Одна краевая задача для уравнения n-го порядка

А.Я.Лепин, Л.А.Лепин

Аннотация. Для дифференциального уравнения n-ного порядка рассматривается аналог задачи Дирихле для дифференциального уравнения второго порядка.

УДК 517.927

Для дифференциального уравнения

$$x^{(n)} = f(t, x, x^{(n-2)}, x^{(n-1)}), \quad t \in I = [a, b], \tag{1}$$

где $n \geq 3$, $f : I \times R^3 \to R$ удовлетворяет условиям Каратеодори, рассмотрим следующую краевую задачу. Заданы n граничных условий вида $x^{(m)}(a) = A_m$ и $x^{(m)}(b) = B_m$. Примером такой задачи является

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad x(a) = A_0, \quad x'(a) = A_1, \quad x'(b) = B_1$$

(см.[1]). Для $m \in \{0, ..., n-1\}$ пусть $a(m) = 1$, если есть граничное условие $x^{(m)}(a) = A_m$, $a(m) = 0$, если граничного условия $x^{(m)}(a) = A_m$ нет; $b(m) = 1$, если есть граничное условие $x^{(m)}(b) = B_m$, и $b(m) = 0$, если граничного условия $x^{(m)}(b) = B_m$ нет. Краевую задачу будем записывать так

$$\begin{gathered} x^{(n)} = f(t, x, x^{(n-2)}, x^{(n-1)}), \\ a(m) = 1 \Rightarrow x^{(m)}(a) = A_m, \quad m \in \{0, ..., n-1\}, \\ b(m) = 1 \Rightarrow x^{(m)}(b) = B_m, \quad m \in \{0, ..., n-1\}. \end{gathered} \tag{2}$$

Пусть $a_*(m) = \sum_{k=0}^{m} a(k)$, $a^*(m) = \sum_{k=m}^{n-1} a(k)$, $b_*(m) = \sum_{k=0}^{m} b(k)$ и $b^*(m) = \sum_{k=m}^{n-1} b(k)$. Будем предполагать, что выполняются следующие условия:

$$a(n-1) = b(n-1) = 0, \quad a(n-2) = b(n-2) = 1, \tag{3}$$

$$a_*(n-3) + b_*(n-3) = n-2 \tag{4}$$

$$a_*(m) + b_*(m) \geq m+1, \quad m \in \{0, ..., n-4\}. \tag{5}$$

Разрешимость краевой задачи (2) будем выводить из существования нижней и верхней функций α и β, удовлетворяющих следующим условиям: $\alpha, \beta \in C^{n-2}(I, R)$,

$\alpha^{(n-2)} \leq \beta^{(n-2)}$, $\alpha^{(n-2)}, \beta^{(n-2)}(a) \in Lip(I,R)$, для любых $t_1 \in (a,b)$ и $t_2 \in (t_1,b)$, в которых существуют производные $\alpha^{(n-1)}(t_1)$, $\alpha^{(n-1)}(t_2)$, $\beta^{(n-1)}(t_1)$ и $\beta^{(n-1)}(t_2)$, справедливы неравенства:

$$\begin{aligned}
&(\forall x \in AC^{n-1}(I,R)) \quad (\alpha^{(n-1)}(t_2) - \alpha^{(n-1)}(t_1) \\
&\qquad \geq \int_{t_1}^{t_2} f(t, \delta(r(t), x(t), s(t)), \alpha^{(n-2)}(t), \alpha^{(n-1)}(t))dt), \\
&(\forall x \in AC^{n-1}(I,R)) \quad (\beta^{(n-1)}(t_2) - \beta^{(n-1)}(t_1) \\
&\qquad \leq \int_{t_1}^{t_2} f(t, \delta(r(t), x(t), s(t)), \beta^{(n-2)}(t), \beta^{(n-1)}(t))dt), \\
&a(m) = 1 \wedge (-1)^{n-m+a^*(m)} = 1 \Rightarrow \alpha^{(m)}(a) \geq A_m \geq \beta^{(m)}(a), \\
&\qquad m \in \{0, ..., n-2\}, \\
&a(m) = 1 \wedge (-1)^{n-m+a^*(m)} = -1 \Rightarrow \alpha^{(m)}(a) \leq A_m \leq \beta^{(m)}(a), \\
&\qquad m \in \{0, ..., n-2\}, \\
&b(m) = 1 \wedge (-1)^{b^*(m)} = 1 \Rightarrow \alpha^{(m)}(b) \geq B_m \geq \beta^{(m)}(b), \\
&\qquad m \in \{0, ..., n-2\}, \\
&b(m) = 1 \wedge (-1)^{b^*(m)} = -1 \Rightarrow \alpha^{(m)}(b) \leq B_m \leq \beta^{(m)}(b), \\
&\qquad m \in \{0, ..., n-2\}, \\
&(-1)^{b^*(0)}(\alpha - \beta) \geq 0,
\end{aligned} \tag{6}$$

где $r = \min\{\alpha, \beta\}$, $s = \max\{\alpha, \beta\}$, $\delta(u,v,w) = u$ при $v < u \leq w$, $\delta(u,v,w) = v$ при $u \leq v \leq w$ и $\delta(u,v,w) = w$ при $u \leq w < v$. Заметим, что $\alpha^{(n-2)}$ и $\beta^{(n-2)}$ – функции с ограниченным изгибанием (см.[2]). Следовательно, существуют правые и левые производные $D_r\alpha^{(n-2)}$, $D_r\beta^{(n-2)}$, $D_l\alpha^{(n-2)}$, $D_l\beta^{(n-2)}$,справедливы неравенства $D_l\alpha^{(n-2)}(t) \leq D_r\alpha^{(n-2)}(t)$ и $D_l\beta^{(n-2)}(t) \geq D_r\beta^{(n-2)}(t)$ для $t \in (a,b)$ и для $\tau \in [a,b)$

$$D_r\alpha^{(n-2)}(\tau) = \lim_{t\to\tau+} D_l\alpha^{(n-2)}(t) = \lim_{t\to\tau+} D_r\alpha^{(n-2)}(t),$$

$$D_r\beta^{(n-2)}(\tau) = \lim_{t\to\tau+} D_l\beta^{(n-2)}(t) = \lim_{t\to\tau+} D_r\beta^{(n-2)}(t).$$

Как хорошо известно из теории краевых задач для уравнения второго порядка, нужно еще условие компактности, которое обеспечивается условиями Бернштейна, Нагумо и Шредера. Условие компактности запишем в следующем виде.

C. Найдется $N > \max\{\sup\{\mid \alpha^{(n-1)}(t) \mid : t \in I\}, \sup\{\mid \beta^{(n-1)}(t) \mid : t \in I\}\}$ такое, что для любого решения $x : [c,d] \to R$, $a \leq c < d \leq b$ уравнения (1) из $\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t)$, $t \in [c,d]$, $\alpha^{(n-2)}(t) \leq x^{(n-2)}(t) \leq \beta^{(n-2)}(t)$, $t \in [c,d]$ и

$$\begin{aligned}
&\min\{\mid x^{(n-1)}(t) \mid : t \in [c,d]\} \\
&\qquad \leq (b-a)^{-1} \max\{\mid \beta^{(n-2)}(b) - \alpha^{(n-2)}(a) \mid, \mid \beta^{(n-2)}(a) - \alpha^{(n-2)}(b) \mid\}
\end{aligned} \tag{7}$$

следует неравенство $\mid x^{(n-1)}(t) \mid < N$, $t \in [c,d]$.

Теорема 1. Если выполняются условия (3)-(6) и C, то краевая задача (2) имеет решение x, удовлетворяющее неравенствам $r \leq x \leq s$, $\alpha^{(n-2)} \leq x^{(n-2)} \leq \beta^{(n-2)}$ и $\mid x^{(n-1)} \mid < N$.

Для доказательства потребуется следующая лемма.

Лемма 1 (см.[3]). Если $u \in AC^{n-1}(I,R)$, $u^{(n)} \geq 0$, справедливы условия (3)-(5) и

$$a(m) = 1 \Rightarrow (-1)^{n-m+a^*(m)}u^{(m)}(a) \geq 0, \quad m \in \{0, ..., n-1\},$$

$$b(m)=1\Rightarrow(-1)^{b^*(m)}u^{(m)}(b)\geq 0,\quad m\in\{0,...,n-1\},$$

то $(-1)^{b^*(0)}u\geq 0$.

Следствие 1. Если $v\in C^{n-2}(I,R)$, $v^{(n-2)}\geq 0$, справедливы условия (4)-(5) и

$$a(m)=1\Rightarrow(-1)^{n-m+a^*(m)-1}v^{(m)}(a)\geq 0,\quad m\in\{0,...,n-3\},$$

$$b(m)=1\Rightarrow(-1)^{b^*(m)-1}v^{(m)}(b)\geq 0,\quad m\in\{0,...,n-3\},$$

то $(-1)^{b^*(0)-1}v\geq 0$.

Доказательство теоремы 1. Для $t\in I$, $x\in R$ пусть

$$\begin{array}{rl} f_*(t,x,x^{(n-2)},x^{(n-1)}) & =f(t,x,\beta^{(n-2)}(t),\beta^{(n-1)}(t)),\\ x^{(n-2)} & \geq\beta^{(n-2)}(t)+\mid x^{(n-1)}-\beta^{(n-1)}(t)\mid,\end{array}$$

$$f_*(t,x,x^{(n-2)},x^{(n-1)})=f(t,x,x^{(n-2)},x^{(n-1)}),\quad \alpha^{(n-2)}(t)\leq x^{(n-2)}\leq\beta^{(n-2)},$$

$$\begin{array}{rl} f_*(t,x,x^{(n-2)},x^{(n-1)}) & =f(t,x,\alpha^{(n-2)}(t),\alpha^{(n-1)}(t)),\\ x^{(n-2)} & \leq\alpha^{(n-2)}(t)-\mid x^{(n-1)}-\alpha^{(n-1)}(t)\mid\end{array}$$

и линейна по $x^{(n-2)}$ при $\alpha^{(n-2)}(t)-\mid x^{(n-1)}-\alpha^{(n-1)}(t)\mid\leq x^{(n-2)}\leq\alpha^{(n-2)}(t)$ и $\beta^{(n-2)}(t)\leq x^{(n-2)}\leq\beta^{(n-2)}(t)+\mid x^{(n-1)}-\beta^{(n-1)}(t)\mid$.

Рассмотрим следующую краевую задачу

$$\begin{array}{c} x^{(n)}=f_*(t,\delta(r(t),x,s(t)),x^{(n-2)},\delta(-N,x^{(n-1)},N)),\\ a(m)=1\Rightarrow x^{(m)}(a)=A_m,\quad m\in\{0,...,n-1\},\\ b(m)=1\Rightarrow x^{(m)}(b)=B_m,\quad m\in\{0,...,n-1\}.\end{array}\tag{8}$$

По лемме 1, однородная краевая задача, соответствующая краевой задаче (8), имеет единственное решение. Следовательно, краевая задача (8) имеет решение x.

Докажем неравенство $x^{(n-2)}\leq\beta^{(n-2)}$. Предположим противное. Пусть $t_1\in(a,b)$ такое, что

$$\begin{array}{c} x^{(n-2)}(t_1)-\beta^{(n-2)}(t_1)=\max\{x^{(n-2)}(t)-\beta^{(n-2)}(t):t\in I\}>0,\\ x^{(n-2)}(t)-\beta^{(n-2)}(t)<x^{(n-2)}(t_1)-\beta^{(n-2)}(t_1),\quad t\in(t_1,b).\end{array}\tag{9}$$

Тогда $x^{(n-1)}(t_1)=\beta^{(n-1)}(t_1)$ и для достаточно малого $\varepsilon>0$

$$\begin{array}{rl} \beta^{(n-1)}(t) & -\beta^{(n-1)}(t_1)\\ & \leq\int_{t_1}^t f(t,\delta(r(t),x(t),s(t)),\beta^{(n-2)}(t),\beta^{(n-1)}(t))dt,\quad t\in[t_1,t_1+\varepsilon],\end{array}$$

$$\begin{array}{rl} x^{(n-1)}(t) & -x^{(n-1)}(t_1)\\ & =\int_{t_1}^t f(t,\delta(r(t),x(t),s(t)),\beta^{(n-2)}(t),\beta^{(n-1)}(t))dt, t\in[t_1,t_1+\varepsilon].\end{array}$$

Следовательно, $x^{(n-1)}(t)-\beta^{(n-1)}(t)\geq 0$, $t\in[t_1,t_1+\varepsilon]$ и $x^{(n-2)}(t_1+\varepsilon)-\beta^{(n-2)}(t_1+\varepsilon)\geq x^{(n-2)}(t_1)-\beta^{(n-2)}(t_1)$, что противоречит условию (9). Аналогично доказывается неравенство $\alpha^{(n-2)}\leq x^{(n-2)}$. Следовательно,

$$\begin{array}{rl} f_*(t,\delta(r(t),x,s(t)),x^{(n-2)},\delta(& -N,x^{(n-1)},N))\\ & =f(t,\delta(r(t),x,s(t)),x^{(n-2)},\delta(-N,x^{(n-1)},N)).\end{array}$$

Теперь из следствия 1 следуют неравенства $r \le x \le s$. Следовательно,

$$f_*(t, \delta(r(t), x, s(t)), x^{(n-2)}, \delta(-N, x^{(n-1)}, N)) = f(t, x, x^{(n-2)}, \delta(-N, x^{(n-2)}, N)).$$

Покажем, что $\mid x^{(n-1)} \mid < N$. Предположим противное. Тогда найдется интервал $[c, d]$, для которого справедливо неравенство (7) и $\max\{\mid x^{(n-2)}(t) \mid : t \in [c, d]\} = N$, что противоречит условию C. Следовательно,

$$f_*(t, \delta(r(t), x, s(t)), x^{(n-2)}, \delta(-N, x^{(n-1)}, N)) = f(t, x, x^{(n-2)}, x^{(n-1)})$$

и решение x краевой задачи (8) является решением краевой задачи (2).

Список литературы

[1] W.G.Kelly. Some existence theorems for nth-order boundary value problems, J.differential equations, 18(1975), 158-169.

[2] А.Я.Лепин, Л.А.Лепин. Краевые задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, Зинатне, Рига, 1988.

[3] А.Я.Лепин, Л.А.Лепин. О некоторых краевых задачах для уравнения n-го порядка, в этом сборнике.

A. Lepin, L. Lepin. On a boundary value problem for an n-th order differential equation.

Summary. The analogue of the Dirichlet problem for a second order differential equation is considered for an n-th order equation.

1991 MSC 34B15

A. Lepins, L. Lepins. Par vienu robežproblēmu n-tās kārtas diferenciālvienādojumam.

Anotācija. Tiek apskatīts Dirihlē robežproblēmas otrās kārtas diferenciālvienādojumam analogs n-tas kārtas diferenciālvienādojumam.

Institute of Mathematics
and Computer Science,
University of Latvia
Riga, Rainis blvd 29

Received 15.12.2005