

## Связь краевых задач

А.Я.Лепин, Л.А.Лепин

**Аннотация.** Для дифференциального уравнения второго порядка показано, как связаны решения одной краевой задачи с решениями другой краевой задачи.

УДК 517.927

Рассмотрим краевую задачу

$$x'' = f(t, x, x'), \quad t \in I = [a, b], \quad (1)$$

$$H_1(x(a), x(b), x'(a), x'(b)) = h_1, \quad H_2(x(a), x(b), x'(a), x'(b)) = h_2, \quad (2)$$

$$\alpha \leq x \leq \beta, \quad U, \quad (3)$$

где  $f \in Car([a, b] \times R^2, R)$ ,  $H_1, H_2 \in C(R^4, R)$ ,  $\alpha$  - обобщенная нижняя функция,  $\beta$  - обобщенная верхняя функция,  $U$  есть подмножество множества условий:

$$1. \alpha(a) = \beta(a); \quad 2. \alpha'(a) < \beta'(a); \quad 3. \alpha'(a) = \beta'(a); \quad 4. \alpha'(a) > \beta'(a);$$

$$5. \alpha(b) = \beta(b); \quad 6. \alpha'(b) < \beta'(b); \quad 7. \alpha'(b) = \beta'(b); \quad 8. \alpha'(b) > \beta'(b);$$

$$9. (\forall x, y \in SG(I, R))((x \leq y \wedge x'(a) \leq y'(a) \Rightarrow x'(b) \leq y'(b)) \\ \wedge (x \leq y \wedge x'(b) \geq y'(b) \Rightarrow x'(a) \geq y'(a)));$$

$$A. \alpha \in SG(I, R); \quad B. \beta \in SG(I, R); \quad C. H_1\alpha = H_1\beta; \quad D. H_2\alpha = H_2\beta,$$

$SG(I, R)$  - множество обобщенных решений уравнения (1), удовлетворяющих неравенствам  $\alpha \leq x \leq \beta$ .

**Определение 1** Будем говорить, что функция  $H \in C(R^4, R)$  имеет тип монотонности  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ , где  $\sigma_i \in \{0, -, +, 1\}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , если при  $\sigma_i = 0$  функция  $H$  не зависит от  $i$ -го аргумента, при  $\sigma_i = -$  функция  $H$  не возрастает по  $i$ -му аргументу, при  $\sigma_i = +$  функция  $H$  не убывает по  $i$ -му аргументу, а при  $\sigma_i = 1$  на  $i$ -ый аргумент функции  $H$  условия не накладываются. Класс монотонности  $M(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$  состоит из функций, имеющих тип монотонности  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ .

В работе [1] найдены все теоремы существования обобщенного решения краевой задачи вида (1) – (3).

Т. Для любых  $H_1 \in M(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ ,  $H_2 \in M(\sigma_5, \sigma_6, \sigma_7, \sigma_8)$ ,  $h_1 \in [H_1\alpha, H_1\beta]$   $h_2 \in [H_2\alpha, H_2\beta]$  из  $H_1\alpha \leq H_1\beta$ ,  $H_2\alpha \leq H_2\beta$  и условий  $U_1$  следует существование обобщенного решения краевой задачи (1) – (3) при  $U = U_1$ .

Коротко теорему Т будем записывать так.

Т.  $\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4.\sigma_5\sigma_6\sigma_7\sigma_8.u_1u_2u_3u_4u_5u_6u_7u_8u_9u_{AUBUC}uD$ ,

где  $u_i = i$ , если  $i$ -е условие входит в  $U_1$  и  $u_i$  пусто в противном случае. Наряду с теоремами Т в работе [1] рассматривались теоремы вида

ТАЕ. Для любых  $H_1 \in M(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ ,  $H_2 \in M(\sigma_5, \sigma_6, \sigma_7, \sigma_8)$  и  $h_1 \in [H_1\alpha, H_1\beta]$  найдется  $h_2 \in [H_2\alpha, H_2\beta]$  такое, что из  $H_1\alpha \leq H_1\beta$ ,  $H_2\alpha \leq H_2\beta$  и условий  $U_2$  следует существование обобщенного решения краевой задачи (1)-(3) при  $U = U_2$ .

В работе [1] была доказана теорема.

**Теорема 1.** Если справедлива теорема Т, то справедлива теорема ТАЕ для  $U_2 = U_1 \setminus \{H_2\alpha = H_2\beta\}$ .

Пусть  $M_1 = M(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$  и  $M_2 = M(\sigma_5, \sigma_6, \sigma_7, \sigma_8)$ . Тогда теоремы Т и ТАЕ полностью определяются набором  $(M_1, M_2, U)$ . Множество всех наборов  $(M_1, M_2, U)$  обозначим через ТЕ и введем частичный порядок в ТЕ следующим образом:  $(M_1, M_2, U_1) \leq (M_3, M_4, U_2)$ , если  $M_1 \subset M_3$ ,  $M_2 \subset M_4$  и  $U_2 \subset U_1$ . Множество наборов из ТЕ, для которых справедлива теорема Т, обозначим через Т и будем называть множеством теорем. Аналогично множество наборов из ТЕ, для которых справедлива теорема ТАЕ, обозначим через ТАЕ и будем называть множеством теорем.

Возникает вопрос. Совпадает ли множество теорем, даваемых теоремой 1, с ТАЕ? Множество теорем из ТАЕ, даваемых теоремой 1, обозначим через ТАЕ\*.

**Теорема 2.** ТАЕ=ТАЕ\*∪Т.

**Доказательство.** Пусть  $x \in$ ТАЕ. Если  $x$  содержит условие D, то  $x \in$ Т. Если  $x$  не содержит условия D, то пусть  $y \in$ ТЕ отличается от  $x$  только наличием условия D. Ясно, что  $y \in$ ТАЕ и, следовательно,  $y \in$ Т. По теореме 1,  $x \in$ ТАЕ\*.

Множество максимальных элементов из ТАЕ обозначим через ТАЕМ и назовем множеством максимальных теорем. Теорема 1 показывает, что максимальные теоремы из ТАЕМ легко получаются из максимальных теорем для Т (приложение 1 работы [1]) отбрасыванием условия D. Из максимальных теорем ТАЕМ выделим порождающие теоремы, используя следующие симметрии. Замена в уравнении (1) независимой переменной  $t$  на  $-t$ . При этом теорема

$$ТАЕМ.\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4.\sigma_5\sigma_6\sigma_7\sigma_8.u_1u_2u_3u_4u_5u_6u_7u_8u_9u_{AUBUC}uD \quad (4)$$

переходит в теорему

ТАЕМt.  $\sigma_2\sigma_1\sigma'_4\sigma'_3.\sigma_6\sigma_5\sigma'_8\sigma'_7.u_5u_8u_7u_6u_1u_4u_3u_2u_9u_{AUBUC}uD$ , где  $1' = 1$ ,  $+' = -$ ,  $- ' = +$ ,  $0' = 0$ . Замена в уравнении (1)  $x$  на  $-x$  переводит теорему (4) в теорему

ТАЕМx.  $\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4.\sigma_5\sigma_6\sigma_7\sigma_8.u_1u_2u_3u_4u_5u_6u_7u_8u_9u_{BUAUC}uD$ . Если  $u_c = C$ , то замена  $H_1$  на  $-H_1$  переводит теорему (4) в теорему

ТАЕМC.  $\sigma'_1\sigma'_2\sigma'_3\sigma'_4.\sigma_5\sigma_6\sigma_7\sigma_8.u_1u_2u_3u_4u_5u_6u_7u_8u_9u_{AUBUC}uD$ . Замена  $H_2$  на  $-H_2$  переводит теорему (4) в теорему

ТАЕМD.  $\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4.\sigma'_5\sigma'_6\sigma'_7\sigma'_8.u_1u_2u_3u_4u_5u_6u_7u_8u_9u_{AUBUC}uD$ .

При этом получают следующие порождающие теоремы.

ТАЕG001. 1 1 - +. + + 0 0

ТАЕG002. 1 1 - +. + - 0 0

ТАЕG003. 1 - - +. + - 0 -

ТАЕG004. 1 - - 0. + 1 0 -

ТАЕG005. - - - 0. + 1 - 0

TAEG006. -- 0 0. 1 1 + -  
 TAEG007. 1 1 - +. 1 + + 0. 1  
 TAEG008. 1 - - +. 1 + 0 +. 1  
 TAEG009. 1 - - 0. 1 1 + -. 1  
 TAEG010. - 1 - +. + + + 0. 2  
 TAEG011. - - - 0. + 1 + -. 2  
 TAEG012. - 1 1 +. + + 1 0. 3  
 TAEG013. - - 1 +. 0 + 1 +. 3  
 TAEG014. - - 1 0. + 1 1 -. 3  
 TAEG015. - - - +. + - - -. 3  
 TAEG016. - - 0 +. + + - +. 3  
 TAEG017. - 1 1 +. + + - 0. 4  
 TAEG018. - 1 1 +. 0 + + 0. 4  
 TAEG019. - 1 + +. + + 1 0. 4  
 TAEG020. - - 1 +. 0 + + +. 4  
 TAEG021. - - 1 0. + 1 - -. 4  
 TAEG022. - - + +. 0 + 1 +. 4  
 TAEG023. - - + 0. + 1 1 -. 4  
 TAEG024. - - - +. + - - -. 4  
 TAEG025. - - 0 +. + + - +. 4  
 TAEG026. 1 1 1 +. 1 + 1 0. 1 3  
 TAEG027. 1 - 1 +. 1 + 1 +. 1 3  
 TAEG028. 1 - 1 0. 1 1 1 +. 1 3  
 TAEG029. 1 1 1 1. 1 1 1 1. 1 4  
 TAEG030. 1 1 - +. 1 1 + -. 1 5  
 TAEG031. 1 - - 1. 1 + + +. 1 6  
 TAEG032. 1 - - -. 1 + + 1. 1 6  
 TAEG033. 1 - - 1. 1 + + 1. 1 7  
 TAEG034. 1 - - +. 1 + + -. 1 8  
 TAEG035. 1 1 1 1. 1 1 1 1. 2 3  
 TAEG036. 1 1 1 1. 1 1 1 1. 2 4  
 TAEG037. - - - 1. + + + +. 2 6  
 TAEG038. - - - -. + + + 1. 2 6  
 TAEG039. - - - 1. + + + 1. 2 7  
 TAEG040. - - - +. + + + -. 2 8  
 TAEG041. 1 1 1 1. 1 1 1 1. 3 4  
 TAEG042. - - 1 1. + + 1 +. 3 6  
 TAEG043. - - 1 -. + + 1 1. 3 6  
 TAEG044. - - + -. + - - -. 3 6  
 TAEG045. - - 1 1. + + 1 1. 3 7  
 TAEG046. - - + -. + - - -. 3 7  
 TAEG047. - - 1 1. + + - +. 4 6  
 TAEG048. - - 1 1. 0 0 + +. 4 6  
 TAEG049. - - 1 -. + + - 1. 4 6  
 TAEG050. - - + -. + + 1 1. 4 6  
 TAEG051. - - + -. + - - -. 4 6

TAEG052. 1 1 1 +. 1 1 1 +. 1 3 5  
 TAEG053. 1 - 1 1. 1 + 1 +. 1 3 6  
 TAEG054. 1 - 1 -. 1 + 1 1. 1 3 6  
 TAEG055. 1 - 1 1. 1 + 1 1. 1 3 7  
 TAEG056. 1 - 1 +. 1 + 1 -. 1 3 8  
 TAEG057. 1 1 1 1. 1 1 1 1. 1 3 5 7  
 TAEG058. - - - +. + - - -. A  
 TAEG059. - - - 0. + 1 - -. A  
 TAEG060. - - 0 0. 1 1 1 1. A  
 TAEG061. 1 - - +. 1 + + +. 1 A  
 TAEG062. 1 - - 0. 1 1 1 1. 1 A  
 TAEG063. - - - +. + + + +. 2 A  
 TAEG064. - - - 0. 1 1 1 1. 2 A  
 TAEG065. - - 1 +. + + 1 +. 3 A  
 TAEG066. - - 1 0. 1 1 1 1. 3 A  
 TAEG067. - - + +. + + 1 +. 4 A  
 TAEG068. - - + 0. 1 1 1 1. 4 A  
 TAEG069. 1 - 1 0. 1 1 1 1. 1 3 A  
 TAEG070. 1 1 - +. 1 1 1 1. 1 5 A  
 TAEG071. 1 - - -. 1 1 1 1. 1 6 A  
 TAEG072. 1 - - 1. 1 1 1 1. 1 7 A  
 TAEG073. 1 - - +. 1 1 1 1. 1 8 A  
 TAEG074. - - - -. 1 1 1 1. 2 6 A  
 TAEG075. - - - 1. 1 1 1 1. 2 7 A  
 TAEG076. - - - +. 1 1 1 1. 2 8 A  
 TAEG077. - - 1 -. 1 1 1 1. 3 6 A  
 TAEG078. - - 1 1. 1 1 1 1. 3 7 A  
 TAEG079. - - + -. 1 1 1 1. 4 6 A  
 TAEG080. 1 1 1 +. 1 1 1 1. 1 3 5 A  
 TAEG081. 1 - 1 -. 1 1 1 1. 1 3 6 A  
 TAEG082. 1 - 1 1. 1 1 1 1. 1 3 7 A  
 TAEG083. 1 - 1 +. 1 1 1 1. 1 3 8 A  
 TAEG084. - 1 + +. 1 0 0 0. 3 9 A  
 TAEG085. - 1 + +. 1 0 0 0. 4 9 A  
 TAEG086. - - + 1. 1 0 0 0. 3 6 9 A  
 TAEG087. - - + 1. 1 0 0 0. 4 6 9 A  
 TAEG088. 1 1 1 1. + - - -. 9 A B  
 TAEG089. 1 1 1 1. - - 0 0. 9 A B  
 TAEG090. 1 - - -. + 1 - -. 9 A B  
 TAEG091. - - 0 0. 1 1 1 1. 9 A B  
 TAEG092. 1 1 1 1. 1 + + +. 1 9 A B  
 TAEG093. 1 - - -. 1 1 1 1. 1 9 A B  
 TAEG094. 1 1 1 1. + + + +. 2 9 A B  
 TAEG095. 1 - - -. + + 1 +. 2 9 A B  
 TAEG096. 1 - - -. + + - 1. 2 9 A B  
 TAEG097. - - 1 -. 1 + + +. 2 9 A B

TAEG098. -- + 1. 1 + + +. 2 9 A B  
 TAEG099. - - - -. 1 1 1 1. 2 9 A B  
 TAEG100. 1 1 1 1. + + 1 +. 3 9 A B  
 TAEG101. 1 - - -. + + - 1. 3 9 A B  
 TAEG102. - - 1 -. 1 1 1 1. 3 9 A B  
 TAEG103. - - + 1. 1 + + +. 3 9 A B  
 TAEG104. 1 1 1 1. + + - 0. 4 9 A B  
 TAEG105. - 1 + +. + + 1 +. 4 9 A B  
 TAEG106. - - 1 -. + 1 - -. 4 9 A B  
 TAEG107. - - + 0. 1 1 1 1. 4 9 A B  
 TAEG108. 1 1 1 1. 1 + 1 +. 1 3 9 A B  
 TAEG109. 1 - 1 -. 1 1 1 1. 1 3 9 A B  
 TAEG110. 1 1 1 1. 1 1 1 1. 1 5 9 A B  
 TAEG111. 1 1 1 1. 1 + 1 1. 1 7 9 A B  
 TAEG112. 1 - 1 1. 1 1 1 1. 1 7 9 A B  
 TAEG113. 1 1 1 1. 1 1 1 1. 1 8 9 A B  
 TAEG114. 1 1 1 1. 1 1 1 1. 2 7 9 A B  
 TAEG115. 1 1 1 1. 1 1 1 1. 2 8 9 A B  
 TAEG116. 1 1 1 1. + + 1 1. 3 7 9 A B  
 TAEG117. - - 1 1. 1 1 1 1. 3 7 9 A B  
 TAEG118. 1 1 1 1. + + - +. 4 6 9 A B  
 TAEG119. - - + -. 1 1 1 1. 4 6 9 A B  
 TAEG120. 1 1 + -. + + 0 0. C  
 TAEG121. 1 1 + -. + - 0 0. C  
 TAEG122. 1 1 0 0. 1 1 0 0. C  
 TAEG123. 1 + + -. + - 0 -. C  
 TAEG124. 1 + + 0. + 1 0 -. C  
 TAEG125. 1 + 0 +. + + 0 -. C  
 TAEG126. + + + 0. + 1 - 0. C  
 TAEG127. + + 0 0. 1 1 + -. C  
 TAEG128. + - - 0. + 1 + -. C  
 TAEG129. + - 0 0. 1 1 + -. C  
 TAEG130. 1 1 + -. 1 + + 0. 1 C  
 TAEG131. 1 + + -. 1 + 0 +. 1 C  
 TAEG132. 1 + + 0. 1 1 + -. 1 C  
 TAEG133. 1 + 0 +. 1 + + -. 1 C  
 TAEG134. + 1 + -. + + + 0. 2 C  
 TAEG135. + + + 0. + 1 + -. 2 C  
 TAEG136. + 1 1 -. + + 1 0. 3 C  
 TAEG137. + 1 - 0. 0 1 0 0. 3 C  
 TAEG138. + + 1 -. 0 + 1 +. 3 C  
 TAEG139. + + 1 0. + 1 1 -. 3 C  
 TAEG140. + + + -. + - - -. 3 C  
 TAEG141. + + - +. + + 0 -. 3 C  
 TAEG142. + + 0 -. + + - +. 3 C  
 TAEG143. + - - -. + + + -. 3 C

TAEG144. 0 1 1 0. 0 1 1 0. 3 C  
 TAEG145. 0 1 0 0. + 1 - 0. 3 C  
 TAEG146. 0 + 1 +. + + 1 -. 3 C  
 TAEG147. + 1 1 -. + + - 0. 4 C  
 TAEG148. + 1 1 -. 0 + + 0. 4 C  
 TAEG149. + 1 - -. + + 1 0. 4 C  
 TAEG150. + 1 - 0. 0 1 0 0. 4 C  
 TAEG151. + + 1 -. 0 + + +. 4 C  
 TAEG152. + + 1 0. + 1 - -. 4 C  
 TAEG153. + + + -. + - - -. 4 C  
 TAEG154. + + - +. + + 0 -. 4 C  
 TAEG155. + + - -. 0 + 1 +. 4 C  
 TAEG156. + + - 0. + 1 1 -. 4 C  
 TAEG157. + + 0 -. + + - +. 4 C  
 TAEG158. + - - -. + + + -. 4 C  
 TAEG159. 0 1 1 0. 0 1 1 0. 4 C  
 TAEG160. 0 1 0 0. + 1 - 0. 4 C  
 TAEG161. 0 + 1 +. + + - -. 4 C  
 TAEG162. 0 + + +. + + 1 -. 4 C  
 TAEG163. 0 + + 0. + 1 1 -. 4 C  
 TAEG164. 1 1 1 -. 1 + 1 0. 1 3 C  
 TAEG165. 1 1 1 0. 1 1 1 0. 1 3 C  
 TAEG166. 1 + 1 +. 1 + 1 -. 1 3 C  
 TAEG167. 1 + 1 -. 1 + 1 +. 1 3 C  
 TAEG168. 1 + 1 0. 1 1 1 +. 1 3 C  
 TAEG169. 1 1 + -. 1 1 + -. 1 5 C  
 TAEG170. 1 + + 1. 1 + + +. 1 6 C  
 TAEG171. 1 + + +. 1 + + 1. 1 6 C  
 TAEG172. 1 + + 1. 1 + + 1. 1 7 C  
 TAEG173. 1 + + -. 1 + + -. 1 8 C  
 TAEG174. + + + 1. + + + +. 2 6 C  
 TAEG175. + + + +. + + + 1. 2 6 C  
 TAEG176. + + + 1. + + + 1. 2 7 C  
 TAEG177. + + + -. + + + -. 2 8 C  
 TAEG178. + + 1 1. + + 1 +. 3 6 C  
 TAEG179. + + 1 +. + + 1 1. 3 6 C  
 TAEG180. + + - +. + - - -. 3 6 C  
 TAEG181. + - - -. + + - +. 3 6 C  
 TAEG182. + 0 - 1. 0 0 0 1. 3 6 C  
 TAEG183. 0 0 1 1. 0 0 1 1. 3 6 C  
 TAEG184. 0 0 0 1. + 0 - 1. 3 6 C  
 TAEG185. + + 1 1. + + 1 1. 3 7 C  
 TAEG186. + + - +. + - - -. 3 7 C  
 TAEG187. + - - -. + + - +. 3 7 C  
 TAEG188. + + 1 1. + + - +. 4 6 C  
 TAEG189. + + 1 1. 0 0 + +. 4 6 C

TAEG190. + + 1 +. + + - 1. 4 6 C  
 TAEG191. + + - +. + + 1 1. 4 6 C  
 TAEG192. + + - +. + - - -. 4 6 C  
 TAEG193. + - - -. + + - +. 4 6 C  
 TAEG194. + 0 - 1. 0 0 0 1. 4 6 C  
 TAEG195. 0 0 1 1. 0 0 1 1. 4 6 C  
 TAEG196. 0 0 1 0. 0 + 1 +. 4 6 C  
 TAEG197. 0 0 + +. + + 1 1. 4 6 C  
 TAEG198. 1 1 1 -. 1 1 1 +. 1 3 5 C  
 TAEG199. 1 + 1 1. 1 + 1 +. 1 3 6 C  
 TAEG200. 1 + 1 +. 1 + 1 1. 1 3 6 C  
 TAEG201. 1 0 1 1. 1 0 1 1. 1 3 6 C  
 TAEG202. 1 + 1 1. 1 + 1 1. 1 3 7 C  
 TAEG203. 1 + 1 -. 1 + 1 -. 1 3 8 C  
 TAEG204. 1 1 1 1. 1 1 1 1. A C

Из этих порождающих теорем получаются все максимальные теоремы ТАЕМ с помощью приведенных выше симметрий.

## Список литературы

- [1] Лепин А.Я., Лепин Л.А. *Краевые задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка*, Зинатне, Рига, 1988.

**A. Lepin and L. Lepin. On relationship between boundary value problems.**  
**Summary.** Relationship of two boundary value problems for the second order differential equations is discussed.  
 1991 MSC 34B15

**A. Lepins, L. Lepins. Par robežproblēmu sakarību.**  
**Anotācija.** Otrās kārtas diferenciālvienādojumam tiek diskutēta robežproblēmu sakarība.

Institute of Mathematics  
 and Computer Science,  
 University of Latvia  
 Riga, Rainis blvd 29

Received 08.12.2004