Пусть

$$v(b) + \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{42}} u(a) < 0. \tag{11}$$

Из (8) и (9) имеем $v(a) > 0$. Пусть $u(a) > 0$. Тогда, используя $A_{10} \vee A_{11} \vee A_{13}$, получаем $u(b) \geq 0$ и $v(b) \geq 0$. Из (7), с учетом $u(a) > 0$ и $v(b) \geq 0$, получаем $u(b) < 0$, что противоречиво. Пусть $u(a) = 0$. Тогда из (7) и (8) имеем

$$v(a) = \frac{\Delta_{42}}{\Delta_{23}} v(b),$$

$$u(b) = \frac{\Delta_{34}}{\Delta_{23}} v(b).$$

Отсюда получаем

$$u(a) = 0, \quad v(a) > 0, \quad u(b) > 0, \quad v(b) < 0.$$

Из $A_1 \vee A_9 \vee A_{21} \vee A_{14}$ получаем противоречие.

Пусть $u(a) < 0$. Тогда из (11) имеем $v(b) < 0$. В зависимости от знака $u(b)$ рассмотрим три случая:

1) $u(a) < 0$, $v(a) > 0$, $u(b) = 0$, $v(b) < 0$;

2) $u(a) < 0$, $v(a) > 0$, $u(b) < 0$, $v(b) < 0$;

3) $u(a) < 0$, $v(a) > 0$, $u(b) > 0$, $v(b) < 0$.

В случае 1) имеем из (7)

$$v(b) + \frac{\Delta_{31}}{\Delta_{34}} u(a) = 0,$$

что противоречит (11).

В случае 2) из (7) имеем

$$0 > u(b) = \frac{\Delta_{34}}{\Delta_{23}} (v(b) + \frac{\Delta_{31}}{\Delta_{34}} u(a)) > 0.$$

Случай 3) из-за выполнения условий $A_9 \vee A_{12} \vee A_{14}$ невозможен.

II. Рассмотрим случай

$$v(b) + \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{42}} u(a) = 0. \tag{12}$$

В силу (8) получаем $v(a) = 0$ и знаки $v(b)$ и $u(a)$ совпадают.

Подставляя (12) в (7), получим

$$u(b) = \frac{\Delta_{34}}{\Delta_{23}} (\frac{\Delta_{31}}{\Delta_{34}} - \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{42}}) u(a).$$

Следовательно, из (10) знаки $u(a)$ и $u(b)$ противоположны, и возможны только следующие случаи:

1) $u(a) > 0$, $v(a) = 0$, $u(b) < 0$, $v(b) > 0$;
2) $u(a) < 0$, $v(a) = 0$, $u(b) > 0$, $v(b) < 0$;
3) $u(a) = 0$, $v(a) = 0$, $u(b) = 0$, $v(b) = 0$.

В силу условий $A_5 \vee A_7 \vee A_{13} \vee A_{19} \vee A_{20} \vee A_{21}$ невозможны соотношения 1). Случай 2) невозможен в силу условий $A_9 \vee A_{12} \vee A_{14}$. Теорема 4 из работы [5] дает $u(t) = v(t) = 0$ для любых $t \in [a, b]$.

Итак, предположение о том, что краевая задача (1)-(2) имеет два различных решения, приводит к противоречию во всех возможных случаях, а поэтому краевая задача (1)-(2) может иметь не более одного решения. Теорема доказана.

Сформулируем теорему 2 в терминах условий $M_1 - M_4$, $E_1 - E_8$.

Теорема 3. Пусть выполняются условия M_2, M_3, E_2, E_3, E_5, E_7, E_8 и

$$\Delta_{23} \neq 0, \quad \varepsilon\Delta_{12} \geq 0, \quad \varepsilon\Delta_{13} \geq 0, \quad \varepsilon\Delta_{24} \geq 0, \varepsilon\Delta_{43} \geq 0,$$

где $\varepsilon = sign\, \Delta_{23}$. Тогда краевая задача (1)-(2) не может иметь более одного решения.

Справедливость этой теоремы следует из теорем 1, 2.

Список литературы

[1] Э.А. Коддингтон, Н. Левинсон. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1953, 474 с.

[2] В.В. Гудков, Ю.А. Клоков, А.Я. Лепин, В.Д. Пономарев. Двухточечные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Рига: Зинатне, 1978, 183 с.

[3] В.Д. Пономарев. О единственности решения некоторых краевых задач для системы двух дифференциальных уравнений первого порядка // Латв.мат.ежегодник. Рига: Зинатне, 1974, вып.14, 157-176.

[4] V. Ponomarev. On the behavior or solutions of a system of two first order ordinary differential equations // Latv.Univ.Zinātn.Raksti. Matemātika. Diferenciālvienādojumi. 1997, v.605, 14-25.

[5] В.Д. Пономарев. О единственности решения краевых задач для системы двух дифференциальных уравнений первого порядка // Matemātika. Diferenciālvienādojumi: zinātniskie raksti. 1.sējums. Rīga: LU MII, 2000, 80-85.

[6] В.Д. Пономарев. О единственности решения краевых задач для системы двух дифференциальных уравнений первого порядка с линейными граничными условиями, I // Matemātika. Diferenciālvienādojumi: zinātniskie raksti. 4.sējums. Rīga: LU MII, 2000, 73-80.

[7] В.Д. Пономарев. О единственности решения краевых задач для системы двух дифференциальных уравнений первого порядка с линейными граничными условиями, II // Matemātika. Diferenciālvienādojumi: zinātniskie raksti. 5.sējums. Rīga: LU MII, 2005, 88-94.

V.Ponomarev. About uniqueness of a solution of boundary value problems for a system of two first-order differential equations with linear boundary conditions, III.

Summary. Theorems on uniqueness of a solution of the boundary value problems

$$x' = h(t, x, y), \quad y' = f(t, x, y),$$

$$a_1 x(a) + a_2 x(b) + a_3 y(a) + a_4 y(b) + a_5 = 0,$$
$$b_1 x(a) + b_2 x(b) + b_3 y(a) + b_4 y(b) + b_5 = 0$$

are proved in the paper.

1991 MSC 34B99

V. Ponomarevs. Par robežproblēmu atrisinājuma unitāti divu pirmās kārtas parasto diferenciālvienādojumu sistēmai ar lineāriem robežnosacījumiem, III.

Anotācija. Pierādītas unitātes teorēmas robežproblēmai

$$x' = h(t, x, y), \quad y' = f(t, x, y),$$

$$a_1 x(a) + a_2 x(b) + a_3 y(a) + a_4 y(b) + a_5 = 0,$$
$$b_1 x(a) + b_2 x(b) + b_3 y(a) + b_4 y(b) + b_5 = 0.$$

Institute of Mathematics
and Computer Science,
University of Latvia
Riga, Rainis blvd 29

Received 17.01.2006