О единственности решения краевых задач для системы двух дифференциальных уравнений первого порядка с линейными граничными условиями, I

В.Д.Пономарев

Аннотация. Доказываются теоремы единственности решения краевой задачи

$$x' = h(t, x, y), \quad y' = f(t, x, y),$$

$$a_1 x(a) + a_2 x(b) + a_3 y(a) + a_4 y(b) + a_5 = 0,$$
$$b_1 x(a) + b_2 x(b) + b_3 y(a) + b_4 y(b) + b_5 = 0.$$

УДК 517.927

Рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений

$$x' = h(t, x, y), \quad y' = f(t, x, y), \tag{1}$$

со следующими линейными краевыми условиями:

$$\begin{aligned} L_1 = a_1 x(a) + a_2 x(b) + a_3 y(a) + a_4 y(b) + a_5 = 0, \\ L_2 = b_1 x(a) + b_2 x(b) + b_3 y(a) + b_4 y(b) + b_5 = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где функции $h, f : I \times R^2 \to R$, $I = [a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$, удовлетворяют условию Каратеодори [1], $a_i, b_i \in R$, $i = 1, ..., 5$. Положим $\Delta_{ij} = a_i b_j - a_j b_i$, где $i, j \in \{1, ..., 4\}$. Очевидно $\Delta_{ij} = -\Delta_{ji}$. Непосредственной подстановкой проверяется справедливость равенства:

$$\Delta_{12}\Delta_{34} + \Delta_{13}\Delta_{43} + \Delta_{14}\Delta_{23} = 0. \tag{3}$$

Ниже будут приведены достаточные условия единственности решения краевой задачи (1)-(2), обобщающие соответствующие результаты из работ [2]-[3].

В дальнейшем нам потребуются следующие условия и теорема.

M_1) $h(t, x, y)$ строго возрастает по $y \in R$ при фиксированных $(t, x) \in I \times R$;
M_2) $h(t, x, y)$ возрастает по $y \in R$ при фиксированных $(t, x) \in I \times R$;
M_3) $f(t, x, y)$ строго возрастает по $x \in R$ при фиксированных $(t, y) \in I \times R$;
M_4) $f(t, x, y)$ возрастает по $x \in R$ при фиксированных $(t, y) \in I \times R$.

Для любого $M \in (0,\infty)$ найдутся $k_i \in L(I)$, $i = 1,...,8$ такие, что для любых $(t, x_1, x_2, y_1, y_2) \in I \times [-M, M]^4$ выполняются условия

$E_1)$ $h(t,x_1,y_1) - h(t,x_2,y_1) \le K_1(t)(x_1 - x_2), \quad x_1 \ge x_2;$

$E_2)$ $h(t,x_1,y_1) - h(t,x_2,y_1) \le K_2(t)(x_1 - x_2), \quad x_1 \le x_2;$

$E_3)$ $h(t,x_1,y_1) - h(t,x_2,y_1) \ge K_3(t)(x_1 - x_2), \quad x_1 \ge x_2;$

$E_4)$ $h(t,x_1,y_1) - h(t,x_2,y_1) \ge K_4(t)(x_1 - x_2), \quad x_1 \le x_2;$

$E_5)$ $f(t,x_1,y_1) - f(t,x_1,y_2) \le K_5(t)(y_1 - y_2), \quad y_1 \ge y_2;$

$E_6)$ $f(t,x_1,y_1) - f(t,x_1,y_2) \le K_6(t)(y_1 - y_2), \quad y_1 \le y_2;$

$E_7)$ $f(t,x_1,y_1) - f(t,x_1,y_2) \ge K_7(t)(y_1 - y_2), \quad y_1 \ge y_2;$

$E_8)$ $f(t,x_1,y_1) - f(t,x_1,y_2) \ge K_8(t)(y_1 - y_2), \quad y_1 \le y_2.$

Пусть $(x_1(t), y_1(t))$, $(x_2(t), y_2(t))$, $t \in I$ – решения теоремы (1).

$A_1)$ Для любого $t_0 \in [a,b)$ из $x_1(t_0) = x_2(t_0)$ и $y_1(t_0) > y_2(t_0)$ следует $x_1(b) > x_2(b)$ и $y_1(b) \ge y_2(b)$;

$A_2)$ для любого $t_0 \in (a,b]$ из $x_1(t_0) = x_2(t_0)$ и $y_1(t_0) < y_2(t_0)$ следует $x_1(a) > x_2(a)$ и $y_1(a) < y_2(a)$;

$A_3)$ для любого $t_0 \in [a,b)$ из $x_1(t_0) = x_2(t_0)$ и $y_1(t_0) > y_2(t_0)$ следует $x_1(b) > x_2(b)$ и $y_1(b) > y_2(b)$;

$A_4)$ для любого $t_0 \in (a,b]$ из $x_1(t_0) = x_2(t_0)$ и $y_1(t_0) < y_2(t_0)$ следует $x_1(a) > x_2(a)$ и $y_1(a) \le y_2(a)$;

$A_5)$ для любого $t_0 \in [a,b)$ из $x_1(t_0) > x_2(t_0)$ и $y_1(t_0) = y_2(t_0)$ следует $x_1(b) \ge x_2(b)$ и $y_1(b) > y_2(b)$;

$A_6)$ для любого $t_0 \in (a,b]$ из $x_1(t_0) > x_2(t_0)$ и $y_1(t_0) = y_2(t_0)$ следует $x_1(a) > x_2(a)$ и $y_1(a) < y_2(a)$;

$A_7)$ для любого $t_0 \in [a,b)$ из $x_1(t_0) > x_2(t_0)$ и $y_1(t_0) = y_2(t_0)$ следует $x_1(b) > x_2(b)$ и $y_1(b) > y_2(b)$;

$A_8)$ для любого $t_0 \in (a,b]$ из $x_1(t_0) > x_2(t_0)$ и $y_1(t_0) = y_2(t_0)$ следует $x_1(a) \ge x_2(a)$ и $y_1(a) < y_2(a)$;

$A_9)$ для любого $t_0 \in [a,b]$ из $x_1(t_0) > x_2(t_0)$ и $y_1(t_0) < y_2(t_0)$ следует $x_1(a) > x_2(a)$ и $y_1(a) < y_2(a)$;

$A_{10})$ для любого $t_0 \in [a,b]$ из $x_1(t_0) > x_2(t_0)$ и $y_1(t_0) > y_2(t_0)$ следует $x_1(b) > x_2(b)$ и $y_1(b) > y_2(b)$;

$A_{11})$ для любого $t_0 \in [a,b]$ из $x_1(t_0) \ge x_2(t_0)$ и $y_1(t_0) > y_2(t_0)$ следует $x_1(b) \ge x_2(b)$ и $y_1(b) > y_2(b)$;

$A_{12})$ для любого $t_0 \in [a,b]$ из $x_1(t_0) > x_2(t_0)$ и $y_1(t_0) \le y_2(t_0)$ следует $x_1(a) > x_2(a)$ и $y_1(a) \le y_2(a)$;

$A_{13})$ для любого $t_0 \in [a,b]$ из $x_1(t_0) > x_2(t_0)$ и $y_1(t_0) \ge y_2(t_0)$ следует $x_1(b) > x_2(b)$ и $y_1(b) \ge y_2(b)$;

$A_{14})$ для любого $t_0 \in [a,b]$ из $x_1(t_0) \ge x_2(t_0)$ и $y_1(t_0) < y_2(t_0)$ следует $x_1(a) \ge x_2(a)$ и $y_1(a) < y_2(a)$;

$A_{15})$ для любого $t_0 \in (a,b]$ из $x_1(t_0) < x_2(t_0)$ и $y_1(t_0) = y_2(t_0)$ следует $x_1(a) < x_2(a)$ и $y_1(a) > y_2(a)$;

$A_{16})$ для любого $t_0 \in (a,b]$ из $x_1(t_0) = x_2(t_0)$ и $y_1(t_0) > y_2(t_0)$ следует $x_1(a) < x_2(a)$ и $y_1(a) > y_2(a)$;

$A_{17})$ для любого $t_0 \in (a,b]$ из $x_1(t_0) < x_2(t_0)$ и $y_1(t_0) = y_2(t_0)$ следует $x_1(a) \le x_2(a)$ и $y_1(a) > y_2(a)$;

A_{18}) для любого $t_0 \in [a,b]$ из $x_1(t_0) = x_2(t_0)$ и $y_1(t_0) > y_2(t_0)$ следует $x_1(a) < x_2(a)$ и $y_1(a) \geq y_2(a)$;

A_{19}) для любого $t_0 \in [a,b]$ из $x_1(t_0) < x_2(t_0)$ и $y_1(t_0) > y_2(t_0)$ следует $x_1(a) < x_2(a)$ и $y_1(a) > y_2(a)$;

A_{20}) для любого $t_0 \in [a,b]$ из $x_1(t_0) \leq x_2(t_0)$ и $y_1(t_0) > y_2(t_0)$ следует $x_1(a) \leq x_2(a)$ и $y_1(a) > y_2(a)$;

A_{21}) для любого $t_0 \in [a,b]$ из $x_1(t_0) < x_2(t_0)$ и $y_1(t_0) \geq y_2(t_0)$ следует $x_1(a) < x_2(a)$ и $y_1(a) \geq y_2(a)$.

Теорема 1. Пусть $(x_1(t), y_1(t))$, $(x_2(t), y_2(t))$, $t \in I$ – решения системы (1). Тогда из условий

1) M_1, M_4, E_3, E_4, E_8 следует A_1;
2) M_1, M_4, E_1, E_2, E_6 следует A_2;
3) M_1, M_4, E_3, E_4, E_7 следует A_3;
4) M_1, M_4, E_1, E_2, E_7 следует A_4;
5) M_2, M_3, E_4, E_7, E_8 следует A_5;
6) M_2, M_3, E_1, E_7, E_8 следует A_6;
7) M_2, M_3, E_3, E_7, E_8 следует A_7;
8) M_2, M_3, E_2, E_7, E_8 следует A_8;
9) M_2, M_4, E_1, E_8 следует A_9;
10) M_2, M_4, E_3, E_7 следует A_{10};
11) M_2, M_3, E_4, E_7 следует A_{11};
12) M_2, M_4, E_1, E_7 следует A_{12};
13) M_2, M_4, E_3, E_8 следует A_{13};
14) M_2, M_4, E_2, E_8 следует A_{14};
15) M_2, M_3, E_2, E_5, E_8 следует A_{15};
16) M_1, M_4, E_3, E_4, E_5 следует A_{16};
17) M_2, M_3, E_3, E_5, E_6 следует A_{17};
18) M_1, M_4, E_1, E_4, E_6 следует A_{18};
19) M_2, M_4, E_4, E_5 следует A_{19};
20) M_2, M_3, E_3, E_5 следует A_{20};
21) M_2, M_4, E_4, E_6 следует A_{21}.

Доказательство теоремы дано в [4].

Приведем теоремы в терминах поведения решений системы (1) (A_1-A_{21}), дающие достаточные условия единственности решения краевой задачи (1)–(2).

Теорема 2. Пусть выполняются условия $(A_1 \vee A_3) \wedge (A_2 \vee A_4) \wedge (A_9 \vee A_{12}) \wedge A_{13} \wedge A_{19}$, $\Delta_{12} \neq 0$, $\varepsilon\Delta_{13} \geq 0$, $\varepsilon\Delta_{23} \geq 0$, $\varepsilon\Delta_{24} \geq 0$, $\varepsilon\Delta_{43} \geq 0$, где $\varepsilon = sign\,\Delta_{12}$, $a_3 \cdot b_3 \neq 0$. Тогда краевая задача (1)-(2) не может иметь более одного решения.

Доказательство. Предположим, что краевая задача (1)-(2) имеет два решения: $(x_1(t), y_1(t))$ и $(x_2(t), y_2(t))$. Тогда функции

$$u(t) = x_1(t) - x_2(t), \quad v(t) = y_1(t) - y_2(t)$$

удовлетворяют следующим краевым условиям:

$$\begin{aligned} a_1u(a) + a_2u(b) + a_3v(a) + a_4v(b) = 0, \\ b_1u(a) + b_2u(b) + b_3v(a) + b_4v(b) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Из системы (4) имеем

$$u(a) = \frac{\Delta_{23} v(a) + \Delta_{24} v(b)}{\Delta_{12}}, \tag{5}$$

$$u(b) = \frac{\Delta_{31} v(a) + \Delta_{41} v(b)}{\Delta_{12}}. \tag{6}$$

Рассмотрим следующие соотношения:
1) $\Delta_{23}^2 + \Delta_{24}^2 = 0$, $\Delta_{31}^2 + \Delta_{41}^2 = 0$;
2) $\Delta_{23}^2 + \Delta_{24}^2 \neq 0$, $\Delta_{31}^2 + \Delta_{41}^2 = 0$;
3) $\Delta_{23}^2 + \Delta_{24}^2 = 0$, $\Delta_{31}^2 + \Delta_{41}^2 \neq 0$;
4) $\Delta_{23}^2 + \Delta_{24}^2 \neq 0$, $\Delta_{31}^2 + \Delta_{41}^2 \neq 0$.

Из соотношения 1 имеем $u(a) = u(b) = 0$, что в силу теоремы 2 из работы [5] дает $u(t) = v(t) = 0$ для любых $t \in I$. Доказательство для соотношений 2-4 проходит аналогично. Разберем, например, соотношение 4. Для этого рассмотрим следующие случаи:
a) $\Delta_{23} = 0$, $\Delta_{24} \neq 0$, $\Delta_{31} \neq 0$, $\Delta_{41} = 0$;
b) $\Delta_{23} = 0$, $\Delta_{24} \neq 0$, $\Delta_{31} = 0$, $\Delta_{41} \neq 0$;
c) $\Delta_{23} = 0$, $\Delta_{24} \neq 0$, $\Delta_{31} \neq 0$, $\Delta_{41} \neq 0$;
d) $\Delta_{23} \neq 0$, $\Delta_{24} = 0$, $\Delta_{31} \neq 0$, $\Delta_{41} = 0$;
e) $\Delta_{23} = 0$, $\Delta_{24} = 0$, $\Delta_{31} = 0$, $\Delta_{41} \neq 0$;
f) $\Delta_{23} \neq 0$, $\Delta_{24} = 0$, $\Delta_{31} \neq 0$, $\Delta_{41} = 0$;
g) $\Delta_{23} \neq 0$, $\Delta_{24} \neq 0$, $\Delta_{31} \neq 0$, $\Delta_{41} = 0$;
h) $\Delta_{23} \neq 0$, $\Delta_{24} \neq 0$, $\Delta_{31} = 0$, $\Delta_{41} \neq 0$;
i) $\Delta_{23} \neq 0$, $\Delta_{24} \neq 0$, $\Delta_{31} \neq 0$, $\Delta_{41} \neq 0$.

Предположим, что $\varepsilon = 1$ (случай $\varepsilon = -1$ рассматривается аналогично). Тогда

$$\Delta_{12} > 0, \quad \Delta_{13} \geq 0, \quad \Delta_{23} \geq 0, \quad \Delta_{24} \geq 0, \quad \Delta_{43} \geq 0.$$

Покажем, что $\Delta_{14} \geq 0$. Если $\Delta_{14} < 0$, то из

$$\Delta_{14} \cdot \Delta_{23} = -(\Delta_{12} \cdot \Delta_{34} + \Delta_{13} \cdot \Delta_{42}) \geq 0$$

следует $\Delta_{23} = 0$. Поэтому

$$\Delta_{12} \cdot \Delta_{34} + \Delta_{13} \cdot \Delta_{42} = 0,$$

и отсюда $\Delta_{12} \cdot \Delta_{34} = 0$ и $\Delta_{13} \cdot \Delta_{42} = 0$. Но $\Delta_{23}^2 + \Delta_{24}^2 \neq 0$ и поэтому $\Delta_{34} = 0$, $\Delta_{23} = 0$ и $\Delta_{13} = 0$. Из двух равенств следует $\Delta_{12} = 0$ при условии $a_3 b_3 \neq 0$. Следовательно, $\Delta_{14} \geq 0$.

Рассмотрим случай a). Тогда $\Delta_{12} > 0$, $\Delta_{13} > 0$, $\Delta_{14} = 0$, $\Delta_{23} = 0$, $\Delta_{24} > 0$, $\Delta_{43} \geq 0$. Из (3) следует $\Delta_{34} > 0$, что противоречит $\Delta_{43} \geq 0$.

Рассмотрим случай c). Тогда $\Delta_{12} > 0$, $\Delta_{13} > 0$, $\Delta_{14} > 0$, $\Delta_{23} = 0$, $\Delta_{24} > 0$, $\Delta_{43} \geq 0$. Из (3) следует $\Delta_{34} > 0$, что противоречит $\Delta_{43} \geq 0$.

Рассмотрим случай g). Тогда $\Delta_{12} > 0$, $\Delta_{13} > 0$, $\Delta_{14} = 0$, $\Delta_{23} > 0$, $\Delta_{24} > 0$, $\Delta_{43} \geq 0$. Из (3) следует $\Delta_{34} > 0$, что противоречит $\Delta_{43} \geq 0$.

Рассмотрим случай i) (остальные разбираются аналогично). Из (5), (6) имеем

$$u(a) = \frac{\Delta_{23}}{\Delta_{12}} \left(v(a) + \frac{\Delta_{24}}{\Delta_{23}} v(b)\right), \tag{7}$$

$$u(b) = \frac{\Delta_{31}}{\Delta_{12}}(v(a) + \frac{\Delta_{41}}{\Delta_{31}}v(b)). \tag{8}$$

Не теряя общности (путем переобозначения), можно считать, что $u(a) \geq 0$. Для случая i) имеем

$$\Delta_{12} > 0, \quad \Delta_{13} > 0, \quad \Delta_{14} > 0, \quad \Delta_{23} > 0, \quad \Delta_{24} > 0, \quad \Delta_{43} \geq 0. \tag{9}$$

Из (3) и (9) получаем

$$\Delta_{12} \cdot \Delta_{34} + \Delta_{14} \cdot \Delta_{23} = \Delta_{13} \cdot \Delta_{24},$$

$$\Delta_{14} \cdot \Delta_{23} \geq \Delta_{13} \cdot \Delta_{24},$$
$$\frac{\Delta_{14}}{\Delta_{13}} \geq \frac{\Delta_{24}}{\Delta_{23}},$$
$$\frac{\Delta_{41}}{\Delta_{31}} \geq \frac{\Delta_{24}}{\Delta_{23}}. \tag{10}$$

Так как $u(a) \geq 0$, то из (7), (9) получаем

$$v(a) + \frac{\Delta_{24}}{\Delta_{23}}v(b) \geq 0$$

и рассмотрим два случая. Пусть

$$v(a) + \frac{\Delta_{24}}{\Delta_{23}}v(b) > 0. \tag{11}$$

Из (7) следует $u(a) > 0$. Пусть $v(a) \geq 0$. Из A_{13} следует $u(b) > 0$ и $v(b) \geq 0$. Но из (8), (9) имеем $u(b) \leq 0$, что противоречит $u(b) > 0$.

Пусть $v(a) \leq 0$. Тогда из (11) имеем $v(b) > 0$. Из (10) поэтому получаем

$$v(a) + \frac{\Delta_{41}}{\Delta_{31}}v(b) \geq v(a) + \frac{\Delta_{24}}{\Delta_{23}}v(b) > 0.$$

Из (8) имеем $u(b) < 0$. Итак, имеем

$$u(a) > 0, \quad v(a) \leq 0, \quad u(b) < 0, \quad v(b) > 0.$$

Из A_{19} следует $u(a) < 0$ и $v(a) > 0$, что противоречиво.

Рассмотрим случай

$$v(a) + \frac{\Delta_{24}}{\Delta_{23}}v(b) = 0, \tag{12}$$

$$v(a) = -\frac{\Delta_{24}}{\Delta_{23}}v(b).$$

В силу (7) имеем $u(a) = 0$. Из (8) и (12) получаем

$$\begin{aligned} u(b) &= \tfrac{\Delta_{31}}{\Delta_{12}}(-\tfrac{\Delta_{24}}{\Delta_{23}}v(b) + \tfrac{\Delta_{41}}{\Delta_{31}}v(b)) = \\ &= \tfrac{\Delta_{31}}{\Delta_{12}}(\tfrac{\Delta_{41}}{\Delta_{31}} - \tfrac{\Delta_{24}}{\Delta_{23}})v(b). \end{aligned} \tag{13}$$

Из (9), (10) имеем

$$\frac{\Delta_{31}}{\Delta_{12}}(\frac{\Delta_{41}}{\Delta_{31}}-\frac{\Delta_{24}}{\Delta_{23}})\leq 0. \tag{14}$$

Рассмотрим три случая в зависимости от знака $v(b)$. Пусть $v(b)=0$. Из (12), (13) $u(b)=0$, $v(a)=0$. Так как $u(a)=0$, то по теореме 2 из работы [5] получаем противоречие.

Пусть $v(b)>0$. Тогда из (12)-(14) имеем

$$u(a)=0,\quad v(a)<0,\quad u(b)\leq 0,\quad v(b)>0.$$

Случая $u(a)=0$, $u(b)=0$ по теореме из работы быть не может. Следовательно,

$$u(a)=0,\quad v(a)<0,\quad u(b)<0,\quad v(b)>0.$$

Из A_{19} получаем $u(a)<0$ и $v(a)>0$, что противоречиво.

Пусть $v(b)<0$. Тогда из (12)-(14) имеем

$$u(a)=0,\quad v(a)>0,\quad u(b)\geq 0,\quad v(b)<0,$$

что согласно теореме 2 из работы [5] приводит к рассмотрению случая

$$u(a)=0,\quad v(a)>0,\quad u(b)>0,\quad v(b)<0.$$

Из $A_1\vee A_3$ получаем $u(b)>0$, $v(b)\geq 0$, что противоречиво.

Следовательно, предположение о том, что краевая задача (1)-(2) имеет два различных решения, приводит к противоречию во всех возможных случаях, а поэтому краевая задача (1)-(2) может иметь не более одного решения. Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть выполняются условия

$$(A_1\vee A_3)\wedge(A_2\vee A_4)\wedge(A_9\vee A_{12})\wedge A_{13}\wedge A_{19},$$

$\Delta_{12}\neq 0$, $\varepsilon\Delta_{13}\geq 0$, $\varepsilon\Delta_{14}\geq 0$, $\varepsilon\Delta_{23}\geq 0$, $\varepsilon\Delta_{24}\geq 0$, $\varepsilon\Delta_{43}\geq 0$, где $\varepsilon=sign\,\Delta_{12}$. Тогда краевая задача (1)-(2) не может иметь более одного решения.

Доказательство. Так как условие $a_3b_3\neq 0$ использовано в доказательстве теоремы 2 только для установления знака Δ_{14}, то это условие отсутствует в формулировке теоремы 3, а присутствует условие на знак Δ_{14}. В остальном доказательство теоремы 3 совпадает с доказательством теоремы 2.

Введем следующее определение.

Определение. Будем говорить, что функция $H:R^4\to R$ имеет тип монотонности $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4)$ и записывать это в виде $H\in M(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4)$, где $\sigma_i\in\{1,-1\}$, $i=1,2,3,4$, если при $\sigma_i=1$ ($\sigma_i=-1$) функция H не убывает (не возрастает) по i-му аргументу на R^4 при фиксированных остальных аргументах.

Замечание. Выясним, какой тип монотонности имеют L_1 и L_2 при условиях теоремы 2. Ограничимся случаем, когда все $a_i\neq 0$, $b_i\neq 0$. Мы можем, очевидно, считать, что $a_1>0$ и $b_1>0$. Пусть $\varepsilon=1$ и предположим, что $a_3>0$. Тогда из $\Delta_{13}\geq 0$ следует, что $b_3>0$. Из $\Delta_{12}>0$ следует $b_2>\frac{b_1}{a_1}a_2$, а из $\Delta_{23}\geq 0$ вытекает $b_2\leq\frac{b_3}{a_3}a_2$, но из $\Delta_{13}\geq 0$ получаем $\frac{b_3}{a_3}\geq\frac{b_1}{a_1}$, следовательно, если бы $a_2<0$, то получили бы противоречие, поэтому $a_2 > 0$ и, значит, $b_2 > 0$. Нетрудно показать, что $a_4 > 0$ и $b_4 > 0$.

Дальнейший анализ, проведенный и для $\varepsilon = -1$, показывает, что возможны следующие типы монотонности L_1 и L_2. В скобках для каждого случая указывается восемь чисел, соответствующих последовательности коэффициентов (a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4) и иллюстрирующих конкретную реализацию данного типа монотонности. Если приведены два набора коэффициентов, то первый соответствует $\varepsilon = 1$, а второй $\varepsilon = -1$.

1. $L_1 \in M(1,1,1,1)$, $L_2 \in M(1,1,1,1)$, (4,3,2,1,1,1,1,1), (1,2,3,4,1,1,1,1);
2. $L_1 \in M(1,1,-1,1)$, $L_2 \in M(1,1,1,1)$, $(3,2,-1,1,1,1,1,1)$;
3. $L_1 \in M(1,1,-1,-1)$, $L_2 \in M(1,1,1,1)$, $(2,1,-2,-1,1,1,1,1)$;
4. $L_1 \in M(1,-1,-1,-1)$, $L_2 \in M(1,1,1,1)$, $(4,-1,-3,-2,1,1,1,1)$;
5. $L_1 \in M(1,1,1,1)$, $L_2 \in M(1,1,-1,1)$, $(1,2,1,3,1,1,-1,1)$;
6. $L_1 \in M(1,1,-1,1)$, $L_2 \in M(1,1,-1,1)$, $(3,2,-4,1,1,1,-1,1)$, $(2,3,-1,4,1,1,-1,1)$;
7. $L_1 \in M(1,1,-1,-1)$, $L_2 \in M(1,1,-1,1)$, $(2,1,-3,-1,1,1,-1,1)$;
8. $L_1 \in M(1,-1,-1,-1)$, $L_2 \in M(1,-1,1,1)$, $(1,-1,-2,-2,1,1,-1,1,1)$;
9. $L_1 \in M(1,1,1,1)$, $L_2 \in M(1,1,-1,-1)$, $(1,2,1,2,1,1,-1,-1):$
10. $L_1 \in M(1,1,-1,1)$, $L_2 \in M(1,1,-1,-1)$, $(2,3,-1,4,1,1,-1,1)$;
11. $L_1 \in M(1,1,-1,-1)$, $L_2 \in M(1,1,-1,-1)$, $(2,1,-3,-4,1,1,-1,-1)$, $(4,3,-2,-1,1,1,-1,-1)$;
12. $L_1 \in M(1,-1,-1,-1)$, $L_2 \in M(1,1,-1,-1)$, $(1,-3,-2,-3,1,1,-1,-1)$;
13. $L_1 \in M(1,1,1,1)$, $L_2 \in M(1,-1,-1,-1)$, $(1,3,1,2,1,-1,-1,-1)$;
14. $L_1 \in M(1,1,-1,1)$, $L_2 \in M(1,-1,-1,-1)$, $(2,2,-1,1,1,-1,-1,-1)$;
15. $L_1 \in M(1,1,-1,-1)$, $L_2 \in M(1,-1,-1,-1)$, $(3,2,-2,-1,1,-1,-1,-1)$;
16. $L_1 \in M(1,-1,-1,-1)$, $L_2 \in M(1,-1,-1,-1)$, $(1,-4,-2,-3,1,-1,-1,-1)$, $(4,-1,-3,-2,1,-1,-1,-1)$.

Случаи 2, 3, 4, 7, 8, 12 получаются при $\varepsilon = 1$, случаи 5, 9, 10, 13, 14, 15 – при $\varepsilon = -1$, а 1, 6, 11, 16 – и при $\varepsilon = 1$, и при $\varepsilon = -1$.

Список литературы

[1] Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1953, 474 с.

[2] Гудков В.В., Клоков Ю.А., Лепин А.Я., Пономарев В.Д. Двухточечные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Рига: Зинатне, 1978, 183 с.

[3] Пономарев В.Д. О единственности решения некоторых краевых задач для системы двух дифференциальных уравнений первого порядка // Латв.мат.ежегодник. Рига: Зинатне, 1974, вып.14, 157-176.

[4] Ponomarev V. On the behavior or solutions of a system of two first order ordinary differential equations // Latv.Univ.Zinātn.Raksti. Matemātika. Diferenciālvienādojumi. 1997, v. 605, 14-25.

[5] Пономарев В.Д. О единственности решения краевых задач для системы двух дифференциальных уравнений первого порядка // Matemātika. Diferenciālvienādojumi: zinātniskie raksti. 1.sējums. Rīga: LU MII, 2000, 80-85.

V. Ponomarev. About uniqueness of a solution of boundary value problems for a system of two first-order differential equations with linear boundary conditions, I.

Summary. Theorems of uniqueness of a solution of the boundary value problems

$$x' = h(t, x, y), \quad y' = f(t, x, y),$$

$$a_1 x(a) + a_2 x(b) + a_3 y(a) + a_4 y(b) + a_5 = 0,$$
$$b_1 x(a) + b_2 x(b) + b_3 y(a) + b_4 y(b) + b_5 = 0$$

are proved in the paper.

1991 MSC 34B99

V. Ponomarjovs. Par robežproblēmu atrisinājuma unitāti divu pirmās kārtas parasto diferenciālvienādojumu sistēmai ar lineāriem robežnosacījumiem, I.

Anotācija. Rakstā pierādītas unitātes teorēmas robežproblēmai

$$x' = h(t, x, y), \quad y' = f(t, x, y),$$

$$a_1 x(a) + a_2 x(b) + a_3 y(a) + a_4 y(b) + a_5 = 0,$$
$$b_1 x(a) + b_2 x(b) + b_3 y(a) + b_4 y(b) + b_5 = 0.$$

Institute of Mathematics
and Computer Science,
University of Latvia
Riga, Rainis blvd 29

Received 11.12.2003