О линейных условиях

А.Я. Лепин

Аннотация. Рассматривается существование решения двухточечной краевой задачи при наличии линейных условий.

УДК 517.927

Рассмотрим краевую задачу

$$x'' = f(t, x, x'), \quad t \in I = [a, b], \tag{1}$$

$$\begin{aligned} H_1 x &= H_1(x(a), x(b), x'(a), x'(b)) = h_1, \\ H_2 x &= H_2(x(a), x(b), x'(a), x'(b)) = h_2, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\alpha \le x \le \beta, \quad U, \tag{3}$$

где функция f удовлетворяет условиям Каратеодори, H_1 и H_2 –непрерывные функции, α – нижняя функция, β – верхняя функция и U - подмножество следующего множества условий.

1. $\alpha(a) = \beta(a)$, 2. $\alpha'(a) < \beta'(a)$, 3. $\alpha'(a) = \beta'(a)$, 4. $\alpha'(a) > \beta'(a)$,
5. $\alpha(b) = \beta(b)$, 6. $\alpha'(b) < \beta'(b)$, 7. $\alpha'(b) = \beta'(b)$, 8. $\alpha'(b) > \beta'(b)$,
9. $(\forall x, y \in S(I, R))((x \le y \wedge x'(a) \le y'(a) \Rightarrow x'(b) \le y'(b)) \wedge$
$(x \le y \wedge x'(b) \ge y'(b) \Rightarrow x'(a) \ge y'(a)))$,
A. $\alpha \in S(I, R)$, B. $\beta \in S(I, R)$, C. $H_1\alpha = H_1\beta$, D. $H_2\alpha = H_2\beta$,
L. $f(t, x, x') = c_0(t) + c_1(t)x + c_2(t)x'$, $c_o, c_1, c_2 \in L_1(I, R)$,
L$_1$. $H_1x = p_1x(a) + p_2x(b) + p_3x'(a) + p_4x'(b)$, $p_1, p_2, p_3, p_4 \in R$,
L$_2$. $H_2x = p_5x(a) + p_6x(b) + p_7x'(a) + p_8x'(b)$, $p_5, p_6, p_7, p_8 \in R$,

где $S(I, R)$ – множество решений $x : I \to R$ уравнения (1), удовлетворяющих неравенствам $\alpha \le x \le \beta$.

Будем говорить, что непрерывная функция $H : R^4 \to R$ имеет тип монотонности $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$, где $\sigma_i \in \{0, -, +, 1\}$, $i = 1, 2, 3, 4$, если при $\sigma_i = 0$ функция H не зависит от i-го аргумента, при $\sigma_i = -$ функция H не возрастает по i-му аргументу, при $\sigma_i = +$ функция H не убывает по i-му аргументу, а при $\sigma_i = 1$ на i-й аргумент функции H условия не накладываются. Класс монотонности $M(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ состоит из функций H, имеющих тип монотонности $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$.

Пусть M_1 и M_2 – классы монотонности. Наша цель - выяснить, при каких M_1, M_2 и U справедливо

Утверждение Id. Для любых $H_1 \in M_1$, $H_2 \in M_2$, $h_1 \in [H_1\alpha, H_1\beta]$ и $h_2 \in [H_2\alpha, H_2\beta]$ из $H_1\alpha \le H_1\beta$, $H_2\alpha \le H_2\beta$ и U следует существование решения краевой задачи (1)-(3).

В работе [1] для условий 1-D найдены все наборы (M_1, M_2, U), для которых утверждение Id становится теоремой. При этом решение понимается в обобщенном смысле. Влияние линейных условий L, L_1 и L_2 исследовалось в работе [2], в которой для условий 1-8 и L, L_1 и L_2 найдены все наборы (M_1, M_2, U), для которых утверждение Id становится теоремой. Аналогично работе [1] решение понимается в обобщенном смысле. Основной результат работы [2] состоит в установлении факта отсутствия практически интересных новых теорем с линейными условиями. Полностью рассмотреть случай всех условий 1-L_2 сейчас не представляется возможным из-за отсутствия нужных программ для ПК, очень большого числа нужных примеров и наличия утверждений Id, для которых еще не удалось установить, являются ли они теоремами или можно построить противоречащий пример.

Заметим, что при условии L обобщенные решения являются решениями в смысле Каратеодори. При рассмотрении решений в смысле Каратеодори достаточно считать, что дополнительно к условиям 4 выполняется еще следующее условие [3].

E. Для любых $c \in [a, b)$, $d \in (c, b]$ и решения $x : (c, d) \to R$ уравнения (1) из $\alpha(t) \le x(t) \le \beta(t)$, $t \in (c, d)$ следует $\sup\{| x'(t) |: t \in (c, d)\} < \infty$.

Короткая запись теорем

Утверждение Id полностью определяется заданием набора (M_1, M_2, U). Если $M_1 = M(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ и $M_2 = M(\sigma_5, \sigma_6, \sigma_7, \sigma_8)$, то соответствующее утверждение Id коротко будем записывать так:

$$Id. \quad \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4 \cdot \sigma_5\sigma_6\sigma_7\sigma_8 \cdot u_1u_2u_3u_4u_5u_6u_7u_8u_9u_Au_Bu_Cu_Du_Lu_{L_1}u_{L_2}, \tag{4}$$

где Id - идентификатор утверждения, $u_i = i$, если i-е условие входит в U, и u_i пусто в противном случае.

Так, в [2] доказана следующая теорема.

Теорема TL01. Для любых $H_1 \in M(1, 1, 1, 1)$, $H_2 \in M(1, 1, 1, 1)$, $h_1 \in [H_1\alpha, H_1\beta]$ и $h_2 \in [H_2\alpha, H_2\beta]$ из $H_1\alpha \le H_1\beta$, $H_2\alpha \le H_2\beta$ и условий 1, 3 и L следует существование решения краевой задачи (1)-(3).

Коротко эта теорема будет записываться так.

TL01. 1111.1111.13L. При помощи симметрий можно получить эквивалентные теоремы. Так, замена t на $-t$ переводит теорему (4) в теорему

Idt. $\sigma_2\sigma_1\sigma_4'\sigma_3' \cdot \sigma_6\sigma_5\sigma_8'\sigma_7' \cdot u_5u_8u_7u_6u_1u_4u_3u_2u_9u_Au_Bu_Cu_Du_Lu_{L_1}u_{L_2}$,
где $1' = 1, +' = --, --' = +, 0' = 0$. Если H_1 и H_2 поменять местами, то теорема (4) переходит в теорему

IdH. $\sigma_5\sigma_6\sigma_7\sigma_8 \cdot \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4 \cdot u_1u_2u_3u_4u_5u_6u_7u_8u_9u_Au_Bu_Du_Cu_Lu_{L_2}u_{L_1}$.
Замена u_c на C и H_1 на $-H_1$ переводит теорему (4) в теорему

IdC. $\sigma_1'\sigma_2'\sigma_3'\sigma_4' \cdot \sigma_5\sigma_6\sigma_7\sigma_8 \cdot u_1u_2u_3u_4u_5u_6u_7u_8u_9u_Au_BCu_Du_Lu_{L_1}u_{L_2}$.
Замена u_D на D и H_2 на $-H_2$ переводит теорему (4) в теорему

IdD. $\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4 \cdot \sigma_5'\sigma_6'\sigma_7'\sigma_8' \cdot u_1u_2u_3u_4u_5u_6u_7u_8u_9u_Au_Bu_CDu_Lu_{L_1}u_{L_2}$.

Теоремы с линейными условиями

TL02. 1 1 1 1. 1 1 – +. 1 5 A B L
TL03. 1 1 1 1. 1 – – –. 1 6 A B L
TL04. 1 1 1 1. 1 – – 1. 1 7 A B L
TL05. 1 1 1 1. 1 – – +. 1 8 A B L
TL06. 1 1 1 1. – – – –. 2 6 A B L
TL07. 1 1 1 1. – – – 1. 2 7 A B L
TL08. 1 1 1 1. – – – +. 2 8 A B L
TL09. 1 1 1 1. – – 1 –. 3 6 A B L
TL10. 1 1 1 1. – – 1 1. 3 7 A B L
TL11. 1 1 1 1. – – + –. 4 6 A B L
TL12. – 1 0 +. 1 – – –. 2 6 A B L
TL13. – 1 0 +. 1 – – –. 2 7 A B L
TL14. – 1 0 +. 1 – – 0. 2 8 A B L
TL15. – 1 + +. 1 – – –. 3 6 A B L
TL16. – 1 + +. 1 – – –. 3 7 A B L
TL17. – 1 + +. 1 – – –. 4 6 A B L
TL18. + – 0 0. 1 1 1 1. A B C L
TLL$_1$1. 1 1 1 1. 1 1 1 1. A B C L L$_1$
TLL$_1$2. + – 0 0. 0 0 1 +. 4 7 $\vee$ 8 A C L L$_1$
TL$_1$L$_2$1. + – + 0. + – + 0. C D L$_1$ L$_2$
TL$_1$L$_2$2. + – – 0. + – – 0. C D L$_1$ L$_2$
TL$_1$L$_2$3. + 0 + –. + 0 + –. 6 $\vee$ 7 C D L$_1$ L$_2$
TL$_1$L$_2$4. + 0 – –. + 0 – –. 6 $\vee$ 7 C D L$_1$ L$_2$
где 7 $\vee$ 8 означает условие $\alpha'(b) \geq \beta'(b)$, а 6 $\vee$ 7 означает условие $\alpha'(b) \leq \beta'(b)$.

Доказательство теорем TL02-TL11. Обозначим $x_\lambda = \alpha + \lambda(\beta - \alpha)$, $\lambda \in [0,1]$. Ясно, что $x_\lambda \in S(I,R)$ и $H_2 x_\lambda = h_2$, $\lambda \in [0,1]$. Из условий $H_1 x_0 = H_1\alpha \leq h_1$ и $H_1 x_1 = H_1\beta \geq h_1$ следует существование решения краевой задачи (1)-(3).

Доказательство теорем TL12-TL17. Пусть $x, y \in S(I,R)$, $x(a) = \alpha(a)$, $x(b) = \beta(b)$, $y(a) = \beta(a)$ и $y(b) = \alpha(b)$. Отображение

$$x_{uv} = (1-u)(1-v)\alpha + uv\beta + (1-u)vx + u(1-v)y, \quad u, v \in [0,1]$$

удовлетворяет условиям $x_{uv} \in S(I,R)$, $u, v \in [0,1]$,

$$H_1 x_{u0} \leq h_1, \quad u \in [0,1], \quad H_1 x_{u1} \geq h_1, u \in [0,1],$$

$$H_2 x_{0v} \leq h_2, \quad v \in [0,1], \quad H_2 x_{1v} \geq h_2, v \in [0,1].$$

Следовательно, решение краевой задачи (1)-(3) существует.

Доказательство теоремы TL18. +–00.1111.ABCL. Пусть D – множество двоично рациональных точек $[0,1]$. Построим отображение D в $S(I,R)$ следующим образом: $x_0 = \alpha$, $x_1 = \beta$, $x_0 \leq x_{1/2} \leq x_1$, $x_{1/2}(a) = (x_0(a) + x_1(a))/2$, $H_1 x_{1/2} = h_1$, $x_0 \leq x_{1/4} \leq x_{1/2}$, $x_{1/4}(a) = (x_0(a) + x_{1/2}(a))/2$, $H_1 x_{1/4} = h_1$, $x_{1/2} \leq x_{3/4} \leq x_1$, $x_{3/4}(a) = (x_{1/2}(a) + x_1(a))/2$, $H_1 x_{3/4} = h_1$ и т.д. Пусть $A = \{\lambda \in D : H_2 x_\lambda \leq h_2\}$ и $y = \sup\{x_\lambda : \lambda \in A\}$. Если $H_2 y = h_2$, то y – искомое решение. Пусть $H_2 y < h_2$, $B = \{\lambda \in D - A : \lambda \geq y(a)\}$

и $z = \inf\{x_\lambda : \lambda \in B\}$. Если $H_2 z = h_2$, то z – искомое решение. Пусть $H_2 z > h_2$ и $v_\mu = y + \mu(z - y)$, $\mu \in [0, 1]$. Ясно, что $y(a) = z(a)$, $v_\mu \in S(I, R)$ и $H_1 v_\mu = h_1$, $\mu \in [0, 1]$. Следовательно, существует искомое решение.

Доказательство теоремы TLL$_1$1. 1111.1111.ABCLL$_1$. Для $x_\lambda = \alpha + \lambda(\beta - \alpha)$, $\lambda \in [0, 1]$, $H_1 x_\lambda = H_1\alpha + \lambda(H_1\beta - H_1\alpha) = h_1$. Следовательно, существует решение краевой задачи (1)-(3).

Доказательство теоремы TLL$_1$2. +–00.001+.47∨8ACLL$_1$. Пусть $y \in S(I, R)$ такое, что $y(a) = \beta(a)$ и $y(b) = \beta(b)$, а $\mu, \nu \in [0, 1]$ такие, что $\mu y'(a) + \nu\alpha'(a) = \beta'(a)$ и $\mu + \nu = 1$. Тогда $H_1 y = h_1$ и для $z = \mu y + \nu\alpha$ справедливы условия: $H_1 z = h_1$, $z'(a) = \beta'(a)$ и $z'(b) \geq \beta'(b)$. Тогда $H_2 z \geq H_2\beta \geq h_2$ и по теореме TL18 имеется решение краевой задачи (1)-(3) между α и z.

Доказательство теоремы TL$_1$L$_2$1. + – + 0.+ – + 0.CDL$_1$L$_2$. Пусть

$$H_1 x = p_1 x(a) - p_2 x(b) + p_3 x'(a) = h_1, \quad p_1, p_2, p_3 \in [0, \infty),$$

$$H_2 x = p_5 x(a) - p_6 x(b) + p_7 x'(a) = h_2, \quad p_5, p_6, p_7 \in [0, \infty).$$

Если $p_3 = 0$ или $p_7 = 0$, то существование решения краевой задачи (1)-(3) следует из теоремы Tb41D.+ – 0 0.1 1 + –.CD работы [1]. Без ограничения общности будем считать, что $p_3 = p_7 = 1$. Пусть

$$Hx = H_1 x - H_2 x = (p_1 - p_5)x(a) - (p_2 - p_6)x(b) = h_1 - h_2.$$

Вместо краевых условий $H_1 x = h_1$ и $H_2 x = h_2$ будем рассматривать эквивалентные им $Hx = h_1 - h_2$ и $H_1 x = h_1$. Из $H_1\alpha = H_1\beta$ и $H_2\alpha = H_2\beta$ следует

$$p_1(\beta(a) - \alpha(a)) - p_2(\beta(b) - \alpha(b)) + \beta'(a) - \alpha'(a) = 0,$$

$$p_5(\beta(a) - \alpha(a)) - p_6(\beta(b) - \alpha(b)) + \beta'(a) - \alpha'(a) = 0.$$

Следовательно,

$$(p_1 - p_5)(\beta(a) - \alpha(a)) - (p_2 - p_6)(\beta(b) - \alpha(b)) = 0.$$

Если $\beta(a) = \alpha(a)$ и $\beta(b) = \alpha(b)$, то существование решения краевой задачи (1)-(3) следует из теоремы Tb09CD.11+–.11+–.15CD работы [1]. Если $\beta(a) = \alpha(a)$, $\beta(b) > \alpha(b)$ или $\beta(a) > \alpha(a)$, $\beta(b) = \alpha(b)$, то существование решения краевой задачи (1)-(3) следует из теоремы Tb41D. Пусть $\beta(a) > \alpha(a)$ и $\beta(b) > \alpha(b)$. Тогда $\mathrm{sign}(p_1 - p_5) = \mathrm{sign}(p_2 - p_6)$ и существование решения краевой задачи (1)-(3) следует из теоремы Tb41D.

Доказательство теоремы TL$_1$L$_2$2. + – – 0.+ – – 0.CDL$_1$L$_2$. Пусть

$$H_1 x = p_1 x(a) - p_2 x(b) - p_3 x'(a) = h_1 \quad p_1, p_2, p_3 \in [0, \infty),$$

$$H_2 x = p_5 x(a) - p_6 x(b) - p_7 x'(a) = h_2, \quad p_5, p_6, p_7 \in [0, \infty).$$

Если $p_3 = 0$ или $p_7 = 0$, то существование решения краевой задачи (1)-(3) следует из теоремы Tb41.+–00.11–+.C работы [1]. Без ограничения общности будем считать, что $p_3 = p_7 = 1$. Пусть

$$Hx = H_1 x - H_2 x = (p_1 - p_5)x(a) - (p_2 - p_6)x(b) = h_1 - h_2.$$

Вместо краевых условий $H_1x = h_1$ и $H_2x = h_2$ будем рассматривать эквивалентные им $Hx = h_1 - h_2$ и $H_1x = h_1$. Из $H_1\alpha = H_1\beta$ и $H_2\alpha = H_2\beta$ следует

$$p_1(\beta(a) - \alpha(a)) - p_2(\beta(b) - \alpha(b)) - \beta'(a) + \alpha'(a) = 0,$$

$$p_5(\beta(a) - \alpha(a)) - p_6(\beta(b) - \alpha(b)) - \beta'(a) + \alpha'(a) = 0.$$

Следовательно,

$$(p_1 - p_5)(\beta(a) - \alpha(a)) - (p_2 - p_6)(\beta(b) - \alpha(b)) = 0.$$

Если $\beta(a) = \alpha(a)$ и $\beta(b) = \alpha(b)$, то существование решения краевой задачи (1)-(3) следует из теоремы Tb09.11−+.11−+.15 работы [1]. Если $\beta(a) = \alpha(a)$, $\beta(b) > \alpha(b)$ или $\beta(a) > \alpha(a)$, $\beta(b) = \alpha(b)$, то существование решения краевой задачи (1)-(3) следует из теоремы Tb41. Пусть $\beta(a) > \alpha(a)$ и $\beta(b) > \alpha(b)$. Тогда $\mathrm{sign}(p_1 - p_5)$=$\mathrm{sign}(p_2 - p_6)$ и существование решения краевой задачи (1)-(3) следует из теоремы Tb41.

Доказательство теоремы $\mathrm{TL_1L_2}$3. +0+−.+0+−.6∨7CD$\mathrm{L_1L_2}$. Пусть

$$H_1x = p_1x(a) + p_3x'(a) - p_4x'(b) = h_1 \quad p_1, p_3, p_4 \in [0, \infty),$$

$$H_2x = p_5x(a) + p_7x'(a) - p_8x'(b) = h_2, \quad p_5, p_7, p_8 \in [0, \infty).$$

Если $p_3 = 0$ или $p_7 = 0$, то существование решения краевой задачи (1)-(3) следует из теоремы Tb48tD.+00−.1++1.6CD работы [1] или теоремы Tb05tHCD.++01.1++1.7CD работы [1]. Без ограничения общности рассмотрим случай $p_3 = p_7 = 1$. Пусть

$$Hx = H_1x - H_2x = (p_1 - p_5)x(a) - (p_4 - p_8)x'(b) = h_1 - h_2.$$

Вместо краевых условий $H_1x = h_1$ и $H_2x = h_2$ будем рассматривать эквивалентные им $Hx = h_1 - h_2$ и $H_1x = h_1$. Из $H_1\alpha = H_1\beta$ и $H_2\alpha = H_2\beta$ следует

$$p_1(\beta(a) - \alpha(a)) + \beta'(a) - \alpha'(a) - p_4(\beta'(b) - \alpha'(b)) = 0,$$

$$p_5(\beta(a) - \alpha(a)) + \beta'(a) - \alpha'(a) - p_8(\beta'(b) - \alpha'(b)) = 0.$$

Следовательно,

$$(p_1 - p_5)(\beta(a) - \alpha(a)) - (p_4 - p_8)(\beta'(b) - \alpha'(b)) = 0.$$

Если $\beta(a) = \alpha(a)$ и $\beta'(b) = \alpha'(b)$, то существование решения краевой задачи (1)-(3) следует из теоремы Tb11CD.1++1.1++1.17CD работы [1]. Если $\beta(a) = \alpha(a)$, $\beta'(b) > \alpha'(b)$ или $\beta(a) > \alpha(a)$, $\beta'(b) = \alpha'(b)$, то существование решения краевой задачи (1)-(3) следует из теоремы Tb48tD или теоремы Tb05tHCD. Пусть $\beta(a) > \alpha(a)$ и $\beta'(b) > \alpha'(b)$. Тогда $\mathrm{sign}(p_1 - p_5)$=$\mathrm{sign}(p_4 - p_8)$ и существование решения краевой задачи (1)-(3) следует из теоремы Tb48tD или теоремы Tb05tHCD.

Доказательство теоремы $\mathrm{TL_1L_2}$4. + 0 − −.+ 0 − −.6∨7CD$\mathrm{L_1L_2}$. Пусть

$$H_1x = p_1x(a) - p_3x'(a) - p_4x'(b) = h_1 \quad p_1, p_3, p_4 \in [0, \infty),$$

$$H_2x = p_5x(a) - p_7x'(a) - p_8x'(b) = h_2, \quad p_5, p_7, p_8 \in [0, \infty).$$

Если $p_3 = 0$ или $p_7 = 0$, то существование решения краевой задачи (1)-(3) следует из теоремы Tb48t.+ 0 0 –.1 – – 1.6C работы [1] или теоремы Tb05tHC. + + 0 1.1 – – 1.7C работы [1]. Без ограничения общности рассмотрим случай $p_3 = p_7 = 1$. Пусть

$$Hx = H_1x - H_2x = (p_1 - p_5)x(a) - (p_4 - p_8)x'(b) = h_1 - h_2.$$

Вместо краевых условий $H_1x = h_1$ и $H_2x = h_2$ будем рассматривать эквивалентные им $Hx = h_1 - h_2$ и $H_1x = h_1$. Из $H_1\alpha = H_1\beta$ и $H_2\alpha = H_2\beta$ следует

$$p_1(\beta(a) - \alpha(a)) - \beta'(a) + \alpha'(a) - p_4(\beta'(b) - \alpha'(b)) = 0,$$

$$p_5(\beta(a) - \alpha(a)) - \beta'(a) + \alpha'(a) - p_8(\beta'(b) - \alpha'(b)) = 0.$$

Следовательно,

$$(p_1 - p_5)(\beta(a) - \alpha(a)) - (p_4 - p_8)(\beta'(b) - \alpha'(b)) = 0.$$

Если $\beta(a) = \alpha(a)$ и $\beta'(b) = \alpha'(b)$, то существование решения краевой задачи (1)-(3) следует из теоремы Tb11.1 – – 1.1 – – 1.17 работы [1]. Если $\beta(a) = \alpha(a)$, $\beta'(b) > \alpha'(b)$ или $\beta(a) > \alpha(a)$, $\beta'(b) = \alpha'(b)$, то существование решения краевой задачи (1)-(3) следует из теоремы Tb48t или теоремы Tb05tHC. Пусть $\beta(a) > \alpha(a)$ и $\beta'(b) > \alpha'(b)$. Тогда $\mathrm{sign}(p_1 - p_5)$=$\mathrm{sign}(p_4 - p_8)$ и существование решения краевой задачи (1)-(3) следует из теоремы Tb48t или теоремы Tb05tHC.

Список литературы

[1] Лепин А.Я., Лепин Л.А. Краевые задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Рига: Зинатне, 1988.

[2] Лепина Э.И. Краевые задачи с линейными ограничениями. Латв.мат.ежегодник. Рига: Зинатне, 1988, вып.32, 13 - 21.

[3] Schrader K.W. Existence theorems for second-order boundary value problems. J.Different.Equations. 1969. V.5. N 3. 572 - 584.

A. Lepin. On the linear boundary conditions.

Summary. Solvability of a two-point boundary value problem is considered under the linear boundary conditions.

1991 MSC 34B15

A. Lepins. Par lineāriem robežnosacījumiem.

Anotācija. Tiek apskatīta divpunktu robežproblēmas ar lineāriem robežnosacījumiem atrisināmība.

Institute of Mathematics
and Computer Science,
University of Latvia
Riga, Rainis blvd 29

Received 06.01.2006