Об одной трехточечной краевой задаче

А.Я. Лепин, В.Д. Пономарев

Аннотация. Построен контрпример к теореме 2.6 работы [1].
УДК 517.927

В работе [1] для краевой задачи

$$x'' = g(t,x,x') + h(t,x,x') + e(t), \quad x(0) = 0,\ x(1) = \alpha x(\eta),$$

где $g, h \in C([0,1] \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}),\ \ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\eta\}$ и $\eta \in (0,1)$, при следующих предположениях

1. $(\exists M_1 > 0)(|x'| > M_1 \Rightarrow g(t,x,x') + h(t,x,x') + e(t) \neq 0)$,
2. $(\exists M_2 > 0)(|x'| > M_2 \Rightarrow x'(g(0,0,x') + h(0,0,x') \geq 0)$,
3. $(\forall (t,x,x') \in [0,1] \times \mathbb{R}^2)(x'g(t,x,x') \leq 0)$,
4. $(\forall (t,x,x') \in [0,1] \times \mathbb{R}^2)(|h(t,x,x')| \leq a(t)|x| + b(t)|x'| + u(t)|x|^r + v(t)|x'|^k + c(t))$, $a, b, u, v, c \in L_1([0,1], [0,+\infty)),\ 0 \leq r, k < 1$,
5. $(c_0 + a_1)\exp(b_1) < 1,\ a_1 = \|a\|_1 = \int_0^1 |a(t)|\, dt,\ b_1 = \|b\|_1$,

$$c_0 = \begin{cases} 0, & \alpha \leq 1; \\ (\alpha - 1)/(\alpha(1-\eta)), & 1 < \alpha < \eta^{-1}; \\ 1/(\alpha\eta), & \alpha > \eta^{-1}. \end{cases}$$

доказано существование решения. На примере покажем что формулировка этой теоремы нуждается в уточнении.

Рассмотрим краевую задачу

$$x'' = \min\{0, -6l^3x'^3 \max\{0,x\}\} + e(t), \quad x(0) = 0,\ x(1) = \alpha x(\eta), \tag{1}$$

где $g(x,x') = \min\{0, -6l^3x'^3\max\{0,x\}\},\ \ l > 6,\ h = 0$ и $e(t) = -1$ для $t \in [0,t_1]$, $t_1 = l^{-\frac{1}{3}} + l^{-1} + (l^{-\frac{2}{3}} + 2l^{-\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}},\ e(t) = -1 + (t - t_1)(1 - l^{-1})/(t_2 - t_1)$ для $t \in [t_1, t_2]$, $t_2 = 2l^{-\frac{1}{3}} + 2l^{-1},\ e(t) = -l^{-1}$ для $t \in [t_2, 1],\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\eta^{-1}\}$ и $\eta \in (0,1)$. Из $g(x,x') + e(t) < 0$ следует справедливость условия 1, а из $x'g(0,x') = 0$ следует справедливость условия 2. Условия 3 и 4 очевидны. Из $h = 0$ следует, что условие 5 имеет вид $c_0 < 1$ и всегда выполняется. Следовательно краевая задача (1) должна иметь решение для любого

$\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{\eta^{-1}\}$. Покажем, что при фиксированном η для любого $\varepsilon > 0$ найдется l такое, что α, для которых разрешима краевая задача (1), лежат в интервале $(\eta^{-1}, \eta^{-1}+\varepsilon)$.

Заметим, что $u(t) = l^{-1}t^{\frac{1}{3}}$ удовлетворяет уравнению $u'' = g(u, u')$ для $t \in (0,1]$. Обозначим через v решение задачи Коши

$$v'' = g(v, v') + e(t), \quad v(0) = 0,\ v'(0) = v_1$$

и докажем, что $v(t) < u(t)$ при $t \in (0, l^{-1}]$. Предполагая противное, найдем $b > 0$ такое, что $u(u^{-1}(b)) = v(v^{-1}(b)) = b,\ \ u'(u^{-1}(b)) = v'(v^{-1}(b))$ и для любого $a \in (0, b)$ справедливо неравенство

$$u'(u^{-1}(a)) > v'(v^{-1}(a)). \tag{2}$$

Пусть $u_1(t) = u(t + u^{-1}(b) - v^{-1}(b)$. Тогда $u_1(v^{-1}(b)) = u(u^{-1}(b)) = v(v^{-1}(b))$ и

$$u_1''(v^{-1}(b)) = u_1''(u^{-1}(b)) > v''(v^{-1}(b)). \tag{3}$$

Из неравенства (2) следует, что $u_1(t) < v(t)$ для $t \in (v^{-1}(b)-\varepsilon, v^{-1}(b))$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$, а из неравенства (3) следует, что $u_1(t) > v(t)$ для $t \in (v^{-1}(b)-\varepsilon, v^{-1}(b))$. Следовательно, $v(l^{-1}) < u(l^{-1})$ и $l^{-\frac{1}{3}} = u(l^{-1})/l^{-1} > v(l^{-1})/l^{-1} > v'(l^{-1})$. Пусть $y = -t^2/2 + (l^{-\frac{1}{3}} + l^{-1})t - l^{-2}/2$. Тогда $y(l^{-1}) = l^{-\frac{4}{3}} = u(l^{-1}) > v(l^{-1}),\ y'(l^{-1}) = l^{-\frac{1}{3}} > v'(l^{-1})$, $y''(t) = -1 \geq v''(t)$ для $t \in [l^{-1}, t_1]$ и $y(t_1) = 0$. Следовательно, $y'(t) > v'(t)$ и $y(t) > v(t)$ для $t \in [l^{-1}, t_1]$, $\ -l^{-\frac{1}{3}} > -(l^{-\frac{2}{3}} + 2l^{-\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}} = y'(t_1) > v'(t_1)$, $\ v(t_2) < 0$ и $\ v'(t_2) < -l^{-\frac{1}{3}}$. Ясно, что $\ v(t) = v(t_2) - t_2v'(t_2) + v'(t_2)t - l^{-1}(t-t_2)^2/2$ для $\ t \in [t_2, 1]$. Из выпуклости v следует неравенство $v(t_2) - t_2v'(t_2) > 0$. Пусть $\ \Delta = \alpha - \eta^{-1} = v(1)/v(\eta) - \eta^{-1}$. Тогда

$$\begin{aligned}
\Delta \ &= \frac{v(t_2) - t_2v'(t_2) + v'(t_2) - l^{-1}(1-t_2)^2/2}{v(t_2) - t_2v'(t_2) + \eta v'(t_2) - l^{-1}(\eta - t_2)^2/2} - \frac{1}{\eta} \\
&= \frac{(v(t_2) - t_2v'(t_2))(\eta - 1) - \eta l^{-1}(1-t_2)^2/2 + l^{-1}(\eta - t_2)^2/2}{\eta v(t_2) - \eta t_2 v'(t_2) + \eta^2 v'(t_2) - \eta l^{-1}(\eta - t_2)^2/2} \\
&= (\frac{v(t_2) - t_2v'(t_2))(1-\eta) + l^{-1}(1-\eta)(\eta - t_2^2)/2}{-\eta(\eta - t_2)v'(t_2) - \eta v(t_2) + \eta l^{-1}(\eta - t_2)^2/2}.
\end{aligned}$$

Если $t_2 < \eta$, то последняя дробь положительна, так как положительны все слагаемые. Оценим теперь Δ сверху.

$$\begin{aligned}
\Delta \ &< \frac{(v(t_2) - t_2v'(t_2))(1-\eta) + l^{-1}(1-\eta)(\eta - t_2^2)/2}{-\eta(\eta - t_2)v'(t_2)} \\
&< \frac{-t_2v'(t_2)(1-\eta) + l^{-1}(1-\eta)(\eta - t_2^2)/2}{-\eta(\eta - t_2)v'(t_2)} \\
&= \frac{t_2(1-\eta)}{\eta(\eta - t_2)} + \frac{l^{-1}(1-\eta)(\eta - t_2^2)}{-2\eta(\eta - t_2)v'(t_2)} \\
&< \frac{t_2(1-\eta)}{\eta(\eta - t_2)} + \frac{l^{-\frac{2}{3}}(1-\eta)(\eta - t_2^2)}{2\eta(\eta - t_2)}.
\end{aligned}$$

Ясно, что при достаточно большом l последние два слагаемые могут быть сделаны меньше $\frac{\varepsilon}{2}$.

Список литературы

[1] W. Feng. *Solutions and positive solutions for some three-point boundary value problems*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, Additional Volume, AIMS, 2003, 263 - 272.

A.Ya. Lepin and V.D. Ponomarev. On some three-point boundary value problem.

Summary. A counterexample is constructed to the theorem 2.6 of the work [1].

1991 MSC 34B15

A. Lepins, V. Ponomarjovs. Par vienu trīspunktu robežproblēmu.

Anotācija. Pretpiemērs tiek konstruēts teorēmai 2.6 no darbā [1].

Institute of Mathematics
and Computer Science,
University of Latvia
Riga, Rainis blvd 29

Received 11.01.2005