Ю.А.Клоков

Верхние и нижние функции для одной краевой задачи четвертого порядка

Аннотация. О верхних и нижних функциях для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка. Изучается краевая задача $x'''' = f(t, x, x'')$, $x'(0) = x'''(0) = x(\tau) = x''(\tau) = 0$. Указаны верхние и нижние функции при различных предположениях относительно функции f. Доказаны две теоремы существования.

УДК 517.927.4

I. В этой статье продолжаются исследования верхних и нижних функций для уравнений третьего и четвертого порядка, начатые в работах [1] - [4]. Рассмотрим краевую задачу

$$x'''' = f(t, x, x''), \tag{1}$$

$$x'(0) = x'''(0) = x(\tau) = x''(\tau) = 0, \tag{2}$$

где

$$f \in C(I \times R^2), \quad I = [0, \tau], \quad I_0 = (0, \tau).$$

Функции $\beta(t), \alpha(t) \in C^4(I)$ назовем, соответственно, верхней и нижней функцией задачи (1),(2), если они удовлетворяют граничным условиям (2), $\beta(t) \geq 0, \quad \alpha(t) = -\beta(t), \quad \forall t \in I$, и

$$\beta''''(t) \geq f\left(t, \delta(0, u(t), \beta(t)), m(u''(t))\right), \quad t \in I \tag{3}$$

$$\alpha''''(t) \leq f\left(t, \delta(\alpha(t), u(t), 0), m(u''(t))\right), \quad t \in I \tag{4}$$

где $\delta(p, x, q), \quad p, x, q \in R$ определяется условиями $\delta(p, x, q) = p, \quad$ при $x \leq p$, $\delta(p, x, q) = x, \quad p \leq x \leq q$ и $\delta(p, x, q) = q$, при $x \geq q, \quad m(u'') = \delta(-M, u'', M), \quad M = \alpha''(0) + M_0$, где

$$M_0 = \max\left[\int\limits_0^\tau ((\tau - s) - \tfrac{(\tau-s)^2}{2\tau})\beta''''(s)ds, \quad \int\limits_0^\tau ((\tau - s) - \tfrac{(\tau-s)^3}{\tau^2})\beta''''(s)ds, \right.$$
$$\left. \int\limits_0^\tau (s - \tfrac{s^3}{\tau^2})\beta''''(s)ds\right].$$

Причем условия (3), (4) должны выполняться для любой функции $u(t) \in C^4(I)$. Из (3), (4) следует

$$\beta''''(t) = f\left(t, \delta(0, u(t), \beta(t)), m(u''(t))\right) + \varepsilon_1(t), \quad t \in I \tag{5}$$

$$\alpha''''(t) = f\left(t, \delta(\alpha(t), u(t), 0), m(u''(t))\right) - \varepsilon_2(t), \quad t \in I. \tag{6}$$

Здесь и далее $\varepsilon_r(t) \geq 0, \quad t \in I, \quad (r = 1, 2, \ldots)$ есть некоторые непрерывные функции. Заметим, что $\varepsilon_1(t),\ \varepsilon_2(t)$ зависят от $u(t)$. Полагая в (5),(6) $u(t) \equiv 0, \quad t \in I$ и вычитая, найдем

$$\beta''''(t) = 2^{-1}(\varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t)) := H(t), \quad t \in I. \tag{7}$$

Если $H(t) \equiv 0, \quad t \in I$, то $f(t, 0, 0) \equiv 0, \quad t \in I$ и решением является функция $x(t) \equiv 0, \quad t \in I$. Этот случай мы исключаем из рассмотрения и поэтому $H(t) \geq 0, \quad \forall t \in I$. Из граничных условий (2) и (7) следует, что $\beta(t) = \int\limits_0^\tau G(t, s)H(s)ds > 0, \quad \forall t \in I_0$, где $G(t, s) \geq 0, \quad (t, s) \in I \times I$ есть функция Грина для уравнения $x'''' = 0$ с краевыми условиями (2). Нам удобно будет записывать функцию $\beta(t)$ в виде

$$\begin{gathered}\beta(t) = \tfrac{1}{2}(\tau^2 - t^2)\int\limits_0^\tau(\tau - s)H(s)ds - \tfrac{1}{6}\int\limits_0^\tau(\tau - s)^3H(s)ds \\ +\tfrac{1}{6}\int\limits_0^\tau(t - s)^3)H(s)ds,\end{gathered} \tag{8}$$

Сделаем замечание к формуле (8), которое понадобится нам в дальнейшем. Пусть $c_0 \in I_0, \quad H_1(t) = H(t), \quad t \in [0, c_0], \quad H_1(t) \equiv 0, \quad t \in (c_0, \tau]$, и $H_2(t) \equiv 0, \quad t \in [0, c_0), \quad H_2(t) = H(t), \quad t \in [c_0, \tau]$, так что $H(t) = H_1(t) + H_2(t)$. Тогда $\beta(t)$ можно записать в виде $\beta(t) = \beta_1(t) + \beta_2(t)$, где $\beta_i(t) = \int\limits_0^\tau G(t, s)H_i(s)ds, \quad (i = 1, 2)$, причем $\beta_1(t), \beta_2(t) \geq 0, \quad \forall t \in I$. Из (8) находим

$$\beta'(t) = -t\int\limits_0^\tau(\tau - s)H(s)ds + \frac{1}{2}\int\limits_0^t(t - s)^2H(s)ds, \tag{9}$$

$$\beta''(t) = -\int\limits_0^\tau(\tau - s)H(s)ds + \int\limits_0^t(t - s)H(s)ds \tag{10}$$

$$\beta'''(t) = \int\limits_0^t H(s)ds \tag{11}$$

Так как $H(t) \not\equiv 0$, то $\beta'(t) < 0, \quad \beta''(t) < 0, \quad \forall t \in I_0$. В дальнейшем нам понадобятся три леммы.

Лемма 1. $\alpha'(t) + t^{-1}\beta(t) > 0, \quad \forall t \in I_0$.

Так как $\alpha'(t) > 0, \quad \beta(t) > 0, \quad \forall t \in I_0$, то доказательство **Леммы 1** очевидно.

Следствие. Функции $t^{-1}\beta(t)$ и $t^{-2}\beta(t)$ монотонно убывают на интервале I_0. Действительно

$$(t^{-1}\beta(t))' = -t^{-2}\beta(t) + t^{-1}\beta'(t) = -t^{-1}(\alpha'(t) + t^{-1}\beta(t)) < 0.$$

Функция $t^{-2}\beta(t) = t^{-1}(t^{-1}\beta(t))$ есть произведение двух монотонно убывающих функций.

Лемма 2. Для любых $c_0, c_1 \in I, \quad 0 < c_0 < c_1 \le \tau$ справедливо неравенство

$$-\frac{c_1}{c_0^2}\beta(c_0) + \frac{1}{2}\int\limits_{c_0}^{c_1}(c_1 - s)^2 H(s)ds - \frac{1}{2(c_1 - c_0)}\int\limits_{c_0}^{c_1}(c_1 - s)^3 H(s)ds \le 0. \tag{12}$$

Доказательство леммы 2. Умножая (12) на $c_1^{-1}6c_0^2$ и используя (8), получим

$$\begin{aligned} I_0(c_1) := &- \Bigg[3(\tau^2 - c_0^2)\int\limits_0^\tau(\tau - s)H(s)ds - \int\limits_0^\tau(\tau - s)^3 H(s)ds + \\ &+ \int\limits_0^{c_0}(c_0 - s)^3 H(s)ds\Bigg] + \\ &+ \tfrac{3c_0^2}{c_1}\left(\int\limits_{c_0}^{c_1}(c_1 - s)^2 H(s)ds - \tfrac{1}{(c_1 - c_0)}\int\limits_{c_0}^{c_1}(c_1 - s)^3 H(s)ds\right) \end{aligned} \tag{13}$$

Рассмотрим вначале частный случай, когда $c_1 = \tau$. Согласно замечанию к формуле (8), представим квадратную скобку в виде суммы $\beta(c_0) = \beta_1(c_0) + \beta_2(c_0)$, отбросим слагаемое $\beta_1(c_0) \ge 0$ и покажем, что оставшееся в (13) выражение неположительно. Объединяя интегралы по отрезку $[c_0, \tau], \quad (c_1 = \tau)$, найдем

$$-\int\limits_{c_0}^{\tau}\left[3(\tau^2 - c_0^2)(\tau - s) - (\tau - s)^3 + \frac{3c_0^2}{\tau}(\tau - s)^2 - \frac{3c_0^2}{\tau(\tau - c_0)}(\tau - s)^3\right]H(s)ds$$

Вынося общий множитель $(\tau - s)$, получим в квадратных скобках полином второй степени по $s, \quad c_0 \le s \le \tau$.

$$p(s) := 3(\tau^2 - c_0^2) - (\tau - s)^2 + \frac{3c_0^2}{\tau}(\tau - s) - \frac{3c_0^2}{\tau(\tau - c_0)}(\tau - s)^2.$$

Путем несложных вычислений (которые мы опускаем) можно показать, что $p(s) \ge 0, \quad \forall s \in [c_0, \tau]$. Таким образом, если $c_1 = \tau$, то $I_0(\tau) \le 0$. Рассмотрим теперь случай, когда $c_1 < \tau$. Найдем производную $I_0'(c_1)$ и покажем, что она неотрицательна. Имеем

$$\begin{aligned} I_0'(c_1) = &-\tfrac{3c_0^2}{c_1^2}\left(\int\limits_{c_0}^{c_1}(c_1 - s)^2 H(s)ds - \tfrac{1}{(c_1 - c_0)}\int\limits_{c_0}^{c_1}(c_1 - s)^3 H(s)ds\right) + \\ &+ \tfrac{3c_0^2}{c_1}\left(2\int\limits_{c_0}^{c_1}(c_1 - s)H(s)ds + \tfrac{1}{(c_1 - c_0)^2}\int\limits_{c_0}^{c_1}(c_1 - s)^3 H(s)ds - \tfrac{3}{(c_1 - c_0)}\int\limits_{c0}^{c_1}(c_1 - s)^2 H(s)ds\right). \end{aligned}$$

Отбрасывая множитель $3c_0^2c_1^{-2}$ и объединяя интегралы, получим под интегралом полином по s

$$\left[-(c_1 - s)^2 + \frac{(c_1 - s)^3}{c_1 - c_0} + 2c_1(c_1 - s) + \frac{c_1}{(c_1 - c_0)^2}(c_1 - s)^3 - \frac{3c_1}{(c_1 - c_0)}(c_1 - s)^2\right].$$

Выносия общий множитель $(c_1 - s)$ и обозначая $\frac{c_1-s}{c_1-c_0} = z, \quad 0 \le z \le 1$, найдем

$$(c_1-s)[-(c_1-c_0)z+(c_1-c_0)z^2+2c_1+c_1z^2-3c_1z] = (c_1-s)(1-z)[2c_1(1-z)+c_0z] \ge 0.$$

Следовательно $I_0'(c_1) \ge 0$. Т.к. $I_0(\tau) \le 0$, то отсюда следует, что $I_0(c_1) \le 0$ при $\forall c_1 \in [c_0, \tau]$. Тем самым лемма 2 доказана.

Лемма 3. Для любых $c_0, c_1 \in I \quad 0 < c_0 < c_1 \le \tau$ имеем

$$-6\frac{\beta(c_0)}{c_0(c_1-c_0)} + \int\limits_{c_0}^{c_1}(c_1-s)H(s)ds - \frac{1}{(c_1-c_0)^2}\int\limits_{c_0}^{c_1}(c_1-s)^3H(s)ds \le 0. \tag{14}$$

Доказательство леммы 3. Умножая (14) на $c_0(c_1-c_0)$ и используя замечание к формуле (8), получим

$$\begin{aligned} I_1(c_1) := -3(\tau^2-c_0^2)\int\limits_{c_0}^{\tau}(\tau-s)H(s)ds + \int\limits_{c_0}^{\tau}(\tau-s)^3H(s)ds + \\ c_0(c_1-c_0)\left[\int\limits_{c_0}^{c_1}(c_1-s)H(s)ds - \tfrac{1}{(c_1-c_0)^2}\int\limits_{c_0}^{c_1}(c_1-s)^3H(s)ds\right] \end{aligned} \tag{15}$$

Рассмотрим сначала случай, когда в (15) $c_1 = \tau$. Объединяя интегралы по отрезку $[c_0, \tau]$ и, вынося в подынтегральном выражении множитель $(\tau - s)$, получим

$$I_1(\tau) = \int\limits_{c_0}^{\tau}(\tau-s)\left[-3(\tau^2-c_0^2)+(\tau-s)^2+c_0(\tau-c_0)-\frac{c_0(\tau-s)^2}{(\tau-c_0)}\right]H(s)ds.$$

Легко проверить,что квадратная скобка под интегралом неположительна. Поэтому $I_1(\tau) \le 0$. Пусть $c_1 < \tau$. Из (15) получим

$$\begin{aligned} I_1'(c_1) = c_0\left[\int\limits_{c_0}^{c_1}(c_1-s)H(s)ds - \tfrac{1}{(c_1-c_0)^2}\int\limits_{c_0}^{c_1}(c_1-s)^3H(s)ds\right] + \\ c_0(c_1-c_0)\left[\int\limits_{c_0}^{c_1}H(s)ds + \tfrac{2}{(c_1-c_0)^3}\int\limits_{c_0}^{c_1}(c_1-s)^3H(s)ds - \tfrac{3}{(c_1-c_0)^2}\int\limits_{c_0}^{c_1}(c_1-s)^2H(s)ds\right] \end{aligned}$$

Объединяя интегралы, вынося множитель $(c_1-c_0)c_0$, и обозначая $(c_1-c_0)^{-1}(c_1-s) = z$, так что $0 \le z \le 1$, найдем

$$(c_1-c_0)\int\limits_{c_0}^{c_1}[z+1+z^3-3z^2]H(s)ds.$$

Выражение в квадратных скобках можно записать в виде $(1-z)(1+2z-z^2) \ge 0$, т.е. $I_1(c_1)$ есть неубывающая функция по c_1 и так как $I_1(\tau) \le 0$, то $I_1(c_1) \le 0, \quad \forall c_1 \in [c_0, \tau]$. Тем самым лемма 3 доказана.

Теорема 1. Пусть найдутся α, β, удовлетворяющие неравенствам (3), (4). Тогда решение задачи (1), (2) существует, причем

$$\alpha(t) \le x(t) \le \beta(t), \quad \forall t \in I \tag{16}$$

$$|x''(t)| \le \alpha''(t) + M_0, \quad \forall t \in I. \tag{17}$$

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$x'''' = f(t, \delta(\alpha(t), x, \beta(t)), m(x'')) - \delta(0, x-1, 1) + \delta(0, \alpha(t) - x, 1). \tag{18}$$

Так как правая часть уравнения (18) ограничена, и так как уравнение $x'''' = 0$ с условиями (2) имеет только нулевое решение, то решение задачи (18), (2) существует, см. [5, стр.25]. Обозначим его через $x(t), \quad t \in I$. Из (5), (6), где следует положить $u(t) = x(t)$, и из (18) находим, что на тех отрезках оси t, где $x(t) \ge 0$ (при этом может быть, что при некоторых t будет $x(t) > \beta(t)$), будет

$$(x(t) - \beta(t))'''' = -\varepsilon_3(t), \tag{19}$$

а там где $x(t) \le 0$, аналогично имеем

$$(x(t) - \alpha(t))'''' = \varepsilon_4(t). \tag{20}$$

Докажем выполнение оценок (16). Пусть $x(t)$ сохраняет свой знак, например $x(t) \ge 0, \quad \forall t \in I$, и при этом, при некоторых $t, \quad x(t) > \beta(t)$. Обозначим через $G(t,s) \ge 0, \quad \forall (t,s) \in I \times I$ функцию Грина для уравнения $x'''' = 0$ с условиями (2). Тогда из (19) найдем

$$x(t) - \beta(t) = -\int_0^\tau G(t,s)\varepsilon_3(s)ds \le 0, \quad \forall t \in I,$$

то есть $x(t) \le \beta(t), \quad \forall t \in I$. Аналогично доказывается оценка $x(t) \ge \alpha(t), \quad \forall t \in I$, если $x(t) \le 0, \quad \forall t \in I$. Рассмотрим теперь случай, когда $x(t)$ меняет свой знак, например при некоторых $t, x(t) > 0$ и существует t, где $x(t) < \alpha(t)$. Пусть $\varepsilon > 1$ и $c \in I_0$ таковы, что $x(c) - \varepsilon\alpha(c) = 0, \quad x'(c) - \varepsilon\alpha'(c) = 0, \quad x''(c) - \varepsilon\alpha''(c) \ge 0$. Далее рассмотрим вначале случай, когда $x'''(c) - \varepsilon\alpha'''(c) \ge 0$. Из (20) следует

$$(x - \varepsilon\alpha)''''_{t=c} = (x - \alpha)''''_{t=c} - (\varepsilon - 1)\alpha''''(c) = \varepsilon_4(c) + (\varepsilon - 1)H(c) > 0.$$

(Заметим, что в силу (18) и (6) $\varepsilon_4(c) > 0$). Пусть $b_0, c_0 \in I$ таковы, что $0 \le b_0 < c < c_0 \le \tau$ и $x(t) < 0, \quad \forall t \in (b_0, c_0), \quad x(b_0) = x(c_0) = 0, \quad x(c) < \alpha(c) < 0$. Обозначим

$$z(t) = x(t) - \varepsilon\alpha(t) - (c_0 - c)^{-2}(t - c)^2\varepsilon\beta(c_0), \quad t \in [b_0, c_0].$$

Тогда $z(c) = 0, z'(c) = 0, z'''(c) \ge 0, z''''(c) > 0, z(c_0) = 0$. Далее имеем

$$z'(t) = x'(t) - \varepsilon\alpha'(t) - (c_0 - c)^{-2}2(t - c)\varepsilon\beta(c_0) \tag{21}$$

$$z''(t) = x''(t) - \varepsilon\alpha''(t) - (c_0 - c)^{-2}2\varepsilon\beta(c_0) \tag{22}$$

$$z'''(t) = x'''(t) - \varepsilon\alpha'''(t), \quad z''''(t) = x''''(t) - \varepsilon\alpha''''(t) \ge 0, \quad t \in [c, c_0] \quad z''''(c) > 0.$$

Из этих равенств следует $z'''(t) > 0, \quad \forall t \in (c, c_0]$. Очевидно, что существует точка $\xi_1 \in (c, c_1)$, где $z'(\xi_1) = 0$, и, также существует точка $\xi_2 \in (c, \xi_1)$, где $z''(\xi_2) = 0$. Следовательно $z''(t) > 0, \quad t \in (\xi_2, c_0]$ и $z'(t) > 0$ для $t \in (\xi_1, c_0]$. Поэтому из (21)

$$x'(c_0) > \varepsilon\alpha'(c_0) + 2(c_0 - c)^{-1}\varepsilon\beta(c_0) > (\alpha'(c_0) + (c_0 - c)^{-1}\beta(c_0)) + (c_0 - c)^{-1}\beta(c_0)$$

В силу леммы 1, выражение в круглых скобках положительно и, следовательно,

$$x'(c_0) > c_0^{-1}\beta(c_0) > 0 \tag{23}$$

И аналогично получаем,

$$x''(c_0) > \alpha''(c_0) + c_0^{-2} \cdot 2\beta(c_0) > 0. \tag{24}$$

Заметим, что так как $x''(c_0) > 0$, то $c_0 < \tau$ и поэтому найдется точка $c_1 \leq \tau$, где $x(c_1) = 0$ и $x(t) > 0$ при $t \in (c_0, c_1)$. (На интервале (c_0, c_1) могут быть точки, где $x(t) > \beta(t)$.) Подсчитаем значения $x'(c_1)$ и $x''(c_1)$. Из (19) следует $x'''' = H(t) - \varepsilon_3(t)$. Имеем краевую задачу на отрезке $[c_0, c_1]$

$$x'''' = H(t) - \varepsilon_3(t) \tag{25}$$

$x(c_0) = x(c_1) = 0, \quad x'(c_0) = c_0^{-1}\beta(c_0) + \varepsilon_5, \quad x''(c_0) = \alpha''(c_0) + c_0^{-2}2\beta(c_0) + \varepsilon_6$. Последовательно интегрируя (25) найдем

$$x'''(t) = x'''(c_0) + \int_{c_0}^{t} [H(s) - \varepsilon_3(s)]ds$$

$$x''(t) = x''(c_0) + x'''(c_0)(t - c_0) + \int_{c_0}^{t} (t - s)[H(s) - \varepsilon_3(s)]ds \tag{26}$$

$$x'(t) = x'(c_0) + x''(c_0)(t - c_0) + x'''(c_0)\frac{1}{2}(t - c_0)^2 + \frac{1}{2}\int_{c_0}^{t} (t - s)^2[H(s) - \varepsilon_3(s)]ds \tag{27}$$

$$\begin{gathered} x(t) = x'(c_0)(t - c_0) + x''(c_0)\tfrac{1}{2}(t - c_0)^2 + \\ x'''(c_0)\tfrac{1}{6}(t - c_0)^3 + \tfrac{1}{6}\int_{c_0}^{t} (t - s)^3[H(s) - \varepsilon_3(s)]ds. \end{gathered}$$

Используя условие $x(c_1) = 0$, из последнего уравнения найдем $x'''(c_0)$

$$\begin{gathered} x'''(c_0) = (c_1 - c_0)^{-3}6\left[-x'(c_0)(c_1 - c_0) - \right. \\ \left. x''(c_0)\tfrac{1}{2}(c_1 - c_0)^2 - \tfrac{1}{6}\int_{c_0}^{c_1} (c_1 - s)^3(H(s) - \varepsilon_3(s))ds\right]. \end{gathered} \tag{28}$$

Теперь подсчитаем $x'(c_1)$ и $x''(c_1)$. Полагая в (27) $t = c_1$ и используя (28), найдем

$$\begin{gathered} x'(c_1) = -2x'(c_0) - \tfrac{1}{2}x''(c_0)(c_1 - c_0) + \tfrac{1}{2}\int_{c_0}^{c_1} (c_1 - s)^2H(s)ds - \\ \tfrac{1}{2(c_1 - c_0)}\int_{c_0}^{c_1} (c_1 - s)^3H(s)ds - \varepsilon_7, \end{gathered} \tag{29}$$

где

$$\varepsilon_7 = \frac{1}{2}\int\limits_{c_0}^{c_1}(c_1-s)^2\varepsilon_3(s)ds - \frac{1}{2(c_1-c_0)}\int\limits_{c_0}^{c_1}(c_1-s)^3\varepsilon_3(s)ds =$$
$$\frac{1}{2}\int\limits_{c_0}^{c_1}(c_1-s)^2(1-\frac{c_1-s}{c_1-c_0})\varepsilon_3(s)ds \geq 0.$$

Подставляя в (29) вместо $x'(c_0)$ и $x''(c_0)$ их значения из (23), (24) найдем

$$x'(c_1) = -x'(c_0) - \frac{\beta(c_0}{c_0} - \frac{1}{2}(c_1-c_0)\alpha''(c_0) - \frac{(c_1-c_0)}{c_0^2}\beta(c_0)+$$
$$\frac{1}{2}\int\limits_{c_0}^{c_1}(c_1-s)^2H(s)ds - \frac{1}{2(c_1-c_0)}\int\limits_{c_0}^{c_1}(c_1-s)^3H(s)ds - \varepsilon_8.$$

используя равенство $c_0^{-2}(c_1-c_0)\beta(c_0) = c_0^{-2}c_1\beta(c_0) - c_0^{-1}\beta(c_0)$ и лемму 2, получим

$$x'(c_1) = -x'(c_0) - \varepsilon_9. \tag{30}$$

Аналогично полагая в (26) $t = c_1$ и используя (28), найдем

$$x''(c_1) = -(c_1-c_0)^{-1}6x'(c_0) - 2x''(c_0) + \int\limits_{c_0}^{c_1}(c_1-s)H(s)ds-$$
$$\frac{1}{(c_1-c_0)^2}\int\limits_{c_0}^{c_1}(c_1-s)^3H(s)ds - \varepsilon_{10}, \tag{31}$$

где

$$\varepsilon_{10} = \int\limits_{c_0}^{c_1}(c_1-s)\varepsilon_3(s)ds - \frac{1}{(c_1-c_0)^2}\int\limits_{c_0}^{c_1}(c_1-s)^3\varepsilon_3(s)ds \geq 0.$$

Подставляя в(31) вместо $x'(c_0)$ его значение из (23), получим

$$x''(c_1) = -\frac{6\beta(c_0)}{c_0(c_1-c_0)} - 2x''(c_0) + \int\limits_{c_0}^{c_1}(c_1-s)H(s)ds - \frac{1}{(c_1-c_0)}\int\limits_{c_0}^{c_1}(c_1-s)^3H(s)ds - \varepsilon_{11}.$$

Используя лемму 3, найдем

$$x''(c_1) = -2x''(c_0) - \varepsilon_{12}. \tag{32}$$

Если $c_1 = \tau$, то (32) противоречит краевому условию $x''(\tau) = 0$. Поэтому предположим, что $c_1 < \tau$ и обозначим через $c_2 \leq \tau$ точку, где $x(c_2) = 0$, так что $x(t) < 0$ при $t \in (c_1, c_2)$. (При этом могут быть точки $t \in (c_1, c_2)$, где $x(t) < \alpha(t)$). На отрезке $[c_1, c_2]$ из (20), (30), (32) имеем задачу

$$x''''(t) = -H(t) + \varepsilon_4(t) \quad t \in [c_1, c_2]$$

$$x(c_1) = x(c_2) = 0, \quad x'(c_1) = -x'(c_0) - \varepsilon_9, \quad x''(c_1) = -2x''(c_0) - \varepsilon_{12}.$$

Последовательно интегрируя эту краевую задачу и определяя $x'(c_2)$ и $x''(c_2)$ точно так, как это делали на отрезке $[c_0, c_1]$, найдем

$$x'(c_2) = x'(c_0) + \varepsilon_{13}, \quad x''(c_2) = 2^2x''(c_0) + \varepsilon_{14}. \tag{33}$$

(Заметим, что леммы 1,2,3 справедливы для любых $c_0, c_1 \in I, \quad 0 < c_0 < c_1 \leq \tau$ и поэтому в этих леммах можно вместо c_0, c_1 поставить c_1, c_2. Кроме того следует принять во внимание следствие к лемме 1, в силу которого $c_0^{-2}\beta(c_0) > c_1^{-2}\beta(c_1)$.) Если $c_2 = \tau$, то получаем противоречие (33) с условием $x''(\tau) = 0$. Если $c_2 < \tau$, то повторяя рассуждения получим точки, $c_3, c_4, ..., c_k$, в каждой из которых $x''(c_k) = (-1)^k[2^k x''(c_0) + \varepsilon_k^*], \quad \varepsilon_k^* \geq 0$. Но из равенства $x''(t) = \int\limits_0^\tau g(t,s)x''''(s)ds$, где $g(t,s) \leq 0, \quad t,s \in I \times I$ есть функция Грина задачи $z'' = 0, \quad z'(0) = 0 \quad z(\tau) = 0$, и из (18) следует, что существует постоянная $M^* > 0$ такая, что $|x''(t)| < M^* \quad \forall t \in I$, причем эта постоянная зависит лишь от α и β. Это противоречие доказывает, что наше предположение о том, что существует точка $t \in I_0$, где $x(t) < \alpha(t)$, ошибочно, при условии что $x'''(c) - \varepsilon\alpha'''(c) \geq 0$. Рассмотрим теперь случай, когда $x'''(c) - \varepsilon\alpha'''(c) < 0$. Для этого определим функцию $b_0 \leq t \leq c$

$$\bar{z}(t) = x(t) - \varepsilon\alpha(t) - \frac{(c-t)^2}{(c-b_0)^2}\varepsilon\beta(b_0)$$

Имеем $\bar{z}(c) = \bar{z}(b_0) = 0, \quad \bar{z}'(c) = 0$. Очевидно, что найдется точка $\xi_1, \quad b_0 < \xi_1 < c$, где $\bar{z}(\xi_1) = 0$ и точно также найдется точка $\xi_2 > \xi_1, \quad \xi_2 \in (\xi_1, c)$, где $\bar{z}''(\xi_2) = 0$. Далее получим

$$\begin{array}{l} \bar{z}'(t) = x'(t) - \varepsilon\alpha'(t) + \frac{2(c-t)}{(c-b_0)^2}\varepsilon\beta(b_0) \\ \bar{z}''(t) = x''(t) - \varepsilon\alpha''(t) - \frac{2\varepsilon}{(c-b_0)^2}\beta(b_0) \\ \bar{z}'''(t) = x'''(t) - \varepsilon\alpha'''(t) \\ \bar{z}''''(t) = (x-\varepsilon\alpha)'''' = (x-\alpha)'''' + (\varepsilon-1)H(t) = \\ = \varepsilon_4(t) + (\varepsilon-1)H(t) \geq 0 \end{array} \tag{34}$$

Заметим, что $\varepsilon_4(c) > 0$. Так как $\bar{z}''''(t) \geq 0, \quad t \in [b_0, c]$, то $\bar{z}'''(t) < 0, \quad t \in [b_0, c]$ и, так как $\bar{z}''(\xi_2) = 0$, то $\bar{z}''(t) > 0 \quad t \in [b_0, \xi_2)$, и $\bar{z}'(t) < 0, \quad t \in [b_0, \xi_1)$. Из (34) находим при $t = b_0$

$$\begin{array}{l} x'(b_0) = \varepsilon\alpha'(b_0) - \frac{2}{(\tau-b_0)}\varepsilon\beta(b_0) - \varepsilon_{15} \\ x''(b_0) = \varepsilon\alpha''(b_0) + \frac{2\varepsilon}{(\tau-b_0)^2}\beta(b_0) + \varepsilon_{16} \end{array} \tag{35}$$

Аналогично тому как была доказана лемма 1, можно показать, что $(\frac{\beta(b_0)}{\tau-b_0})'_{b_0} > 0$ и $(\alpha''(b_0) + \frac{2\beta(b_0)}{(\tau-b_0)^2})'_{b_0} > 0$ так, что $\alpha'(b_0) - \frac{\beta(b_0)}{\tau-b_0} < 0$. Используя эти неравенства из (35) можно найти

$$\begin{array}{l} x'(b_0) = -\frac{\beta(b_0)}{\tau-b_0} - \varepsilon_{17} \\ x''(b_0) = \alpha''(b_0) + \frac{2\beta(b_0)}{(\tau-b_0)^2} + \varepsilon_{18} \end{array} \tag{36}$$

После получения оценок (36), рассуждая аналогично предыдущему, получим последовательность точек $b_k > 0, \quad b_{k+1} < b_k$ таких, что

$$\begin{array}{l} x'(b_k) = (-1)^{k+1}\left(\frac{\beta(b_0)}{\tau-b_0} + \eta_k'\right), \\ x''(b_k) = (-1)^k\left[2^k\left(\alpha''(b_0) + \frac{2\beta(b_0)}{(\tau-b_0)^2}\right) + \eta_k''\right] \end{array} \tag{37}$$

($\eta_k', \eta_k'' > 0$ - постоянные,$k = 0, 1, ...$) и, либо при достаточно больших "k" получим противоречие с оценкой $|x''(t)| < M^*, \quad \forall t \in I$, либо при некотором $k = k_0$ получим отрезок $[0, b]$, $\quad b = b_{k_0}$, где $x(t) \geq 0$, $\quad \forall t \in [0, b]$, $\quad x'(0) = x'''(0) = 0$, $\quad x(b) = 0$. (Случай, когда $x(t) \leq 0$, $\quad \forall t \in [0, b]$ рассматривается аналогично). Так как $(x-\beta)'''' = -\varepsilon_3$, $\quad t \in [0, b]$, то имеем краевую задачу.

$$\begin{array}{l} x'''' = H(t) - \varepsilon_3(t), \quad t \in [0, b] \\ x'(0) = x'''(0) = 0, \quad x(b) = 0, \quad x'(b) = -\frac{\beta(b_0)}{\tau - b_0} - \eta' \\ x''(b) = \alpha''(b_0) + \frac{2\beta(b_0)}{(\tau - b_0)^2} + \eta'' \quad (\eta', \eta'' > 0) \end{array} \tag{38}$$

Интегрируя уравнение получим

$$x'''(t) = \int_0^t (H(s) - \varepsilon_3(s))ds$$

$$x''(t) = x''(0)t + \int_0^t (t - s)(H(s) - \varepsilon(s))ds \tag{39}$$

$$x'(t) = x''(0)t + \frac{1}{2}\int_0^t (t - s)^2(H(s) - \varepsilon(s))ds \tag{40}$$

Из (40) при $t = b$ находим

$$x''(0) = \frac{1}{b}\left[x'(b) - \frac{1}{2}\int_0^b (b - s)^2(H(s) - \varepsilon_3(s))ds\right]$$

Подставляя это значение в (39) при $t = b$ найдем

$$x''(b) = \frac{1}{b}\left[x'(b) - \frac{1}{2}\int_0^b (b - s)^2(H(s) - \varepsilon_3(s))ds\right] + \int_0^b (b - s)(H(s) - \varepsilon_3(s))ds,$$

откуда, используя (38) и соответствующие монотонности, получим

$$\begin{array}{l} 0 = \frac{\beta(b)}{(\tau - b)} + b\left(\alpha''(b) + \frac{2\beta(b)}{(\tau - b)^2}\right) - \left[b\int_0^b (b - s)H(s)ds - \frac{1}{2}\int_0^b (b - s)^2 H(s)\right] + \varepsilon_{19} \\ 0 = \frac{\beta(b)}{(\tau - b)} + b\alpha''(b) - \left[b\int_0^b (b - s)H(s)ds - \frac{1}{2}\int_0^b (b - s)^2 H(s)\right] + \varepsilon_{20} \end{array} \tag{41}$$

Далее используя формулу (8), замечание к формуле (8) и, объединяя интегралы по отрезку $[0, b]$, получим под интегралом полином второй степени по s

$$\begin{array}{rl} p_2(s) := & \frac{1}{2}(\tau + b)(\tau - s) - \frac{1}{6}[(\tau - s)^2 + (\tau - s)(b - s) + (b - s)^2] \\ + & b(\tau - s) - b(b - s) + \frac{1}{2}(b - s)^2. \end{array}$$

Легко проверить, что $p_2(s) > 0$. Следовательно, правая часть в (41)больше нуля. Полученное противоречие доказывает оценки (16). Из оценок (16), вообще говоря, не следует выполнение оценок $\beta''(t) \le x''(t) \le \alpha''(t), \quad \forall t \in I$. Поэтому докажем оценку (17). Обозначим $m_0 = \max[|x''(t)|, \quad t \in I]$. Для определенности будем считать, что $m_0 = x''(t_0), \quad t_0 \in [0, \tau)$. Пусть оценка (17) не выполняется, так что $x''(t_0) > M_0 + \alpha''(t_0)$. Тогда существует точка $\sigma \in I_0$ такая, что $x''''(\sigma) - \alpha''''(\sigma) < 0$. Значит, в силу (20), $x(\sigma) \ge 0$. Рассмотрим вначале случай, когда $x'(\sigma) \ge 0$. Так как

$$x''(\sigma) > M_0 + \alpha''(\sigma) > 0, \tag{42}$$

то $x'(t) > 0$ и $x(t) > 0$ в некоторой краевой окрестности точки $t = \sigma$. Так как $x(\tau) = 0$, то существует точка $c_0 \le \tau$, где $x(c_0) = 0$ и $x(t) \ge 0$ при $t \in [\sigma, c_0]$. Интегрируя равенство $x''''(t) = x''''(t)$ от $t = \sigma$ до $t \ge \sigma$ найдем

$$x''' = x'''(\sigma) + \int\limits_{\sigma}^{t} x''''(s)ds$$

$$x'' = x''(\sigma) + x'''(\sigma)(t - \sigma) + \int\limits_{\sigma}^{t} (t - s)x''''(s)ds \tag{43}$$

$$x' = x'(\sigma) + x''(\sigma)(t - \sigma) + x'''(\sigma)\frac{1}{2}(t - \sigma)^2 + \frac{1}{2}\int\limits_{\sigma}^{t} (t - s)^2 x''''(s)ds$$

$$x(t) = x(\sigma) + x'(\sigma)(t - s) + x''(\sigma)\frac{1}{2}(t - \sigma)^2 + x'''(\sigma)\frac{1}{6}(t - \sigma)^3 + \frac{1}{6}\int\limits_{\sigma}^{t} (t - s)^3 x''''(s)ds \tag{44}$$

Полагая в (44) $t = c_0$, умножая на $(c_0 - \sigma)^{-2} \cdot 6$ и обозначая $r_0 = (c_0 - \sigma)^{-2} 6 \cdot [x(\sigma) + x'(\sigma)(c_0 - \sigma)]$, получим

$$0 = r_0 + 3x''(\sigma) + x'''(\sigma)(c_0 - \sigma) + \frac{1}{(c_0 - \sigma)^2}\int\limits_{\sigma}^{c_0} (c_0 - s)^3 x''''(s)ds \tag{45}$$

Полагая в (43) $t = c_0$ и вычитая равенство (45), найдем

$$x''(c_0) = -r_0 - 2x''(\sigma) + \int\limits_{\sigma}^{c_0} (c_0 - s)x''''(s)ds - \frac{1}{(c_0 - \sigma)^2}\int\limits_{\sigma}^{c_0} (c_0 - s)^3 x''''(s)ds \tag{46}$$

Так как $x(t) \ge 0, \quad t \in [\sigma, c_0]$, то из (19) следует $x''''(s) \le H(s) \quad s \in [\sigma, c_0]$. Из (46) находим, принимая во внимание (42),

$$x''(c_0) + M_0 + 2\alpha''(\sigma) < -r_0 - M_0 + \int\limits_{\sigma}^{c_0} [(c_0 - s) - \frac{(c_0 - s)^3}{(c_0 - \sigma)^2}]H(s)ds \tag{47}$$

(Заметим без доказательства, что для любых $c_0, \sigma \in I_0, \quad c_0 > \sigma, \quad M_0 > \int\limits_{\sigma}^{c_0}[(c_0 - s) - \frac{(c_0-s)^3}{(c_0-\sigma)^2}]H(s)ds$.) Если $x''(c_0) + M_0 + 2\alpha''(\sigma) \ge 0$, то из (47) следует противоречие, которое доказывает оценку (17), а если нет, то тогда $x''(c_0) < -(M_0 + 2\alpha''(\sigma))$. Если при этом $M_0 + 2\alpha''(\sigma) > m_0$, то снова получаем противоречие, которое доказывает оценку (17). Пусть $M_0 + 2\alpha''(\sigma) \leq m_0$. В этом случае имеем интервал $(c_0, c_1), \quad c_1 \leq \tau$, где $x'(c_0) < 0, \quad x(t) \leq 0, \quad x''''(t) \geq -H(t), \quad \forall t \in [c_0, c_1]$. Снова интегрируя равенство $x''''(t) = x''''(t), \quad t \in [c_0, c_1]$ и, рассуждая как и выше, получим вместо (46) равенство

$$x''(c_1) = -r_1 - 2x''(c_0) + \int\limits_{c_0}^{c_1} [(c_1 - s) - \frac{(c_1 - s)^3}{(c_1 - c_0)^2}] x''''(s) ds,$$

где $r_1 = (c_1 - c_0)^{-2} \cdot 6x'(c_0) < 0$. Откуда следует неравенство

$$x''(c_1) - M_0 - 4\alpha''(\sigma) > -r_1 + M_0 - \int\limits_{c_0}^{c_1} [(c_1 - s) - \frac{(c_1 - s)^3}{(c_1 - c_0)^2}] H(s) ds.$$

Если $x''(c_1) - M_0 - 4\alpha''(\sigma) \leq 0$, то получаем противоречие, которое доказывает оценку (17), а если нет, то тогда $x''(c_1) > M_0 + 4\alpha''(\sigma)$. Если при этом $M_0 + 4\alpha''(\sigma) > m_0$, то снова получаем противоречие, которое доказывает оценку. Пусть $M_0 + 4\alpha''(\sigma) \leq m_0$. В этом случае имеем интервал (c_1, c_2), где $x(t) > 0, \quad x(c_1) = x(c_2) = 0, \quad x'(c_1) > 0$. Получим или противоречие, которое доказывает оценку (17) или неравенство $x''(c_2) < -(M_0 + 8\alpha''(\sigma))$. Через конечное число шагов получим неравенство $M_0 + 2^k \alpha''(\sigma) > m_0$. Это противоречие и доказывает оценку (17) в случае если $x'(\sigma) \geq 0$. Рассмотрим теперь случай $x'(\sigma) < 0$. Тогда получим интервал (b_0, σ), где $x(t) > 0, \quad x(b_0) = 0, \quad x(\sigma) \geq 0$. Интегрируя равенство $x''''(t) = x''''(t) \quad t \in [b_0, \sigma]$ получим вместо (46) равенство

$$x''(b_0) = -\bar{r}_0 - 2x''(\sigma) + \int\limits_{b_0}^{\sigma} [(s - b_0) - \frac{(s - b_0)^3}{(\sigma - b_0)^2}] x''''(s) ds,$$

где $\bar{r}_0 = (\sigma - b_0)^{-2} \cdot 6[x(\sigma) - x'(\sigma)(\sigma - b_0)] \geq 0$ в силу (42) имеем

$$x''(b_0) + M_0 + 2\alpha''(\sigma) < -\bar{r}_0 - M_0 + \int\limits_{b_0}^{\sigma} [(s - b_0) - \frac{(s - b_0)^3}{(\sigma - b_0)^2}] H(s) ds,$$

Рассуждая аналогично предыдущему получим последовательность точек $b_k \quad (b_{k+1} < b_k)$, в которых $|x''(b_k)| > M_0 + 2^{k+1}\alpha''(\sigma), \quad (k = 0, 1, ...)$ и либо при достаточно большом "k" получаем противоречие с оценкой $m_0 = \max[|x''(t)|, \quad t \in I]$, либо получим интервал $[0, b]$, где $x(t) \geq 0$ (случай $x(t) \leq 0$ рассматривается аналогично) $x'(0) = x'''(0) = 0$, в силу краевых условий, $x(b) = 0, \quad x'(b) \leq 0, \quad x''(b) > M_0 + \alpha''(\sigma)$. Интегрируя равенство $x''''(t) = x''''(t) \leq H(t), \quad t \in [0, b]$, получим

$$x'''(t) = \int\limits_0^t x''''(s) ds$$

$$x''(t) = x''(0) + \int_0^t (t-s)x''''(s)ds$$

$$x'(t) = x''(0)t + \frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^2 x''''(s)ds$$

Полагая $t = b$ найдем

$$x''(0) = \frac{1}{b}x'(b) - \frac{1}{2b}\int_0^b (b-s)^2 x''''(s)ds$$

Из второго уравнения при $t = b$ имеем

$$x''(b) = x''(0) + \int_0^b (b-s)x''''(s)ds$$

или

$$M_0 + \alpha''(\sigma) < \int_0^b [(b-s) - \frac{1}{2b}(b-s)^2]H(s)ds$$

Это неравенство противоречит определению числа M_0. Тем самым оценка (17) доказана. При выполнении оценок (16), (17) уравнения (18) и (1) совпадают. Тем самым теорема 1 доказана. На примере уравнения

$$x'''' = \varphi(t,x), \tag{48}$$

где $\varphi \in C(I \times R)$, укажем условия при которых существуют верхние и нижние функции задачи (48), (2). Пусть $q, r \in C(I)$, $\quad q \geq 0, \quad r \geq 0, \quad \forall t \in I, \quad q(t) \not\equiv 0$ и краевая задача

$$x'''' = r(t)x, \quad x'(0) = x'''(0) = x''(\tau_0) = x(\tau_0) = 0$$

для любого $\tau_0 \in (0, \tau]$ имеет только нулевое решение. Предположим далее, что выполняются условия

$$\begin{array}{l} \varphi(t,x) \leq q(t) + r(t)x, \quad x \geq 0, \quad \forall t \in I \\ \varphi(t,x) \geq -q(t) + r(t)x, \quad x \leq 0, \quad \forall t \in I \end{array} \tag{49}$$

Тогда решение задачи (48), (2) существует. В данном случае верхнюю функцию можно определить как решение уравнения $\beta'''' = q(t) + r(t)\beta$ с условиями (2), ($\alpha = -\beta$). Если $r \equiv 0, \quad t \in I, \quad q(t) = q_0$, где q_0 есть постоянная больше нуля, то

$$\beta(t) = 24^{-1} \cdot q_0 \cdot (5\tau^4 - 6\tau^2 t^2 + t^4. \tag{50}$$

Условиям (49) удовлетворяет, в частности, правая часть

$$\varphi(t,x) = p_{2n+1}(t)x^{2n+1} + p_{2n}(t)x^{2n} + ... + p_0(t),$$

где коэффициент при старшей степени x отрицателен $p_{2n+1}(t) < 0, \quad \forall t \in I$. Если постоянная q_0 достаточно большая, то $\beta(t)$, определенная равенством (50), в данном случае будет верхней функцией. Для уравнения (1) можно рассмотреть более общие краевые условия

$$x'(0) = A_1, \quad x'''(0) = A_3, \quad x(\tau) = B_0, \quad x''(\tau) = B_2 \tag{51}$$

и сформулировать для задачи (1), (51) необходимые и достаточные условия существования решения. Мы не будем этого делать. II. Рассмотрим задачу (51) для уравнения

$$x'''' = F(t, x, x''), \tag{52}$$

где $F(t, x, y) \in C(I \times R^2)$ и F есть неубывающая функция по x. Определим для задачи (52), (51) верхние и нижние функции следующим образом: $\alpha, \beta \in C^4(I), \quad \alpha(t) \leq \beta(t), \quad \forall t \in I, \quad \alpha, \beta$ удовлетворяют условиям $\beta'(0) \leq A_1 \leq \alpha'(0), \quad \alpha'''(0) \leq A_3 \leq \beta'''(0), \quad \alpha(\tau) \leq B_0 \leq \beta(\tau), \quad \beta''(\tau) \leq B_2 \leq \alpha_2(\tau)$ и неравенствам

$$\beta''''(t) \geq F(t, \beta(t), \beta''(t)), \quad \forall t \in I, \tag{53}$$

$$\alpha''''(t) \leq F(t, \alpha(t), \alpha''(t)), \quad \forall t \in I. \tag{54}$$

Теорема 2. Условия (53), (54) являются необходимыми и достаточными для существования решения задачи (52),(51), при этом

$$\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t), \quad \beta''(t) \leq x''(t) \leq \alpha''(t), \quad \forall t \in I.$$

Доказательство теоремы 2. Докажем необходимость. Пусть $x(t)$ есть решение задачи (52), (51). Полагая $\alpha(t) = \beta(t) = x(t)$ получим, что условия (53), (54) выполняются. Докажем достаточность. Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$x'''' = F(t, \delta(\alpha(t), x, \beta(t)), \delta(\beta''(t), x'', \alpha''(t))). \tag{55}$$

Так как правая часть (55) ограничена постоянной и так как уравнение $x'''' = 0$ с нулевыми условиями (51) имеет только нулевое решение, то решение задачи (52), (51) существует см. [5,стр.25]. Обозначим его через $x(t), \quad t \in I$. Используя (55), (53) и то, что F есть неубывающая функция по x, найдем, что если $x''(t) \leq \beta''(t)$, то

$$(x(t) - \beta(t))'''' = -\varepsilon_{19}(t), \tag{56}$$

и аналогично, из (55), (54) получаем, что если $x''(t) \geq \alpha(t)$, то

$$(x(t) - \alpha(t))'''' = -\varepsilon_{20}(t), \tag{57}$$

Докажем, что $x''(t) \geq \beta''(t), \quad \forall t \in I$. Пусть это не так. Тогда существуют точки $t_0, t_1 \in I, \quad (0 \leq t_0 < t_1 \leq \tau)$ такие, что $x''(t) < \beta''(t), \quad t \in (t_0, t_1)$ и $x'''(t_0) - \beta'''(t_0) = 0, \quad x''(t_1) - \beta''(t_1) = 0$. Следовательно существует $\sigma \in (t_0, t_1)$, где $(x(t) - \beta(t))''''_{t=\sigma} > 0$. Но это противоречит (56). Значит $x''(t) \geq \beta''(t), \quad \forall t \in I$. Аналогично доказывается оценка $x''(t) \leq \alpha''(t), \quad \forall t \in I$, (с использованием (57)). Докажем выполнение оценок для $x(t)$. Пусть при некотором $t, \quad x(t) > \beta(t)$. Тогда, рассуждая как и выше, найдем, что существует точка $\sigma_0 \in I_0$, где $x''(\sigma_0) < \beta''(\sigma_0)$. Но это противоречит доказанной оценке $x''(t) \geq \beta''(t), \quad \forall t \in I$. Значит $x(t) \leq \beta(t), \quad \forall t \in I$. Аналогично доказывается оценка $x(t) \geq \alpha(t), \quad \forall t \in I$. Но при выполнении доказанных оценок, уравнения (55) и (52) совпадают. Тем самым теорема 2 доказана. Требование неубывания функции F по x является весьма существенным для справедливости теоремы 2. Остановимся на этом вопросе подробнее. Пусть в задаче (48), (2) φ есть неубывающая функция x. Тогда условия (3),(4) “автоматически” принимают вид

$$\begin{aligned} &\beta'''' \geq \varphi(t, \beta(t)), \quad t \in I \\ &\alpha'''' \leq \varphi(t, \alpha(t)), \quad t \in I. \end{aligned} \tag{58}$$

В этом случае из теоремы 1 следует существование решения задачи (48),(2). (Из теоремы 2 также следует существование решения задачи (48), (2)). Если функция φ не является неубывающей, но для нее выполняются условия (58) (для некоторых α и β),то можно построить пример, когда задача (48),(2) имеет единственное решение, но для него не выполняются оценки $\alpha \leq x \leq \beta, \quad \beta'' \leq x'' \leq \alpha'', \quad \forall t \in I$. Можно построить пример и такой функции, для которой существуют $\alpha, \beta \quad (\alpha < \beta) \quad \forall t \in I_0$, удовлетворяющие условиям (58), но задача (48),(2) решения не имеет. Эти примеры достаточно сложны и мы их не приводим.

Литература

1. Клоков Ю.А. О верхних и нижних функциях в краевых задачах для обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка. "ДУ", 2000, т.36, Nr.12, стр.1607-1614.

2. Клоков Ю.А. Верхние и нижние функции в одной задаче для дифференциального уравнения третьего порядка. LUMII, Mat.Dif.vien.2000 1 sej. 11-24 lpp.

3. Клоков Ю.А. О двухточечных задачах для ОДУ третьего порядка. "ДУ", 2003, т.39, Nr.4, стр.557-559.

4. Клоков Ю.А. О верхних и нижних функциях для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка. "ДУ",(в печати)

5. Васильев Н.И., Клоков Ю.А. Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений.-Рига, Зинатне, 1978, 184 с.

Yu.A. Klokov. On upper and lower functions for the fourth order ordinary differential equations.

Summary. The boundary value problem $x'''' = f(t, x, x''), \quad x'(0) = x'''(0) = x(\tau) = x''(\tau) = 0$ is studied. The upper and lower functions are indicated under various assumptions about a function f.

1991 MSC 34B15

Anotacija. Yu.A. Klokovs. Kādas ceturtās kārtas robežproblēmas augšejas un apakšejas funkcijas.

Tiek pētīta robežproblēma $x'''' = f(t, x, x'')$, $x'(0) = x'''(0) = x(\tau) = x''(\tau) = 0$. Noraditas augšejas un apakšejas funkcijas pie dažadiem pieņemumiem attiecibā pret funkcijas f. Pieradītas divas eksistences teoremas.

Institute of Mathematics
and Computer Science,
University of Latvia
Riga, Rainis blvd 29

Received 08.12.2004