О некоторых краевых задачах для уравнения n-ного порядка

А.Я. Лепин, Л.А. Лепин

Аннотация. Для дифференциального уравнения n-ного порядка изучается разрешимость краевых задач при помощи верхних и нижних функций.

УДК 517.927

Для дифференциального уравнения

$$x^{(n)} = f(t, x), \quad t \in I = [a, b],$$

где $n \geq 2$, $f : I \times R \to R$ удовлетворяет условиям Каратеодори, рассмотрим следующую краевую задачу. Заданы n граничных условий вида $x^{(m)}(a) = A_m$ и $x^{(m)}(b) = B_m$. Примером такой задачи является

$$x^{(4)} = f(t, x), \quad t \in [0, 1], \quad x(0) = A_0, \quad x'(0) = A_1, \quad x(1) = B_0, \quad x'(1) = B_1$$

(см. [1]). Для $m \in \{0, ..., n-1\}$ пусть $a(m) = 1$, если есть граничное условие $x^{(m)}(a) = A_m$; $a(m) = 0$, если граничного условия $x^{(m)}(a) = A_m$ нет; $b(m) = 1$, если есть граничное условие $x^{(m)}(b) = B_m$ и $b(m) = 0$, если граничного условия $x^{(m)}(b) = B_m$ нет. Краевую задачу будем записывать так

$$\begin{gathered} x^{(n)} = f(t, x), \\ a(m) = 1 \Rightarrow x^{(m)}(a) = A_m, \quad m \in \{0, ..., n-1\}, \\ b(m) = 1 \Rightarrow x^{(m)}(b) = B_m, \quad m \in \{0, ..., n-1\}. \end{gathered} \tag{1}$$

Пусть $a_*(m) = \sum_{k=0}^{m} a(k)$, $a^*(m) = \sum_{k=m}^{n-1} a(k)$, $b_*(m) = \sum_{k=0}^{m} b(k)$ и $b^*(m) = \sum_{k=m}^{n-1} b(k)$. Далее понадобятся следующие условия:

$$a_*(m) + b_*(m) \geq m + 1, \quad m \in \{0, ..., n-2\}, \tag{2}$$

$$a_*(n-1) + b_*(n-1) = n. \tag{3}$$

Разрешимость краевой задачи (1) будем выводить из существования нижней и верхней функций α и β, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\begin{array}{l}\alpha,\beta\in AC^{n-1}(I,R),\quad \alpha\le\beta,\\ a(m)=1\wedge(-1)^{m+a_*(m-1)}=1\Rightarrow\alpha^{(m)}(a)\le A_m\le\beta^{(m)}(a),\quad m\in\{0,...,n-1\},\\ a(m)=1\wedge(-1)^{m+a_*(m-1)}=-1\Rightarrow\alpha^{(m)}(a)\ge A_m\ge\beta^{(m)}(a),\quad m\in\{0,...,n-1\},\\ b(m)=1\wedge(-1)^{b_*(m-1)}=1\Rightarrow\alpha^{(m)}(b)\le B_m\le\beta^{(m)}(b),\quad m\in\{0,...,n-1\},\\ b(m)=1\wedge(-1)^{b_*(m-1)}=-1\Rightarrow\alpha^{(m)}(b)\ge B_m\ge\beta^{(m)}(b),\quad m\in\{0,...,n-1\},\\ (\forall x\in AC^{n-1}(I,R))((-1)^{b_*(n-1)}(\alpha^{(n)}-f(t,\delta(\alpha,x,\beta)))\le 0),\\ (\forall x\in AC^{n-1}(I,R))((-1)^{b_*(n-1)}(\beta^{(n)}-f(t,\delta(\alpha,x,\beta)))\ge 0),\end{array}\tag{4}$$

где $a_*(-1)=b_*(-1)=0$, $\delta(u,v,w)=u$ при $v<u\le w$, $\delta(u,v,w)=v$ при $u\le v\le w$ и $\delta(u,v,w)=w$ при $u\le w<v$.

Теорема 1. Если выполняются условия (2) - (4), то краевая задача (1) имеет решение, лежащее между α и β.

Определение 1. Функционалы $K(v)$, $A(v)$ и $B(v)$ для $v\in C(I,R)$ определим следующим образом. $K(0)=A(0)=B(0)=0$. Если $v\ge 0$ и найдется $t\in I$ такое, что $v(t)>0$, то $K(v)=A(v)=B(v)=1$. Если $v\le 0$ и найдется $t\in I$ такое, что $v(t)<0$, то $K(v)=1$ и $A(v)=B(v)=-1$. Пусть $k\in\{2,3,...\}$ и $t_i\in I$, $i=1,...,k$ такие, что $t_1<...<t_k$ и $v(t_i)v(t_{i+1})<0$ для $i=1,...,k-1$. Такую последовательность будем называть альтернирующей, а k – длиной альтернирующей последовательности. Альтернирующая последовательность длины k называется максимальной, если любая другая альтернирующая последовательность имеет длину меньшую или равную k. Если $t_1<...<t_k$ – максимальная альтернирующая последовательность, то $K(v)=k$, $A(v)=sign\, v(t_1)$ и $B(v)=sign\, v(t_k)$.

Заметим, что $A(v)=B(v)(-1)^{K(v)+1}$ и $B(v)=A(v)(-1)^{K(v)+1}$.

Лемма 1 (см. [2]). Если $u\in AC^{n-1}(I,R)$, $u^{(n)}\ge 0$, справедливы условия (2) - (3) и

$$\begin{array}{c}a(m)=1\Rightarrow(-1)^{n-m+a^*(m)}u^{(m)}(a)\ge 0,\quad m\in\{0,...,n-1\},\\ b(m)=1\Rightarrow(-1)^{b^*(m)}u^{(m)}(b)\ge 0,\quad m\in\{0,...,n-1\},\end{array}\tag{5}$$

то $(-1)^{b^*(0)}u\ge 0$. Если дополнительно $a^*(0)>0$ и $b^*(b)>0$, то

$$u=0\vee(-1)^{b^*(0)}u(t)>0,\quad t\in(a,b).$$

Доказательство. Покажем, что для $m\in\{0,...,n-1\}$

$$\begin{array}{ll}K(u^{(m)}) & \le n-m+1-a^*(m)-b^*(m),\\ K(u^{(m)}) & =n-m+1-a^*(m)-b^*(m)\\ & \Rightarrow A(u^{(m)})=(-1)^{n-m+a^*(m)}\wedge B(u^{(m)})=(-1)^{b^*(m)}.\end{array}\tag{6}$$

Заметим, что из условий (2) - (3) следует $n-m+1-a^*(m)-b^*(m)=a^*(0)+b^*(0)-m+1-a^*(m)-b^*(m)=a_*(m-1)+b_*(m-1)-m+1\ge 1$, а для условия (6) из $A(u^{(m)})=(-1)^{n-m+a^*(m)}$ следует

$$B(u^{(m)})=A(u^{(m)})(-1)^{K(u^{(m)})+1}=(-1)^{n-m+a^*(m)+n-m+1-a^*(m)-b^*(m)+1}=(-1)^{b^*(m)},$$

а из $B(u^{(m)}) = (-1)^{b^*(m)}$ следует

$$A(u^{(m)}) = B(u^{(m)})(-1)^{K(u^{(m)})+1} = (-1)^{b^*(m)+n-m+1-a^*(m)-b^*(m)+1} = (-1)^{n-m+a^*(m)}.$$

Рассмотрим случай $m = n-1$. Если $a(n-1) = b(n-1) = 0$, то $K(u^{(n-1)}) \leq 2$ и из $K(u^{(n-1)}) = 2$ следует $A(u^{(n-1)}) = -1$ и $B(u^{(n-1)}) = 1$. Если $a(n-1) = 1$ и $b(n-1) = 0$, то $K(u^{(n-1)}) \leq 1$ и из $K(u^{(n-1)}) = 1$ следует $A(u^{(n-1)}) = B(u^{(n-1)}) = 1$. Если $a(n-1) = 0$ и $b(n-1) = 1$, то $K(u^{(n-1)}) \leq 1$ и из $K(u^{(n-1)}) = 1$ следует $A(u^{(n-1)}) = B(u^{(n-1)}) = -1$. При $a(n-1) = b(n-1) = 1$ нарушается условие (2).

Пусть для $m = k \in \{1, ..., n-1\}$ условия (6) выполняются. Покажем, что условия (6) выполняются для $m = k-1$. Если $a(k-1) = b(k-1) = 0$, то

$$K(u^{(k-1)}) \leq n-k+1-a^*(k)-b^*(k)+1 = n-(k-1)+1-a^*(k-1)-b^*(k-1)$$

и из $K(u^{(k-1)}) = n-(k-1)+1-a^*(k-1)-b^*(k-1)$ следует $K(u^{(k)}) = n-k+1-a^*(k)-b^*(k)$ и $A(u^{(k-1)}) = (-1)^{n-k+a^*(k)+1} = (-1)^{n-(k-1)+a^*(k-1)}$.

Рассмотрим случай $a(k-1) = 1$ и $b(k-1) = 0$. Если $K(u^{(k)}) < n-k-a^*(k)-b^*(k)$, то

$$K(u^{(k-1)}) < n-k-a^*(k)-b^*(k)+1 = n-(k-1)+1-a^*(k-1)-b^*(k-1).$$

Если $K(u^{(k)}) = n-k-a^*(k)-b^*(k)$, то

$$K(u^{(k-1)}) \leq n-k-a^*(k)-b^*(k)+1 = n-(k-1)+1-a^*(k-1)-b^*(k-1)$$

и из $K(u^{(k-1)}) = n-(k-1)+1-a^*(k-1)-b^*(k-1)$ следует $A(u^{(k-1)}) = (-1)^{n-(k-1)+a^*(k-1)}$. Если $K(u^{(k)}) = n-k+1-a^*(k)-b^*(k)$, то $A(u^{(k)}) = (-1)^{n-k+a^*(k)} = (-1)^{n-(k-1)+a^*(k-1)} = A(u^{(k-1)})$ и

$$K(u^{(k-1)}) \leq n-k+1-a^*(k)-b^*(k) = n-(k-1)+1-a^*(k-1)-b^*(k-1).$$

Рассмотрим случай $a(k-1) = 0$ и $b(k-1) = 1$. Если $K(u^{(k)}) < n-k-a^*(k)-b^*(k)$, то

$$K(u^{(k-1)}) < n-k-a^*(k)-b^*(k)+1 = n-(k-1)+1-a^*(k-1)-b^*(k-1).$$

Если $K(u^{(k)}) = n-k-a^*(k)-b^*(k)$, то

$$K(u^{(k-1)}) \leq n-k-a^*(k)-b^*(k)+1 = n-(k-1)+1-a^*(k-1)-b^*(k-1)$$

и из $K(u^{(k-1)}) = n-(k-1)+1-a^*(k-1)-b^*(k-1)$ следует $B(u^{(k-1)}) = (-1)^{b^*(k-1)}$. Если $K(u^{(k)}) = n-k+1-a^*(k)-b^*(k)$, то $B(u^{(k)}) = (-1)^{b^*(k)} = (-1)^{b^*(k-1)+1} = -B(u^{(k-1)})$ и

$$K(u^{(k-1)}) \leq n-k+1-a^*(k)-b^*(k) = n-(k-1)+1-a^*(k-1)-b^*(k-1).$$

Рассмотрим случай $a(k-1) = b(k-1) = 1$. Если $K(u^{(k)}) < n-k-1-a^*(k)-b^*(k)$, то

$$K(u^{(k-1)}) < n-k-1-a^*(k)-b^*(k)+1 = n-(k-1)+1-a^*(k-1)-b^*(k-1).$$

Если $K(u^{(k)}) = n - k - 1 - a^*(k) - b^*(k)$, то

$$K(u^{(k-1)}) \leq n - k - 1 - a^*(k) - b^*(k) + 1 = n - (k-1) + 1 - a^*(k-1) - b^*(k-1)$$

и из $K(u^{(k-1)}) = n-(k-1)+1-a^*(k-1)-b^*(k-1)$ следует $A(u^{(k-1)}) = (-1)^{n-(k-1)+a^*(k-1)}$. Пусть $K(u^{(k)}) = n-k-a^*(k)-b^*(k)$. Если $n-k-a^*(k)-b^*(k) = 0$, то $(-1)^{n-(k-1)+a^*(k-1)} = -(-1)^{b^*(k-1)}$ и $K(u^{(k-1)}) = 0$. Пусть $n - k - a^*(k) - b^*(k) > 0$. Если $A(u^{(k)}) = (-1)^{n-k+a^*(k)} = (-1)^{n-(k-1)+a^*(k-1)}$, то

$$B(u^{(k)}) = (-1)^{n-k+a^*(k)+n-k-a^*(k)-b^*(k)+1} = (-1)^{b^*(k)+1} = (-1)^{b^*(k-1)}$$

$$K(u^{(k-1)}) \leq n - k - a^*(k) - b^*(k) = n - (k-1) + 1 - a^*(k-1) - b^*(k-1)$$

и из $K(u^{(k-1)}) = n-(k-1)+1-a^*(k-1)-b^*(k-1)$ следует $A(u^{(k-1)}) = (-1)^{n-(k-1)+a^*(k-1)}$. Если $A(u^{(k)}) = (-1)^{n-k+a^*(k)+1} = -(-1)^{n-(k-1)+a^*(k-1)}$, то

$$B(u^{(k)}) = (-1)^{n-k+a^*(k)+1+n-k-a^*(k)-b^*(k)+1} = (-1)^{b^*(k)} = -(-1)^{b^*(k-1)},$$

$$K(u^{(k-1)}) \leq n - k - a^*(k) - b^*(k) = n - (k-1) + 1 - a^*(k-1) - b^*(k-1)$$

и из $K(u^{(k-1)}) = n - (k-1) + 1 - a^*(k-1) - b^*(k-1)$ следует $B(u^{(k-1)}) = (-1)^{b^*(k-1)}$. Если $K(u^{(k)}) = n-k+1-a^*(k)-b^*(k)$, то $A(u^{(k)}) = (-1)^{n-k+a^*(k)} = (-1)^{n-(k-1)+a^*(k-1)}$, $B(u^{(k)}) = (-1)^{b^*(k)} = -(-1)^{b^*(k-1)}$,

$$K(u^{(k-1)}) \leq n - k + 1 - a^*(k) - b^*(k) - 1 = n - (k-1) + 1 - a^*(k-1) - b^*(k-1)$$

и $A(u^{(k-1)}) = (-1)^{n-(k-1)+a^*(k-1)}$. Условия (6) доказаны.

Следовательно, $K(u) \leq n+1-a^*(0)-b^*(0) = 1$. Если $K(u) = 1$, то $B(u) = (-1)^{b^*(0)}$ и $(-1)^{b^*(0)}u \geq 0$.

Если найдется $\tau \in (a, b)$ такое, что $u(\tau) = 0$, то $u(t) = 0$ для $t \in [a, \tau]$ или для $t \in [\tau, b]$. Рассмотрим случай $u \geq 0$. Из $K(u) \leq 1$ следует $K(u') \leq 2$. Если $K(u') \leq 1$, то u – монотонная функция и из $u' \geq 0$ следует $u(t) = 0$ для $t \in [a, \tau]$, а из $u' \leq 0$ следует $u(t) = 0$ для $t \in [\tau, b]$. Если $K(u') = 2$, то $K(u) = 1$, $a(0) = b(0) = 1$, $A(u') = 1$ и $B(u') = -1$. Следовательно, u сначала не убывает, а потом не возрастает. Если τ лежит на интервале неубывания, то $u(t) = 0$ при $t \in [a, \tau]$, а если τ лежит на интервале невозрастания, то $u(t) = 0$ при $t \in [\tau, b]$. Аналогично рассматривается случай $u \leq 0$.

Если $u(t) = 0$ при $t \in [a, \tau]$, то $u^{(m)} \geq 0$ для $m \in \{0, ..., n-1\}$ и из $b^*(0) > 0$ следует $u = 0$. Аналогично из $u(t) = 0$ при $t \in [\tau, b]$ и $a^*(0) > 0$ следует $u = 0$.

Следствие 1. Если справедливы условия (2)-(3) и найдется $g \in L(I, R)$ такое, что $\mid f(t, x) \mid \leq g(t)$ для $t \in I$ и $x \in R$, то краевая задача

$$u^{(n)} = f(t, u),$$

$$a(m) = 1 \Rightarrow u^{(m)}(a) = A_m, \quad m \in \{0, ..., n-1\},$$
$$b(m) = 1 \Rightarrow u^{(m)}(b) = B_m, \quad m \in \{0, ..., n-1\}$$

имеет решение при любых $A_m, B_m \in R$.

Действительно, соответствующая однородная краевая задача, по лемме 1, имеет единственное решение.

Замечание 1. Условие (2) является необходимым для справедливости леммы 1. Если $a_*(0)+b_*(0)=0$, то для $u_1=1$ и $u_2=-1$ удовлетворяются все условия леммы 1, кроме условия (2). Если найдется $n_1 \in \{1,...,n-2\}$ такое, что $a_*(n_1)+b_*(n_1) < n_1+1$ и $a_*(m)+b_*(m) \geq m+1$, $m \in \{0,...,n_1-1\}$, то $a(n_1)=b(n_1)=0$ и $a_*(n_1-1)+b_*(n_1-1)=n_1$. По следствию 1, существует решение u_1 краевой задачи

$$u^{(n_1)} = 1,$$
$$a(m)=1 \Rightarrow u^{(m)}(a)=0, \quad m \in \{0,...,n_1-1\},$$
$$b(m)=1 \Rightarrow u^{(m)}(b)=0, \quad m \in \{0,...,n_1-1\}.$$

Следовательно, для u_1 и $-u_1$ удовлетворяются все условия леммы 1, кроме условия (2).

Замечание 2. Пусть справедливы условия (2)-(3) и для некоторого $m_1 \in \{0,...,n-1\}$ вместо одного из условий (5) будет

$$a(m_1)=1 \wedge (-1)^{n-m_1+a^*(m_1)}u^{(m_1)}(a) < 0 \tag{7}$$

или

$$b(m_1)=1 \wedge (-1)^{b^*(m_1)}u^{(m_1)}(b) < 0. \tag{8}$$

Покажем, что условие $(-1)^{b^*(0)}u \geq 0$ может не выполняться. Рассмотрим случай, когда выполняется условие (7). Пусть u_1 – решение краевой задачи

$$u^{(n)} = 1,$$
$$a(m)=1 \Rightarrow u^{(m)}(a)=0, \quad m \in \{0,...,n-1\},$$
$$b(m)=1 \Rightarrow u^{(m)}(b)=0, \quad m \in \{0,...,n-1\},$$

а u_2 – решение краевой задачи

$$u^{(n)} = 0,$$
$$u^{(m_1)}(a) = (-1)^{n-m_1+a^*(m_1)},$$
$$a(m)=1 \Rightarrow u^{(m)}(a)=0, \quad m \in \{0,...,n-1\}\backslash\{m_1\},$$
$$b(m)=1 \Rightarrow u^{(m)}(b)=0, \quad m \in \{0,...,n-1\}.$$

Из леммы 1 следуют неравенства $(-1)^{b^*(0)}u_1 \geq 0$ и $(-1)^{(b^*(0)}u_2 \geq 0$. Следовательно, найдется $\sigma \in (0,+\infty)$ такое, что для $u=u_1-\sigma u_2$ справедливо неравенство $K(u) > 1$. Случай, когда справедливо условие (8), рассматривается аналогично.

Далее потребуется нормировка, при которой $u \geq 0$. Для этого достаточно прибавить $n+a^*(0)$ или $b^*(0)$ к показателям формулы (5).

Следствие 2. Если $u \in AC^{n-1}(I)$, $(-1)^{b^*(0)}u^{(n)} \geq 0$ и

$$a(m)=1 \Rightarrow (-1)^{m+a_*(m-1)}u^{(m)}(a) \geq 0, \quad m \in \{0,...,n-1\},$$
$$b(m)=1 \Rightarrow (-1)^{b_*(m-1)}u^{(m)}(b) \geq 0, \quad m \in \{0,...,n-1\},$$

то $u \geq 0$.

Доказательство теоремы 1. В краевой задаче (1) заменим $f(t,x)$ на $f(t,\delta(\alpha,x,\beta))$ и рассмотрим получившуюся краевую задачу. Эта краевая задача имеет решение x по следствию 1. Покажем, что x удовлетворяет неравенствам $\alpha \leq x \leq \beta$. Пусть $u=\beta-x$. Из следствия 2 получаем неравенство $\beta-x \geq 0$. Следовательно, $x \leq \beta$. Аналогично доказывается неравенство $\alpha \leq x$. Следовательно, $f(t,\delta(\alpha(t),x(t),\beta(t))) = f(t,x(t))$ и x является решением краевой задачи (1).

Замечание 3. Можно обобщить понятия верхней и нижней функций. Вместо $\alpha^{(n-1)}, \beta^{(n-1)} \in AC(I,R)$ и последних двух условий из (4) потребовать: $\alpha^{(n-2)}, \beta^{(n-2)} \in Lip(I,R)$ и для любого $x \in AC^{n-1}(I,R)$ функция $\alpha^{(n-1)}(t) - \int_a^t f(\tau, \delta(\alpha(\tau), x(\tau), \beta(\tau)))d\tau$ не возрастает при $b_*(n-1)$ четном и не убывает при $b_*(n-1)$ нечетном, а функция $\beta^{(n-1)}(t) - \int_a^t f(\tau, \delta(\alpha(\tau), x(\tau), \beta(\tau)))d\tau$ не убывает при $b_*(n-1)$ четном и не возрастает при $b_*(n-1)$ нечетном.

Для леммы 1 это соответствует условиям. Функция $u \in C^{n-2}(I,R)$, $u^{(n-2)} \in Lip(I,R)$ и $u^{(n-1)}$ не убывает.

Замечание 4. Пусть $M = \{m \in \{0, ..., n-1\} : n - m + 1 - a^*(m) - b^*(m) = 1\} = \{m_0, ..., m_k\}$, $0 = m_0 < ... < m_k$ и $(-1)^{b_*(m-1)}(\beta^{(m)} - \alpha^{(m)}) \geq 0$, $m \in M$. В краевой задаче (1) заменим уравнение $x^{(n)} = f(t,x)$ уравнением $x^{(n)} = f(t, x, ..., x^{(m_k)})$, а последние два условия (4) перепишем в виде

$$(\forall x \in AC^{n-1}(I,R))((-1)^{b_*(n-1)}(\alpha^{(n)} - f_*(t, x, ..., x^{(m_k)})) \leq 0),$$

$$(\forall x \in AC^{n-1}(I,R))((-1)^{b_*(n-1)}(\beta^{(n)} - f_*(t, x, ..., x^{(m_k)})) \geq 0),$$

где

$$f_*(t, x_0, ..., x_k) = f(t, y_0, ..., y_k),$$
$$(-1)^{b_*(m_i-1)} = 1 \Rightarrow y_i = \delta(\alpha^{(m_i)}(t), x_i, \beta^{(m_i)}(t)), \quad i \in \{0, ..., k\},$$
$$(-1)^{b_*(m_i-1)} = -1 \Rightarrow y_i = \delta(\beta^{(m_i)}(t), x_i, \alpha^{(m_i)}(t)), \quad i \in \{0, ..., k\}.$$

Тогда теорема 1 остается в силе и ее доказательство существенно не меняется.

Список литературы

[1] D.R. Dunninger, Existence of positive solutions for fourth order nonlinear problems, Bolletino U.M.I. (7)1 - B(1987), 1129 - 1138.

[2] S.N. Chow, D.R. Dunninger, A. Lasota, A maximum principle for fourth order ordinary differential equations, J. Diff. Equations, 14(1973), 101 - 105.

A. Lepin, L. Lepin. On some boundary value problems for an n-th order differential equation.

Summary. For an n-th order differential equation solvability of boundary value problems is studied using the method of upper and lower functions.

1991 MSC 34B99

A. Lepins, L. Lepins. Par robežproblēmam n-tās kārtas diferenciālvienādojumiem.

Anotācija. Tiek pētīta robežproblēmu atrisināmība n-tās kārtas diferenciālvienādojumam ar apakšējās un augšējās funkcijas palīdzību.

Institute of Mathematics
and Computer Science,
University of Latvia
Riga, Rainis blvd 29

Received 02.02.2006