Свойства верхних и нижних функций

А.Я.Лепин

Аннотация. Для дифференциального уравнения второго порядка показывается, что верхние и нижние функции можно заменить на абсолютно непрерывные верхние и нижние функции.

УДК 517.927

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x'' = f(t, x, x'), \quad t \in I = [a, b], \tag{1}$$

где функция f удовлетворяет условиям Каратеодори. В работе [1] И.Т.Кигурадзе дал определения верхних и нижних функций уравнения (1), которое приведем в удобной для нас форме.

Определение 1. Функции $\alpha, \beta : I \to R$, удовлетворяющие условию Липшица, называются нижней и верхней функциями уравнения (1), если для любых точек $t_1 \in (a, b)$ и $t_2 \in (t_1, b)$, в которых существуют соответствующие производные, выполняются неравенства

$$\alpha'(t_2) - \alpha'(t_1) \geq \int_{t_1}^{t_2} f(t, \alpha(t), \alpha'(t))dt,$$

$$\beta'(t_2) - \beta'(t_1) \leq \int_{t_1}^{t_2} f(t, \beta(t), \beta'(t))dt.$$

Для так определенных нижних и верхних функций справедливы следующие разложения: $\alpha' = \alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13}$, $\beta' = \beta_{11} + \beta_{12} + \beta_{13}$, где α_{11}, β_{11} – абсолютно непрерывные функции, α_{12}, β_{12} – сингулярные функции и α_{13}, β_{13} – функции скачков. При этом α_{12} и α_{13} не убывают, а β_{12} и β_{13} не возрастают.

Фиксируем нижнюю функцию α уравнения (1) и верхнюю функцию β уравнения (1). Пусть $\alpha \leq \beta$. Покажем, что существуют нижняя функция $\alpha_* \in AC^1(I, R)$ и верхняя функция $\beta_* \in AC^1(I, R)$ со следующими свойствами:

$$\begin{gathered}\alpha \leq \alpha_* \leq \beta_* \leq \beta, \quad \alpha(a) = \alpha_*(a), \quad \alpha'(a) = \alpha'_*(a), \quad \alpha(b) = \alpha_*(b), \quad \alpha'(b) = \alpha'_*(b), \\ \beta(a) = \beta_*(a), \quad \beta'(a) = \beta'_*(a), \quad \beta(b) = \beta_*(b), \quad \beta'(b) = \beta'_*(b).\end{gathered} \tag{2}$$

Теорема 1 *Найдутся нижняя функция $\alpha_* \in AC^1(I,R)$ и верхняя функция $\beta_* \in AC^1(I,R)$ такие, что выполняются условия (2).*

Доказательство. Рассмотрим построение нижней функции α_*. Из локальной разрешимости (см.[2]) для α следует существование $\delta > 0$ такого, что для любых $t_1 \in [a,b)$ и $t_2 \in (t_1,b]$ из $t_2 - t_1 < \delta$ следует существование решения $x : [t_1,t_2] \to R$ уравнения (1) такого, что $x(t_1) = \alpha(t_1)$, $x(t_2) = \alpha(t_2)$ и $\alpha(t) \le x(t) \le \beta(t)$, $t \in [t_1,t_2]$. Следовательно, существует последовательность $\tau_i \in (a,b)$, $i \in \{...,-1,0,1,...\}$ такая, что $... < \tau_{-1} < \tau_0 < \tau_1 < ...$, $\lim_{i\to-\infty} \tau_i = a$, $\lim_{i\to+\infty} \tau_i = b$ и решения $x_i : [\tau_i,\tau_{i+1}] \to R$ уравнения (1) такие, что $x_i(\tau_i) = \alpha(\tau_i)$, $x_i(\tau_{i+1}) = \alpha(\tau_{i+1})$ и $\alpha(t) \le x_i(t) \le \beta(t)$, $t \in [\tau_i,\tau_{i+1}]$. Определим функцию $\alpha_0 : I \to R$ следующим образом: $\alpha_0(a) = \alpha(a)$, $\alpha_0(t) = x_i(t)$, $t \in [\tau_i,\tau_{i+1}]$, $i \in \{...,-1,0,1,...\}$ и $\alpha_0(b) = \alpha(b)$. Покажем, что $\lim_{t\to a+} \alpha_0(t) = \alpha(a)$ и $\lim_{t\to b-} \alpha_0(t) = \alpha(b)$. Докажем первое равенство. Предположим противное. Тогда найдется последовательность $t_n \in (a,b)$, $n = 1,2,...$ такая, что $\lim_{n\to\infty} t_n = a$, $\lim_{n\to\infty} \alpha_0(t_n) = c > \alpha(a)$ и $\alpha_0'(t_n) = 0$, $n = 1,2,....$ Но решение x задачи Коши

$$x'' = f(t,x,x'), \quad x(t_n) = \alpha_0(t_n), \quad x'(t_n) = \alpha_0'(t_n) = 0$$

при достаточно большом n удовлетворяет неравенству $x(t) > \alpha(t)$, $t \in [a,t_n]$, что противоречит определению α_0. Равенство $\lim_{t\to b-} \alpha_0(t) = \alpha(b)$ доказывается аналогично. Покажем, что α_0 удовлетворяет условию Липшица. Для этого достаточно показать, что $\lim_{t\to a+} \alpha_0'(t) = \alpha'(a)$ и $\lim_{t\to b-} \alpha_0'(t) = \alpha'(b)$. Докажем первое равенство. Рассмотрим случай, когда найдется последовательность $t_n \in (a,b)$, $n = 1,2,...$ такая, что $\lim_{n\to\infty} t_n = a$ и $\lim_{n\to\infty} \alpha_0'(t_n) = c < \alpha'(a)$. Пусть $c_1, c_2 \in R$ такие, что $c < c_1 < c_2 < \alpha'(a)$. Без ограничения общности будем считать, что $\alpha_n'(t_n) < c_1$ и из $t_n \in (\tau_i,\tau_{i+1})$ следует $\alpha_{0l}'(\tau_i) > c_2$. Тогда существуют точки $a_n \in (\tau_i,t_n)$ и $b_n \in (a_n,t_n)$ такие, что $\alpha_0'(a_n) = c_2$, $\alpha_0'(b_n) = c_1$ и $c_1 < \alpha_0'(t) < c_2$, $t \in (a_n,b_n)$. Тогда из

$$\alpha_0'(b_n) - \alpha_0'(a_n) = \int_{a_n}^{b_n} f(t,\alpha_0(t),\alpha_0'(t))dt$$

следует

$$c_1 - c_2 = \lim_{n\to\infty}(\alpha_0'(b_n) - \alpha_0'(a_n)) = \lim_{n\to\infty}\int_{a_n}^{b_n} f(t,\alpha_0(t),\alpha_0'(t))dt = 0,$$

что противоречиво. Случай, когда $\lim_{n\to\infty} \alpha_0'(t_n) = c > \alpha'(a)$, рассматривается аналогично. Аналогично доказывается равенство $\lim_{t\to b-} \alpha_0'(t) = \alpha'(b)$. Ясно, что для любых $t_1 \in (a,b)$ и $t_2 \in (t_1,b)$ из существования производных $\alpha_0'(t_1)$ и $\alpha_0'(t_2)$ следует

$$\alpha_0'(t_2) - \alpha_0'(t_1) \ge \int_{t_1}^{t_2} f(t,\alpha_0(t),\alpha_0'(t))dt.$$

Следовательно, α_0 – нижняя функция.

Пусть L – константа Липшица для функции α_0 и $g \in L_1(I,[0,\infty))$ – функция из условий Каратеодори, для которой

$$\mid f(t,x,x') \mid \le g(t), \quad (t,x,x') \in \{(t,x,x') : t \in I, \alpha(t) \le x \le \beta(t), x' \in [-L,L]\}.$$

Рассмотрим точку τ_i, для которой $\alpha_{0l}(\tau_i) < \alpha_{0r}(\tau_i)$, и покажем, как можно сгладить функцию α_0 в окрестности точки τ_i. Для этого рассмотрим решение задачи Коши

$$x'' = g(t) + c, \quad x(a_i) = \alpha_0(a_i), \quad x'(a_i) = \alpha_0'(a_i), \tag{3}$$

где $a_i \in (\tau_{i-1}, \tau_i)$ и $c > 0$. Пусть точка $d_i \in (\tau_i, \tau_{i+1})$ достаточно близка к τ_i, $c_1 = 4L/(d_i - \tau_i)$ и a_i столь близка к τ_i, что решение задачи Коши (3) при $c = c_1$ пересекает α_0 на интервале (τ_i, d_i). Если c_2 достаточно велико, то решение задачи Коши (3) при $c = c_2$ не имеет общих точек с α_0 на интервале $(a_0, b_0]$. Следовательно, найдется $c_3 \in (c_1, c_2)$ такое, что решение x задачи Коши (3) при $c = c_3$ касается α_0 в точке $b_i \in (\tau_i, d_i)$. Пусть $\alpha_1(t) = x(t)$, $t \in [a_i, b_i]$ и $\alpha_1(t) = \alpha_0(t)$, $t \in [a, a_i] \cup [b_i, b]$. Из $\beta_l'(\tau_i) \geq \beta_r'(\tau_i)$ следует, что $\alpha(\tau_i) = \alpha_0(\tau_i) < \beta(\tau_i)$. Следовательно, при d_i, достаточно близком к τ_i, справедливо неравенство $\alpha_1 \leq \beta$. Ясно, что α_1 – нижняя функция. Последовательно сглаживая угловые точки, получим последовательность нижних функций α_n, которая сходится к функции α_*. Ясно, что α_* удовлетворяет условию Липшица с константой L, является нижней функцией, для нее справедливо неравенство $\alpha \leq \alpha_* \leq \beta$, $\alpha_*(a) = \alpha(a)$, $\alpha_*'(a) = \alpha'(a)$, $\alpha_*(b) = \alpha(b)$ и $\alpha_*'(b) = \alpha'(b)$. Аналогично строится β_*.

Список литературы

[1] Кигурадзе И.Т. О некоторых сингулярных краевых задачах для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4. N 10. 1753 - 1773.

[2] Лепин Л.А. О понятиях нижней и верхней функций, Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. N 10. 1750 - 1759.

A. Lepin. Properties of upper and lower functions.

Summary. It is shown that for the second order differential equation upper and lower functions can be replaced by absolutely continuous upper and lower functions.

1991 MSC 34B15

A. Lepins. Augšējo un apakšējo funkciju īpašības.

Anotācija. Otrās kārtas diferenciālvienādojumam paradīts ka augšējas un apakšējas funkcijas var būt nomainītas ar absolūti nepārtrauktam augšējam un apakšējam funkcijām.

Institute of Mathematics
and Computer Science,
University of Latvia
Riga, Rainis blvd 29

Received 08.12.2004