Об одной сингулярной краевой задаче

Н.И.Васильев, А.Я.Лепин

Аннотация. Для дифференциального уравнения второго порядка с особенностью доказывается существование решения краевой задачи.

УДК 517.927

В работе [1] рассматривалась следующая сингулярная краевая задача:

$$\begin{gathered} y'' + q(t)f(t,y) = 0, \quad 0 < t < 1, \\ y(0) = y'(1) + \psi(y(1)) = 0, \end{gathered} \tag{1}$$

частным случаем которой является краевая задача из теории мембран (см.[1]-[2]):

$$\begin{gathered} y'' + (\frac{t^2}{32y^2} - \frac{\lambda^2}{8}) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad \lambda > 0, \\ y(0) = 0, \quad 2y'(1) - (1+v)y(1) = 0, \quad 0 < v < 1. \end{gathered} \tag{2}$$

Наша цель - рассмотреть более общую краевую задачу

$$x'' = f(t,x,x'), \quad t \in [0,1] = I, \tag{3}$$

$$x(0) = 0, \quad Hx = 0, \quad \alpha \le x \le \beta, \tag{4}$$

где $f : I \times (0,+\infty) \times R \to R$ удовлетворяет условиям Каратеодори: $f(\cdot,x,y)$ измерима на I при фиксированных $(x,y) \in (0,+\infty) \times R$, $f(t,\cdot,\cdot)$ непрерывна на $(0,+\infty) \times R$ при фиксированном $t \in I$ и для любого компактного множества $P \in (0,+\infty) \times R$ найдется функция $g \in L_1(I,R)$ такая, что для всех $(t,x,y) \in I \times P$ справедливо неравенство $\mid f(t,x,y) \mid \le g(t)$, H – непрерывный функционал, а $\alpha \in C(I,R)$ и $\beta \in C((0,1],R)$ – нижняя и верхняя функции, удовлетворяющие условиям: $\alpha(0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ для $t \in (0,1]$, β – ограниченная функция, $\alpha \le \beta$, для любого $a \in (0,1)$ функции α и β удовлетворяют условию Липшица на $[a,1]$ и для любых $t_1 \in (0,1)$ и $t_2 \in (t_1,1)$ из существования производных $\alpha'(t_1)$, $\alpha'(t_2)$, $\beta'(t_1)$ и $\beta'(t_2)$ следуют неравенства

$$\alpha'(t_2) - \alpha'(t_1) \ge \int_{t_1}^{t_2} f(t,\alpha(t),\alpha'(t))dt,$$

$$\beta'(t_2) - \beta'(t_1) \le \int_{t_1}^{t_2} f(t, \beta(t), \beta'(t))dt.$$

Непрерывность H понимается в следующем смысле. Пусть последовательность функций $x_i \in C(I, R)$, $i = 1, 2, ...$, лежащих между α и β, такая, что на интервале $(0, 1]$ x_i непрерывно дифференцируемы, x_i сходятся в норме C к функции $x \in C(I, R)$, которая непрерывно дифференцируема на интервале $(0, 1]$, и для любого $a \in (0, 1)$ x_i сходятся к x в норме C^1 на интервале $[a, 1]$. Тогда $\lim_{i\to\infty} Hx_i = Hx$.

Определение 1. Функция $x \in C(I, R)$, лежащая между α и β, называется решением уравнения (3) при $x(0) = 0$, если на интервале $(0, 1]$ она является решением уравнения (3).

Далее понадобятся следующие условия.

1. Пусть $a \in [0, 1)$ и $b \in (a, 1]$. Для любого решения $x : (a, b) \to R$ уравнения (3), лежащего между α и β, из $\lim_{t\to a+} x(t) > 0$ следует неравенство

$$\sup\{\mid x'(t) \mid: t \in (a, b)\} < +\infty.$$

2. Для любого решения $x : I \to R$ уравнения (3), лежащего между α и β, из $x(0) = 0$ и $x(1) = \alpha(1)$ следует $Hx \le 0$, а из $x(0) = 0$ и $x(1) = \beta(1)$ следует $Hx \ge 0$.

Теорема 1. Если справедливы условия 1 и 2, то краевая задача (3)-(4) имеет решение, лежащее между α и β.

Доказательство. Рассмотрим случай $\alpha(1) = \beta(1)$. Ясно, что решение x задачи Дирихле

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(0) = 0, \quad x(1) = \alpha(1), \quad \alpha(t) \le x(t) \le \beta(t), \quad t \in (0, 1] \tag{5}$$

является решением краевой задачи (3)-(4), так как из условия 2 следует $Hx = 0$. Покажем существование решения задачи Дирихле (5). Пусть монотонная последовательность $a_i \in (0, 1)$, $i = 1, 2, ...$ такая, что $\lim_{i\to\infty} a_i = 0$, а $x_i : [a_i, 1] \to R$ – решение задачи Дирихле

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(a_i) = \alpha(a_i), \quad x(1) = \alpha(1), \quad \alpha(t) \le x(t) \le \beta(t), \quad t \in [a_i, 1].$$

Из последовательности x_i, $i = 1, 2, ...$ можно выбрать сходящуюся к решению $x : (0, 1] \to R$ уравнения (3) подпоследовательность. Действительно, на интервале $[a_1, 1]$ последовательность x_i компактна в норме C^1, что следует из условия 1 и условий Каратеодори. Следовательно, существует подпоследовательность x_{i1}, $i = 1, 2, ...$, которая сходится к решению $x : [a_1, 1] \to R$ уравнения (3) на интервале $[a_1, 1]$ в норме C^1. Аналогично на интервале $[a_2, 1]$ найдется подпоследовательность x_{i2}, $i = 1, 2, ...$ последовательности x_{i1}, которая сходится к решению $x : [a_2, 1] \to R$ уравнения (3) на интервале $[a_2, 1]$. Продолжая, получим подпоследовательности x_{ij}, $i = 1, 2, ...$, $j = 1, 2, ...$, которые сходятся на соответствующих интервалах к решению $x : (0, 1] \to R$ уравнения (3). Ясно, что последовательность x_{ii}, $i = 1, 2, ...$ сходится к решению $x : (0, 1] \to R$ уравнения (3) в норме C^1 на любом интервале $[a_i, 1]$. Для простоты обозначений будем считать, что исходная последовательность x_i сходится к x. Покажем, что $\lim_{t\to 0+} \inf x(t) = \lim_{t\to 0+} \sup x(t)$. Предположим противное:

$$\lim_{t\to 0+} \inf x(t) < c < d < \lim_{t\to 0+} \sup x(t). \tag{6}$$

Тогда найдется последовательность $b_i \in (0,1)$, $i = 1,2,...$ такая, что $\lim_{i\to\infty} b_i = 0$, $x(b_i) > d$ и $x'(b_i) = 0$. Из условия Каратеодори следует, что при b_i, достаточно близком к 0, справедливо неравенство $x(t) > c$, $t \in (0, b_i)$, что противоречит неравенствам (6). Существование $\lim_{t\to 0+} x(t) = x_0$ доказано. Доопределим решение x в 0 равенством $x(0) = x_0$. Ясно, что $x \in C(I,R)$. Покажем, что $x(0) = 0$. Предположим противное: $x(0) > 0$. Из условия 1 следует, что производная x' ограничена на $(0,1)$ и x – обычное решение. Пусть $a \in (0,1)$ такое, что $\alpha(t) < c = x(0)/2$, $t \in [0,a]$ и решения y задач Коши

$$y'' = f(t,y,y'), \quad y(a) = x(a), \quad y'(a) = x'(a) \tag{7}$$

удовлетворяют неравенству

$$y(t) > c, \quad t \in [0,a]. \tag{8}$$

Ясно, что для достаточно больших i справедливы неравенства $a_i < a$, $x_i(a) > c$ и $x_i(a_i) = \alpha(a_i) < c$. Для простоты будем считать, что эти неравенства выполняются для всех i. Тогда найдутся $b_i \in (a_i, a)$ такие, что $x_i(b_i) = c$ и $x_i(t) > c$, $t \in (b_i, a)$. Следовательно, найдется подпоследовательность, которая сходится к решению $y : [a,b] \to R$ задачи Коши (7) такому, что $y(b) = c$ и $y(t) \geq c$ для $t \in [b,a]$. Полученное противоречие с условием (8) доказывает, что $x(0) = 0$. Существование решения задачи Дирихле (5) доказано.

Рассмотрим случай $\alpha(1) < \beta(1)$ и для любого решения $x : I \to R$ уравнения (3), лежащего между α и β, из $x(0) = 0$ и $x(1) = \alpha(1)$ следует $Hx < 0$, а из $x(0) = 0$ и $x(1) = \beta(1)$ следует $Hx > 0$. Покажем, что найдется $b_0 \in (0,1)$ такое, что для любого $a \in (0, b_0)$ и для любого решения $x : [a,1] \to R$ задачи Дирихле

$$x'' = f(t,x,x'), \quad x(a) = \alpha(a), \quad x(1) = \alpha(1), \quad \alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t), \quad t \in [a,1]$$

справедливо неравенство $Hl_a x < 0$, где $l_a x(t) = x((t-a)(1-a)^{-1})$. Предположим противное. Тогда найдется последовательность $a_i \in (0,1)$, $i = 1,2,\ldots$ такая, что $\lim_{i\to+\infty} a_i = 0$ и существуют решения $x_i : [a_i,1] \to R$ задач Дирихле

$$x'' = f(t,x,x'), \quad x(a) = \alpha(a), \quad x(1) = \alpha(1), \quad \alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t), \quad t \in [a_i,1]$$

такие, что $Hl_{a_i} x_i \geq 0$. Аналогично предыдущему будем считать, что последовательность x_i сходится к решению $x : (0,1] \to R$ уравнения (3) и $\lim_{t\to 0+} x(t) = 0$. Пусть $x(0) = 0$. Тогда $x \in C(I,R)$. Для любого $a \in (0,1)$ последовательность x_i сходится к x на $[a,1]$ в норме C^1. Покажем, что последовательность x_i сходится к x на I в норме C. Для этого достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $x_i(t) < \varepsilon$ для $t \in (0,\delta) \cap [a_i, 1]$. Предположим противное. Тогда найдутся $\varepsilon > 0$ и последовательность $b_i \in (0,1)$, $i = 1,2,...$ такая, что $\lim_{i\to\infty} b_i = 0$ и справедливы условия $x_i(b_i) \geq \varepsilon$, $x_i'(b_i) = 0$ и $x_i(t) > \varepsilon/2 > \alpha(t)$ для $t \in [a_i, b_i]$, что противоречит условию $x_i(a_i) = \alpha(a_i)$. Следовательно, $\lim_{i\to\infty} Hl_{a_i} x_i = Hx \geq 0$, что противоречит нашему предположению. Аналогично доказывается, что при достаточно малом $b_0 \in (0,1)$ для любого $a \in (0,b_0)$ и любого решения $x : [a,1] \to R$ задачи Дирихле

$$x'' = f(t,x,x'), \quad x(a) = \alpha(a), \quad x(1) = \beta(1), \quad \alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t), \quad t \in [a,1]$$

справедливо неравенство $Hl_a x > 0$.

Далее понадобится следующая теорема.

Теорема 2 (см.[3]). Пусть $a \in (0,1)$, $b \in (a,1]$, H_1 и H_2 – непрерывные функционалы в C^1. Тогда краевая задача

$$x'' = f(t,x,x'), \quad H_1x = 0, \quad H_2x = 0, \quad \alpha(t) \le x(t) \le \beta(t), \quad t \in [a,b]$$

имеет решение, если для любого решения $x : [a,b] \to R$ уравнения (3), лежащего между α и β, справедливы условия

$$\begin{gathered} x(a) = \alpha(a) \wedge x(b) = \alpha(b) \Rightarrow H_1x \le 0 \vee H_2x \le 0, \\ x(a) = \alpha(a) \wedge H_2x = 0 \Rightarrow H_1x \le 0, \\ x(a) = \alpha(a) \wedge x(b) = \beta(b) \Rightarrow H_1x \le 0 \vee H_2x \ge 0, \\ x(b) = \beta(b) \wedge H_1x = 0 \Rightarrow H_2x \ge 0, \\ x(a) = \beta(a) \wedge x(b) = \beta(b) \Rightarrow H_1x \ge 0 \vee H_2x \ge 0, \\ x(a) = \beta(a) \wedge H_2x = 0 \Rightarrow H_1x \ge 0, \\ x(a) = \beta(a) \wedge x(b) = \alpha(b) \Rightarrow H_1x \ge 0 \vee H_2x \le 0, \\ x(b) = \alpha(b) \wedge H_1x = 0 \Rightarrow H_2x \le 0. \end{gathered} \tag{9}$$

Применим теорему 2 к краевой задаче

$$x'' = f(t,x,x'), \quad x(a) = \alpha(a), \quad Hl_ax = 0, \quad \alpha(t) \le x(t) \le \beta(t), \quad t \in [a,1] \tag{10}$$

при $a \in (0,b_0)$, $H_1x = x(a) - \alpha(a)$ и $H_2x = Hl_ax$. Ясно, что условия (9) выполняются. Следовательно, краевая задача (10) имеет решение x_a. Аналогично предыдущему находим последовательность решений x_{a_i}, $i = 1,2,...$, которая сходится к решению $x : I \to R$ уравнения (3). Ясно, что $x(0) = 0$ и из $Hl_{a_i}x_{a_i} = 0$ следует $Hx = 0$. Следовательно, краевая задача (3)-(4) в этом случае имеет решение.

Перейдем к рассмотрению случая $\alpha(1) < \beta(1)$. Пусть для $\varepsilon > 0$ $H_\varepsilon x = Hx + \varepsilon(2x(1) - \alpha(1) - \beta(1))$. Тогда краевая задача

$$x'' = f(t,x,x'), \quad x(0) = 0, \quad H_\varepsilon x = 0, \quad \alpha(t) \le x(t) \le \beta(t), \quad t \in (0,1]$$

по предыдущему имеет решение x_ε. Пусть $\varepsilon_i \in (0,1)$ такие, что $\lim_{i\to\infty} \varepsilon_i = 0$ и x_{ε_i} сходятся к решению $x : I \to R$ уравнения (3). Сходимость на I в норме C, а для любого интервала $[a,1]$, $a \in (0,1)$ сходимость в норме C^1. Из $\lim_{i\to\infty} H_{\varepsilon_i}x_{\varepsilon_i} = Hx = 0$ следует существование решения краевой задачи (3)-(4).

В работе [1] для краевой задачи (2) найдено $\alpha(t) = a(2\lambda)^{-1}t - bt^2$, где $a = \lambda(\lambda^2 + 8/\lambda)^{-1/2}$ и $b = a(2\lambda)^{-1}(1-v)(3-v)^{-1}$, и фактически найдено $\beta(t) = (2\lambda)^{-1}t + (2\lambda)^{-1}(1-v)(1+v)^{-1}$.

Список литературы

[1] D. O'Regan. Upper and lower solutions for singular problems arising in the theory of membrane response of a spherical cap, Nonlinear Analysis 47 (2001), 1163-1174.

[2] J. Baxley. A singular nonlinear boundary value problem: membrane response of a spherical cap, SIAM J.Appl.Math., 48(1988), 497-505.

[3] А. Лепин. Л. Лепин. Разрешимость краевых задач между верхней и нижней функциями II, LU MII zinā tniskie raksti, 1.sējums, 2000, 29-79.

N. Vasilyev, A. Lepin. On some singular boundary value problem.

Summary. Existence of a solution is proved for a second order differential equation with singularity.

1991 MSC 34B99

N. Vasiljevs, A. Lepins. Par vienu singulāro robežproblēmu.

Anotācija. Pieradīta otrās kārtas singulāras robežproblēmas atrisinamība.

Institute of Mathematics
and Computer Science,
University of Latvia
Riga, Rainis blvd 29

Received 09.03.2006