Об одной краевой задаче вариационного исчисления

Ю.А.Клоков

Аннотация. Изучаются краевые задачи, решениями которых являются экстремали функционала

$$I(l) = \int_0^1 (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}} \exp(-\varphi(x, y, z))\, dt,$$

где $\varphi \in C^1(R^3)$.

УДК 517.927.4

Рассмотрим вопрос о существовании экстремалей функционала

$$I(l) = \int_0^1 (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}} \exp(-\varphi(x, y, z))dt, \tag{1}$$

где $\varphi \in C^1(R^3)$, на классе функций $x(t), y(t), z(t) \in C^2$, $I = [0, 1]$, удовлетворяющих краевым условиям $x(0) = y(0) = z(0) = 0$, $x(1) = A$, $\quad y(1) = B$, $\quad z(1) = C$, $\quad (A, B, C) \in R^3$. Соответствующие экстремали будут решениями краевой задачи (см.[1], стр.242).

$$x'' = \varphi_x(x'^2 - y'^2 - z'^2) + 2\varphi_y x'y' + 2\varphi_z x'z' \tag{2}$$

$$y'' = \varphi_y(-x'^2 + y'^2 - z'^2) + 2\varphi_x x'y' + 2\varphi_z y'z' \tag{3}$$

$$z'' = \varphi_z(-x'^2 - y'^2 + z'^2) + 2\varphi_x x'z' + 2\varphi_y y'z' \tag{4}$$

$$x(0) = y(0) = z(0) = 0, \quad x(1) = A, y(1) = B, z(1) = C, \tag{5}$$

где

$$\varphi_x = (\varphi)'_x, \quad \varphi_y = (\varphi)'_y \quad \varphi_z = (\varphi)'_z.$$

Теорема. Пусть существуют $a, b, c \in R$ такие, что

$$(x - a)\varphi_x(x, y, z) \le 0, \quad (y - b)\varphi_y(x, y, z) \le 0,$$

$$(z - c)\varphi_z(x, y, z) \le 0, \quad \forall (x, y, z) \in R^3.$$

Тогда задача (2)-(5) имеет решение для любых $A, B, C \in R^3$.

Эта теорема доказывается с помощью тех же рассуждений, которые были использованы при доказательстве теоремы 1 в работе [2]. Мы их не приводим. Рассмотрим частный случай, когда $\varphi = px + qy + rz$, $(p, q, r \in R^3, \quad p^2 + q^2 + r^2 > 0)$. Тогда получим уравнения

$$x'' = p(x'^2 - y'^2 - z'^2) + 2qx'y' + 2rx'z' \tag{6}$$

$$y'' = q(-x'^2 + y'^2 - z'^2) + 2px'y' + 2ry'z' \tag{7}$$

$$z'' = r(-x'^2 - y'^2 + z'^2) + 2px'z' + 2qy'z' \tag{8}$$

Нас будут интересовать множества тех значений $(A, B, C) \in R^3$, для которых решение задачи (5)-(8) существует и единственно. Заметим, что функция $\varphi = px + qy + rz$ не удовлетворяет условиям теоремы. Рассмотрим вначале два более простых случая. Первый $p = q = 0$ и второй, когда $r = 0$. В первом случае имеем систему

$$x'' = 2rx'z' \tag{9}$$

$$y'' = 2ry'z' \tag{10}$$

$$z'' = r(-x'^2 - y'^2 + z'^2) \tag{11}$$

Из (7), (8) находим

$$x' = x'_0 \exp(2rz), \quad x'_0 = x'(0) \tag{12}$$

$$y' = y'_0 \exp(2rz), \quad y'_0 = y'(0) \tag{13}$$

Откуда видно, что x', y' сохраняют свой знак. В частности, если $A = B = 0$, то $x(t) \equiv y(t) \equiv 0, \quad t \in I$ и из (11) находим $z'' = rz'^2, \quad z(0) = 0, \quad z(1) = C$. Откуда следует, что

$$z(t) = \frac{1}{r} \ln \frac{1}{1 - (1 - \exp(-rC))t}.$$

В данном случае задача (5)-(8) с краевыми условиями $x(0) = y(0) = z(0) = 0, \quad x(1) = 0, y(1) = 0, z(1) = C$ имеет единственное решение для любого $C \in R$.

Пусть $A^2 + B^2 > 0$. Тогда из (12),(13),(11) следует $z'' = r(z'^2 - ({x'_0}^2 + {y'_0}^2) \exp(4rz))$. Обозначим $z' = w, \quad w' = r(w^2 - ({x'_0}^2 + {y'_0}^2) \exp(4rz))$ или

$$\frac{dw}{dz} = \frac{r(w^2 - ({x'_0}^2 + {y'_0}^2) \exp(4rz))}{w}.$$

Интегрируя, находим

$$w^2 = {z'_0}^2 \exp(2rz) - ({x'_0}^2 + {y'_0}^2)(\exp(4rz) - \exp(2rz)).$$

Считая $z' \geq 0$ получим

$$z' = \exp(rz)(({x'_0}^2 + {y'_0}^2 + {z'_0}^2) - ({x'_0}^2 + {y'_0}^2) \exp(2rz))^{\frac{1}{2}}.$$

Откуда следует

$$\exp(2rz) = (1 - 2rz_0't + r^2t^2({x_0'}^2 + {y_0'}^2 + {z_0'}^2))^{-1}, \tag{14}$$

$$z = \frac{1}{2r}\ln[1 - 2rz_0't + r^2t^2({x_0'}^2 + {y_0'}^2 + {z_0'}^2)]^{-1}. \tag{15}$$

Это решение пригодно и в том случае, когда $z' < 0$. Полагая в (14) $t = 1$, тогда $z(1) = C$ найдем

$$\exp(-2rC) = 1 - 2rz_0' + r^2({x_0'}^2 + {y_0'}^2 + {z_0'}^2).$$

Откуда следует

$$\exp(-2rC) - (1 - rz_0')^2 = r^2({x_0'}^2 + {y_0'}^2) \tag{16}$$

Из (14), (12), (13) находим уравнения для x', y', интегрируя которые получим

$$x(t) = \frac{x_0'}{r\sqrt{{x_0'}^2 + {y_0'}^2}}\left[\arctan\frac{z_0'}{\sqrt{{x_0'}^2 + {y_0'}^2}} + \arctan\frac{r({x_0'}^2 + {y_0'}^2 + {z_0'}^2)t - z_0'}{\sqrt{{x_0'}^2 + {y_0'}^2}}\right] \tag{17}$$

$$y(t) = \frac{y_0'}{r\sqrt{{x_0'}^2 + {y_0'}^2}}\left[\arctan\frac{z_0'}{\sqrt{{x_0'}^2 + {y_0'}^2}} + \arctan\frac{r({x_0'}^2 + {y_0'}^2 + {z_0'}^2)t - z_0'}{\sqrt{{x_0'}^2 + {y_0'}^2}}\right] \tag{18}$$

Возводя в квадрат и складывая найдем

$$x^2(t) + y^2(t) = \frac{1}{r^2}\left[\arctan\frac{z_0'}{\sqrt{{x_0'}^2 + {y_0'}^2}} + \arctan\frac{r({x_0'}^2 + {y_0'}^2 + {z_0'}^2)t - z_0'}{\sqrt{{x_0'}^2 + {y_0'}^2}}\right]^2 < \frac{\pi^2}{r^2} \tag{19}$$

При $t = 1$ из (19) следует

$$A^2 + B^2 < \frac{\pi^2}{r^2} \tag{20}$$

Из (12), (13) получим $x'y_0' = y'x_0'$ или $x(t)y_0' = y(t)x_0'$. При $t = 1$ найдем $Ay_0' = Bx_0'$, так что

$$\frac{x_0'}{\sqrt{{x_0'}^2 + {y_0'}^2}} = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \quad \frac{y_0'}{\sqrt{{x_0'}^2 + {y_0'}^2}} = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \tag{21}$$

Полагая в (17) $t = 1$, и используя (21) и (16), получим

$$r\sqrt{A^2 + B^2} = \left[\arctan\frac{\exp(rC) - u}{\sqrt{1 - u^2}} - \arctan\frac{u - \exp(-rC)}{\sqrt{1 - u^2}}\right], \tag{22}$$

где через u, обозначено

$$u = \exp(rC)(1 - rz_0') \tag{23}$$

Из (22) следует, что $u = \cos(r\sqrt{A^2 + B^2})$, а из (23)

$$z_0' = \frac{1}{r}\left[1 - \exp(-rC)\cdot\cos(r\sqrt{A^2 + B^2})\right] \tag{24}$$

Из (16), (24), (21) находим

$$x_0' = A\frac{\exp(-rC)\sin(r\sqrt{A^2+B^2})}{r\sqrt{A^2+B^2}}, \quad y_0' = B\frac{\exp(-rC)\sin(r\sqrt{A^2+B^2})}{r\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Таким образом задача (5)-(8), в случае $p = q = 0$, имеет единственное решение только если

$$A^2 + B^2 < \frac{\pi^2}{r^2}, \quad C \in R,$$

то есть решение существует внутри кругового цилиндра с осью z и с радиусом равным $r^{-1}\pi$. Подсчитаем для этой задачи геодезическое расстояние (значение функционала (1) на экстремали соединяющей две рассматриваемые точки $(0,0,0)$ и A, B, C). Используя формулы (15),(17),(18) и значения для x_0', y_0', z_0' найдем

$$I^2(l) = 2\exp(-rC)[\cosh(rC) - \cos(r\sqrt{A^2+B^2})] \cdot r^{-2}$$

Рассмотрим теперь задачу (5)-(8) в случае, когда $r = 0$. Тогда получим систему

$$x'' = p(x'^2 - y'^2 - z'^2) + 2qx'y' \tag{25}$$

$$y'' = q(-x'^2 + y'^2 - z'^2) + 2px'y' \tag{26}$$

$$z'' = 2px'z' + 2qy'z' \tag{27}$$

Из (27) следует

$$z' = z_0' \exp(2px + 2qy),$$

то есть z' сохраняет свой знак и значит $z(t)$ изменяется монотонно. Пусть $C > 0$. Тогда $z(t)$ монотонно возрастает от 0 до C, $\quad 0 \le z \le C$. Возьмем z в качестве новой независимой переменной (вместо t.) Обозначим

$$x(t) = x(t(z)) = u(z), \quad y(t) = y(t(z)) = v(z)$$

Тогда

$$u' = \frac{du}{dz} = \frac{x'}{z'}, v' = \frac{dv}{dz} = \frac{y'}{z'}, \frac{d^2u}{dz^2} = \frac{1}{z'^3}(x''z' - x'z''), \frac{d^2v}{dz^2} = \frac{1}{z'^3}(y''z' - y'z'')$$

Используя (25)-(27), найдем

$$\frac{d^2u}{dz^2} = -p\left[(\frac{du}{dz})^2 + (\frac{dv}{dz})^2 + 1\right] \tag{28}$$

$$\frac{d^2v}{dz^2} = -q\left[(\frac{du}{dz})^2 + (\frac{dv}{dz})^2 + 1\right] \tag{29}$$

$$u(0) = 0, \quad u(C) = A, \quad v(0) = 0, \quad v(C) = B. \tag{30}$$

Из (28),(29) последовательно находим

$$qu'' = pv'', \quad qu' - pv' = qu_0' - pv_0', \quad qu - pv = (qu_0' - pv_0')z.$$

При $z = C$ получим $qA - pB = (qu_0' - pv_0')C$,

$$qu(z) - pv(z) = \frac{qA - pB}{C} z. \tag{31}$$

Используя (31), исключим функцию v из (28) и тогда получим уравнение, содержащее только функцию $u(z)$. Аналогично из (29) можно получить уравнение содержащее только функцию $v(z)$. Интегрируя с учетом граничных условий, найдем

$$u(z) = \frac{p}{p^2 + q^2} \cdot \omega(z) + \frac{q}{p^2 + q^2} \frac{qA - pB}{C} z, \tag{32}$$

$$v(z) = \frac{q}{p^2 + q^2} \cdot \omega(z) - \frac{p}{p^2 + q^2} \frac{qA - pB}{C} z, \tag{33}$$

где $\omega(z)$ определяется условиями

$$\omega'' = -[\omega'^2 + \sigma^2], \quad \omega(0) = 0, \quad \omega(C) = Ap + Bq,$$

$$\sigma^2 = (p^2 + q^2) + (\frac{qA - pB}{C})^2, \tag{34}$$

так что

$$\omega(z) = \ln[\cos(\sigma z) + \frac{\omega_0'}{\sigma} \sin(\sigma z)], \tag{35}$$

$$\omega_0' = \frac{\sigma}{\sin \sigma C}(e^{Ap+Bq} - \cos \sigma C).$$

Из (35) видно, что задача (28)-(30) имеет решение только если $\sigma C < \pi$, или используя (34)

$$(qA - pB)^2 + (p^2 + q^2)C^2 < \pi^2. \tag{36}$$

Таким образом множество значений A, B, C, для которых задача (5)-(8) (в случае $r = 0$) имеет единственное решение, есть круговой цилиндр, ось которого есть прямая, определяемая пересечением плоскостей $z = 0, \quad qx - py = 0$, а радиус $(p^2 + q^2)^{-\frac{1}{2}}\pi$. Можно найти также параметрические уравнения для x, y, z. Из (27),(32),(33),(35) получим

$$\frac{dz}{dt} = z_0' \exp \omega(z), \quad \frac{dz}{dt} = z_0'(\sigma \cos(\sigma z) + \omega_0' \sin(\sigma z))^2 \sigma^{-2}. \tag{37}$$

Откуда следует

$$\frac{1}{\sigma \cot(\sigma C) + \omega_0'} - z_0' \sigma^2 (1 - t) = \frac{1}{\sigma \cot(\sigma z) + \omega_0'},$$

так как $z(0) = 0, \quad$ то

$$z_0' = \frac{\sin(\sigma C)}{\sigma^3} \exp(-(Ap + Bq))$$

Таким образом,

$$z(t) = \frac{1}{\sigma} \operatorname{arcctg} \frac{\exp(Ap + Bq)(1 - t) + t\cos(\sigma C)}{t \sin(\sigma C)}, \quad t \in (0, 1], z(0) = 0. \tag{38}$$

(В качестве arcctg берется главное значение этой функции).

$$\cot(\sigma z) = \frac{(\exp(Ap+Bq))(1-t)+t\cos(\sigma C)}{t\sin(\sigma C)}, \quad t>0.$$

Подставляя в (35), найдем

$$\omega(z(t)) = \ln \frac{\exp(Ap+Bq)}{[t^2+(1-t)^2\exp(2(Ap+Bq))+2t(1-t)\cos(\sigma C)\exp(Ap+Bq)]^{\frac{1}{2}}}.$$

Теперь из (32), (33) можно найти

$$x(t) = u(z(t)) = \frac{p}{p^2+q^2}\omega(z(t)) + \frac{q}{p^2+q^2}\frac{qA-pB}{C}z(t)$$

$$y(t) = v(z(t)) = \frac{q}{p^2+q^2}\omega(z(t)) - \frac{p}{p^2+q^2}\frac{qA-pB}{C}z(t)$$

В случае произвольных p, q, r с помощью сложных и весьма длительных вычислений, которые мы благоразумно опускаем, можно получить следующий результат. Решение задачи (5)-(8) существует и единственно, если A, B, C удовлетворяют неравенству

$$(p^2+q^2+r^2)(qA-pB)^2+[C(p^2+q^2)-r(pA+qB)]^2 < (p^2+q^2)\pi^2 \tag{39}$$

В пространстве (A, B, C), это круговой цилиндр, ось которого имеет параметрические уравнения

$$x = ps, \quad y = qs, \quad z = rs, \quad (s \in R)$$

и радиус $(p^2+q^2+r^2)^{-\frac{1}{2}}\pi$.

Если в (39) возвести скобки в квадрат и произвести некоторые сокращения, то получим вместо (39) условие

$$(qA-pB)^2+C^2(p^2+q^2)+r^2(A^2+B^2)-2Cr(pA+qB) < \pi^2. \tag{40}$$

Полагая в (40) $r=0$, получим условие (36), а если положим $p=q=0$, то получим условие (20)

$$r^2(A^2+B^2) < \pi^2. \quad C \in R.$$

Литература

1.Смирнов В.И.II Курс высшей математики. 1951. Т.IV, М.-Л.

2.Клоков Ю.А. Об экстремалях одного функционала на плоскости. Дифференциальные уравнения, Т. 40 (2004), N 3, стр. 324-329.

Yu.A. Klokov. On some boundary value problem of the calculus of variations.

Summary. Boundary value problems related to the functional

$$I(l) = \int_0^1 (x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{1}{2}}\exp(-\varphi(x,y,z))dt,$$

where $\varphi \in C^1(R^3)$, are investigated.

1991 MSC 34B15, 49J05

J.A. Klokovs. Par vienu variāciju rēķinu robežproblēmu.

Anotācija. Tiek pētītas robežproblēmas, kuru atrisinājumi ir funkcionāla

$$I(l) = \int_0^1 (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}} \exp(-\varphi(x, y, z))dt$$

ekstremāles, kur $\varphi \in C^1(R^3)$.

Institute of Mathematics
and Computer Science,
University of Latvia
Riga, Rainis blvd 29

Received 07.11.2005