О нижних и верхних функциях

А.Я.Лепин, Л.А.Лепин

Аннотация. Для дифференциального уравнения второго порядка дается определение верхних и нижних функций, связанное с односторонней локальной разрешимостью.

УДК 517.927

В работе [1] для краевой задачи

$$x'' = f(t,x), \quad x(0) = x(2\pi), \quad x'(0) = x'(2\pi), \tag{1}$$

где f удовлетворяет условию Каратеодори, дается следующее определение нижних и верхних функций.

Определение 1. Функция $\alpha \in C_{2\pi}$ называется нижней функцией краевой задачи (1), если для любого $t_0 \in R \quad D_-\alpha(t_0) > D^+\alpha(t_0)$ или найдется открытый интервал I_0 такой, что $t_0 \in I_0$, $\alpha \in W^{2,1}(I_0)$ и для почти всех $t \in I_0$ $\alpha''(t) \geq f(t,\alpha(t))$.

Функция $\beta \in C_{2\pi}$ называется верхней функцией краевой задачи (1), если для любого $t_0 \in R$ $D^-\beta(t_0) < D_+\beta(t_0)$ или найдется открытый интервал I_0 такой, что $t_0 \in I_0$, $\beta \in W^{2,1}(I_0)$ и для почти всех $t \in I_0$ $\beta''(t) \leq f(t,\beta(t))$.

Здесь $C_{2\pi}$ – множество непрерывных 2π периодических функций $x : R \to R$, $D_-\alpha(t)$, $D^-\alpha(t)$, $D_+\alpha(t)$ и $D^+\alpha(t)$ – числа Дини, а $W^{2,1}(I_0)$ – множество функций $x : I_0 \to R$, первая производная которых абсолютно непрерывна. Множество нижних и верхних функций в смысле определения 1 будем обозначать через $A_1(R,R)$ и $B_1(R,R)$.

В работе [1] был поставлен вопрос. Если $\alpha_1, \alpha_2 \in A_1(R,R)$, то является ли $\max\{\alpha_1, \alpha_2\} \in A_1(R,R)$. Следующий пример показывает, что это не всегда так. Пусть $f(t,x) = -2$ при $t \in [-\pi,0)$ и $f(t,x) = 0$ при $t \in [0,\pi]$, $\alpha_1(t) = -t^2 - \pi t$ при $t \in [-\pi,0)$, $\alpha_1(t) = t^2 - \pi t$ при $t \in [0,\pi]$ и 2π периодически продолжается на всю ось. Ясно, что $\alpha_1 \in A_1(R,R)$. Функция $\alpha_2(t) = \alpha_1(t)$ при $t \in [-\pi,\pi/4] \cup [\pi/2,\pi]$. Пусть $t_i = \pi/2 - \pi/2^i$, $i = 2,3....$ Соединяем точки $(t_{2k},\alpha_1(t_{2k}))$, $(t_{2k+1},\alpha(t_{2k+1}))$, $k = 1,2...$ отрезками и продолжим эти отрезки до пересечения с продолжением соседних отрезков. На интервале $[\pi/4,\pi/2]$ получается ломаная с бесконечным числом звеньев. Чтобы избавиться от угловых точек, сглаживаем их с помощью дуг окружности, при этом дуги должны быть ниже α_1. Функция $\alpha_2(t)$ совпадает с полученной кривой на интервале

$[\pi/4, \pi/2]$. Ясно, что $\alpha_2 \in A_1(R, R)$ при 2π периодическом продолжении. Функция $\alpha = \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$ обладает следующими свойствами. Точка $\pi/2$ является предельной для угловых точек и функция α в точке $\pi/2$ имеет производную 0. Если $\alpha \in A_1(R, R)$, то в некоторой окрестности точки $\pi/2$ не должно быть угловых точек, что противоречит свойствам α.

В работе [2] для уравнения

$$x'' = f(t, x, x'), \quad t \in I = [a, b], \tag{2}$$

где f удовлетворяет условию Каратеодори, дает определение нижних и верхних функций, которое приведем в удобном для нас виде.

Определение 2. Функции $\alpha, \beta : I \to R$, удовлетворяющие условию Липшица, называются нижней и верхней функциями уравнения (2), если для любых точек $t_1 \in (a, b)$ и $t_2 \in (t_1, b)$, в которых существуют соответствующие производные, выполняются неравенства

$$\alpha'(t_2) - \alpha'(t_1) \geq \int_{t_1}^{t_2} f(t, \alpha(t), \alpha'(t))dt, \tag{3}$$

$$\beta'(t_2) - \beta'(t_1) \leq \int_{t_1}^{t_2} f(t, \beta(t), \beta'(t))dt. \tag{4}$$

Множество нижних и верхних функций в смысле определения 2 будем обозначать через $A_2(I, R)$ и $B_2(I, R)$. Определение 2 естественно в том смысле, что для нижних и верхних функций имеется односторонняя локальная разрешимость, а из односторонней локальной разрешимости для функций $\alpha, \beta : I \to R$, удовлетворяющих условию Липшица, следует, что α и β удовлетворяют определению 2 (см.[3]). Покажем, что нижние и верхние функции по определению 1, если их рассматривать на интервале $I = [0, 2\pi]$, являются нижними и верхними функциями в смысле определения 2. Кроме этого, покажем, что если $\alpha_1, \alpha_2 \in A_2(I, R)$, то $\max\{\alpha_1, \alpha_2\} \in A_2(I, R)$.

Рассмотрим более общий вопрос. Какими свойствами обладает ограниченная функция $\alpha : I \to R$, если имеется односторонняя локальная разрешимость: для любого $\tau \in I$ найдутся $M, \delta > 0$ такие, что для любых $t_1, t_2 \in I$ из $\tau - \delta < t_1 < t_2 < \tau + \delta$ следует существование решения уравнения (2) $x : [t_1, t_2] \to R$, для которого $x(t_1) = \alpha(t_1)$, $x(t_2) = \alpha(t_2)$, $\alpha(t) \leq x(t) \leq \alpha(t) + M$, $t \in [t_1, t_2]$. Для этого воспользуемся обобщенными нижними и верхними функциями и обобщенным решением. Определим эти понятия и приведем некоторые их свойства (см. [4]).

Определение 3. Функции $\alpha, \beta : I \to R$ называются функциями с ограниченным изгибанием, если для любого $t \in (a, b]$ существуют $D_l\alpha(t)$ и $\lim_{\tau\to t-} D_l\alpha(\tau)$, причем $D_l\alpha(t) \geq \lim_{\tau\to t-} D_l\alpha(\tau)$, для любого $t \in [a, b)$ существуют $D_r\alpha(t)$ и $\lim_{\tau\to t+} D_r\alpha(t)$, причем $D_r\alpha(t) \leq \lim_{\tau\to t+} D_r\alpha(t)$, для любого $t \in (a, b)$ $D_l\alpha(t) \leq D_r\alpha(t)$; для любого $t \in (a, b]$ существуют $D_l\beta(t)$ и $\lim_{\tau\to t-} D_l\beta(\tau)$, причем $D_l\beta(t) \leq \lim_{\tau\to t-} D_l\beta(\tau)$, для любого $t \in [a, b)$ существуют $D_r\beta(t)$ и $\lim_{\tau\to t+} D_r\beta(t)$, причем $D_r\beta(t) \geq \lim_{\tau\to t+} D_r\beta(t)$, для любого $t \in (a, b)$ $D_l\beta(t) \geq D_r\beta(t)$.

Здесь $D_l\alpha(t)$ – левая производная и $D_r\alpha(t)$ -– правая производная. Соответствующие классы функций с ограниченным изгибанием будем обозначать через $BB^+(I, R)$ и $BB^-(I, R)$.

Лемма 1. Для $\alpha \in BB^+(I, R)$ справедливы следующие условия.
1. В каждой точке $\tau \in (a, b]$ существует $\lim_{t\to\tau-} D_r\alpha(t)$, равный $\lim_{t\to\tau-} D_l\alpha(t)$.
2. В каждой точке $\tau \in [a, b)$ существует $\lim_{t\to\tau+} D_l\alpha(t)$, равный $\lim_{t\to\tau+} D_r\alpha(t)$.
3. В каждой точке $\tau \in (a, b]$ существует $\lim_{t\to\tau-} \alpha(t)$.
4. В каждой точке $\tau \in [a, b)$ существует $\lim_{t\to\tau+} \alpha(t)$.
5. В каждой точке $\tau \in (a, b)$ выполняется неравенство $\alpha(\tau) \leq \max\{\lim_{t\to\tau-} \alpha(t), \lim_{t\to\tau+} \alpha(t)\}$.
6. Если в точке $\tau \in (a, b]$ $\alpha(\tau) \leq \lim_{t\to\tau-} \alpha(t)$, то $D_l\alpha(\tau) = \lim_{t\to\tau-} D_l\alpha(t)$.
7. Если в точке $\tau \in [a, b)$ $\alpha(\tau) \leq \lim_{t\to\tau+} \alpha(t)$, то $D_r\alpha(\tau) = \lim_{t\to\tau+} D_r\alpha(t)$.
8. Если в точке $\tau \in (a, b)$ $\lim_{t\to\tau-} \alpha(t) < \lim_{t\to\tau+} \alpha(t)$, то $D_r\alpha(\tau) = +\infty$.
9. Если в точке $\tau \in (a, b)$ $\lim_{t\to\tau-} \alpha(t) > \lim_{t\to\tau+} \alpha(t)$, то $D_l\alpha(\tau) = -\infty$.
Для $\beta \in BB^-(I, R)$ справедливы аналогичные условия.

Определение 4. Ограниченную функцию $\alpha \in BB^+(I, R)$ будем называть обобщенной нижней функцией уравнения (2) и писать $\alpha \in AG(I, R)$, если α является нижней функцией уравнения (2) по определению 2 на любом компактном интервале $J \subset I$, на котором она удовлетворяет условию Липшица.

Ограниченную функцию $\beta \in BB^-(I, R)$ будем называть обобщенной верхней функцией уравнения (2) и писать $\beta \in BG(I, R)$, если β является верхней функцией уравнения (2) по определению 2 на любом компактном интервале $J \subset I$, на котором она удовлетворяет условию Липшица.

Определение 5. Функцию $x : I \to I$ будем называть обобщенным решением уравнения (2), если $x \in AG(I, R) \cap BG(I, R)$. Множество обобщенных решений обозначим через $SG(I, R)$.

Если обобщенное решение $x \in SG(I, R)$ удовлетворяет условию Липшица, то оно является решением уравнения (2). Заметим, что условие $x \in SG(I, R)$ эквивалентно следующим условиям: функция $x : I \to R$ имеет производную в каждой точке I, возможно равную $+\infty$ или $-\infty$, x' непрерывна и если на интервале $J \subset I$ не принимает значений $+\infty$ или $-\infty$, то x -– решение уравнения (2) на интервале J. Определение 4 естественно в том смысле, что для обобщенных верхних и нижних функций имеется односторонняя локальная обобщенная разрешимость, а из односторонней локальной обобщенной разрешимости для ограниченных функций $\alpha, \beta : I \to R$ следует: α и β удовлетворяют определению 4.

Теорема 1. Если для ограниченной функции $\alpha : I \to R$ имеется односторонняя (сверху) локальная разрешимость, то α на (a, b) удовлетворяет локальному условию Липшица, неравенству (3), существуют пределы $\lim_{t\to a+} \alpha(t) = \alpha_a$, $\lim_{t\to b-} \alpha(t) = \alpha_b$, $\lim_{t\to a+} D_r\alpha(t) = \alpha'_a$, $\lim_{t\to b-} D_l\alpha(t) = \alpha'_b$ и

$$\alpha(a) \geq \alpha_a \wedge (|\ \alpha'_a\ | < \infty \vee \alpha'_a = -\infty), \quad \alpha(a) > \alpha_a \wedge \alpha'_a = +\infty, \tag{5}$$

$$\alpha(b) \geq \alpha_b \wedge (|\ \alpha'_b\ | < \infty \vee \alpha'_b = +\infty), \quad \alpha(b) > \alpha_b \wedge \alpha'_b = -\infty. \tag{6}$$

Если для ограниченной функции $\beta : I \to R$ имеется односторонняя (снизу) локальная разрешимость, то β на (a, b) удовлетворяет локальному условию Липшица, неравенству (4), существуют пределы $\lim_{t\to a+} \beta(t) = \beta_a$, $\lim_{t\to b-} \beta(t) = \beta_b$,

$\lim_{t\to a+} D_r\beta(t) = \beta'_a$, $\lim_{t\to b-} D_l\beta(t) = \beta'_b$ и

$$\beta(a) \le \beta_a \wedge (|\ \beta'_a\ | < \infty \vee \beta'_a = +\infty), \quad \beta(a) < \beta_a \wedge \beta'_a = -\infty,$$

$$\beta(b) \le \beta_b \wedge (|\ \beta'_b\ | < \infty \vee \beta'_b = -\infty), \quad \beta(b) < \beta_b \wedge \beta'_b = +\infty.$$

Доказательство. Односторонняя локальная разрешимость является частным случаем односторонней локальной обобщенной разрешимости. Следовательно, $\alpha \in AG(I, R)$ и можно применять лемму 1. Пусть $\tau \in (a, b)$. Из условий 3 и 4 леммы 1 следует существование $\lim_{t\to\tau-} \alpha(t)$ и $\lim_{t\to\tau+} \alpha(t)$. Если $\lim_{t\to\tau-} \alpha(t) < \lim_{t\to\tau+} \alpha(t)$, то из условия 8 леммы 1 $D_r\alpha(\tau) = +\infty$ и в любой окрестности τ нет односторонней разрешимости. Аналогично, если $\lim_{t\to\tau-} \alpha(t) > \lim_{t\to\tau+} \alpha(t)$, то из условия 9 леммы 1 $D_l\alpha(\tau) = -\infty$ и в любой окрестности τ нет односторонней разрешимости. Следовательно, $\lim_{t\to\tau-} \alpha(t) = \lim_{t\to\tau+} \alpha(t)$. Из условия 5 леммы 1 следует $\alpha(\tau) \le \lim_{t\to\tau-} \alpha(t) = \lim_{t\to\tau+} \alpha(t)$. Если $\alpha(\tau) < \lim_{t\to\tau-} \alpha(t) = \lim_{t\to\tau+} \alpha(t)$, то в любой окрестности τ нет односторонней разрешимости. Следовательно, α непрерывна на (a, b). Из условий 6 и 7 леммы 1 и определений 3 и 4 следуют неравенства

$$\lim_{t\to\tau-} D_l\alpha(t) = D_l\alpha(\tau) \le D_r\alpha(\tau) = \lim_{t\to\tau+} D_r\alpha(t).$$

Если $\lim_{t\to\tau-} D_l\alpha(t) = +\infty$, то $D_r\alpha(\tau) = +\infty$ и в любой окрестности τ нет односторонней разрешимости. Если $\lim_{t\to\tau+} D_r\alpha(t) = -\infty$, то $D_l\alpha(\tau) = -\infty$ и в любой окрестности τ нет односторонней разрешимости. Если $\lim_{t\to\tau-} D_l\alpha(t) = -\infty$, то $D_l\alpha(\tau) = -\infty$ и в любой окрестности τ нет односторонней разрешимости. Если $\lim_{t\to\tau+} D_r\alpha(t) = +\infty$, то $D_r\alpha(\tau) = +\infty$ и в любой окрестности τ нет односторонней разрешимости. Следовательно,

$$-\infty < \lim_{t\to\tau-} D_l\alpha(t) = D_l\alpha(\tau) \le D_r\alpha(\tau) = \lim_{t\to\tau+} D_r\alpha(t) < +\infty. \tag{7}$$

Из (7) и условий 1, 2 леммы 1 следует, что в некоторой окрестности точки τ функция α удовлетворяет условию Липшица. Следовательно, на (a, b) функция α удовлетворяет локальному условию Липшица, а из определения 4 следует, что выполняются неравенства (3). Существование пределов $\lim_{t\to a+} \alpha(t)$, $\lim_{t\to b-} \alpha(t)$, $\lim_{t\to a+} D_r\alpha(t)$ и $\lim_{t\to b-} D_l\alpha(t)$ следует из условий 3 и 4 леммы 1 и определений 3 и 4. Если $\alpha(a) < \alpha_a$ или $\alpha(a) = \alpha_a \wedge \alpha'_a = +\infty$, то в любой окрестности a нет односторонней разрешимости. Аналогично, если $\alpha(b) < \alpha_b$ или $\alpha(b) = \alpha_b \wedge \alpha'_b = -\infty$, то в любой окрестности b нет односторонней разрешимости. Следовательно, справедливы условия (5)-(6).

Приведем примеры, которые показывают возможность всех случаев условия (5). Пусть $I = [0, 1]$, $f \equiv 0$, $\alpha(0) \in \{0, 1\}$, $\alpha(t) = 0$, $t \in (0, 1]$. $f \equiv 0$, $\alpha(0) \in \{0, 1\}$, $\alpha(t) = -t^{1/2}$, $t \in (0, 1]$. $f(x') = -2x'^3$, $x' \ge 0$ и $f(x') = 0$, $x' < 0$, $\alpha(0) = 1$, $\alpha(t) = t^{1/2}$, $t \in (0, 1]$.

Выясним, для каких из этих случаев односторонняя локальная разрешимость будет всегда. Случай $\alpha(a) = \alpha_a$, $|\ \alpha'_a\ | < \infty$, $\alpha(b) = \alpha_b$ и $|\ \alpha'_b\ | < \infty$ соответствует определению 2, и односторонняя локальная разрешимость есть. На примерах покажем, что для всех остальных случаев условия (5) односторонней локальной разрешимости может и не быть. Пусть $I = [0, 1]$. $f(x') = 2x'^3$, $\alpha(0) = 1$, $\alpha(t) = 0$, $t \in (0, 1]$. Решения задачи Коши $x'' = 2x'^3$, $x(0) = 1$, $x'(0) = -0,5c^{-1/2}$, $c > 0$ имеют вид

$x(t) = (c-t)^{1/2} - c^{1/2} + 1$ и не доходят до α при $t > 0$. $f(t,x,x') = 2x'^3$, $x \geq 1 - t^{1/2}$, $f(t,x,x') = 2x'^3\delta(0, x + t^{1/2}, 1)$, $1 - t^{1/2} > x > -t^{1/2}$ и $f(t,x,x') = 0$, $x \leq -t^{1/2}$, где $\delta(x,y,z) = (x+ \mid y - x \mid - \mid y - z \mid +z)2^{-1}$, $\alpha(0) = 1$, $\alpha(t) = -t^{1/2}$, $t \in (0,1]$. $f(t,x,x') = 2x'^3$, $x \geq -t^{1/2}$, $f(t,x,x') = 2x'^3\delta(0, xt^{1/2} + 2, 1)$, $-t^{1/2} > x > -2t^{1/2}$, $f(t,x,x') = 0$, $x \leq -2t^{1/2}$, $\alpha(t) = -2t^{1/2}$, $t \in I$. $f(x') = -2x'^3$, $x' > 0$ и $f(x') = 2x'^3$, $x \leq 0$, $\alpha(0) = 1$, $\alpha(t) = t^{1/2} - 1$, $t \in (0,1]$. Заметим, что для правой части вида $f(t,x)$ случай $\alpha(a) > \alpha_a \wedge \alpha'_a = +\infty$ и $\alpha(b) > \alpha_b \wedge \alpha'_b = -\infty$ невозможны, а во всех остальных случаях имеется односторонняя локальная разрешимость. Это следует из того, что в данном случае любое обобщенное решение является решением уравнения $x'' = f(t,x)$.

Теперь можно показать, что из $\alpha \in A_1(R,R)$ следует $\alpha \in A_2([0,2\pi],R)$ для сужения α на интервал $[0,2\pi]$. Из теоремы 2.4 работы [1] следует, что для α имеется односторонняя локальная разрешимость. Следовательно, можно применить теорему 1, из которой следует, что α удовлетворяет на $(0,2\pi)$ локальному условию Липшица. Но по определению 1 все точки R равноправны для α. Поэтому α удовлетворяет условию Липшица на $[0,2\pi]$. Следовательно, $\alpha \in A_2([0,2\pi],R)$. Аналогично из $\beta \in B_1(R,R)$ следует $\beta \in B_2([0,2\pi],R)$.

Если $\alpha_1, \alpha_2 \in A_2(I,R)$, то покажем, что $\alpha = \max\{\alpha_1,\alpha_2\} \in A_2(I,R)$. Из работы [4] следует, что $\alpha \in AG(I,R)$. Но α удовлетворяет условию Липшица. Следовательно, $\alpha \in A_2(I,R)$.

Для задачи Дирихле

$$x'' = f(t,x), \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0 \tag{8}$$

в [1] дается следующее определение нижних и верхних функций.

Определение 6. Функция $\alpha \in C([0,\pi])$ называется нижней функцией краевой задачи (8), если для любого $t_0 \in (0,\pi)$ $D_-\alpha(t_0) < D^+\alpha(t_0)$ или найдется открытый интервал $I_0 \subset (0,\pi)$ такой, что $t_0 \in I_0$, $\alpha \in W^{2,1}(I_0)$ и почти для всех $t \in I_0$ $\alpha''(t) \geq f(t,\alpha(t))$, $\alpha(0) \leq 0$ и $\alpha(\pi) \leq 0$.

Функция $\beta \in C([0,\pi])$ называется верхней функцией краевой задачи (8), если для любого $t_0 \in (0,\pi)$ $D^-\beta(t_0) > D_+\beta(t_0)$ или найдется открытый интервал $I_0 \subset (0,\pi)$ такой, что $t_0 \in I_0$, $\beta \in W^{2,1}(I_0)$ и почти для всех $t \in I_0$ $\beta''(t) \leq f(t,\beta(t))$, $\beta(0) \geq 0$ и $\beta(\pi) \geq 0$.

Множество нижних и верхних функций в смысле определения 6 будем обозначать через $A_6([0,\pi],R)$ и $B_6([0,\pi],R)$. Заметим, что из $\alpha \in A_6([0,\pi],R)$ и $\beta \in B_6([0,\pi],R)$ не следует $\alpha \in A_2([0,\pi],R)$ и $\beta \in B_2([0,\pi],R)$. Действительно, пусть $f \equiv 0$, $\alpha(t) = -t^{1/2}$, $t \in [0,\pi]$ и $\beta(t) = t^{1/2}$, $t \in [0,\pi]$.

Введем определение верхних и нижних функций, несколько обобщающее определение 2.

Определение 7. Ограниченные функции $\alpha, \beta : I \to R$, удовлетворяющие локальному условию Липшица на (a,b) и неравенствам (3)-(4), называются нижней и верхней функциями уравнения (2), если

$$\alpha(a) \geq \alpha_a = \lim_{t\to a+} \alpha(t) \wedge (\alpha'_a = \lim_{t\to a+} D_r\alpha(t) = -\infty \vee \mid \alpha'_a \mid < \infty),$$

$$\alpha(b) \geq \alpha_b = \lim_{t\to b-} \alpha(t) \wedge (\alpha'_b = \lim_{t\to b-} D_l\alpha(t) = +\infty \vee \mid \alpha'_b \mid < \infty),$$

$$\beta(a) \leq \beta_a = \lim_{t\to a+} \beta(t) \wedge (\beta'_a = \lim_{t\to a+} D_r\beta(t) = +\infty \vee \mid \beta'_a \mid < \infty),$$

$$\beta(b) \leq \beta_b = \lim_{t\to b-} \beta(t) \wedge (\beta'_b = \lim_{t\to b-} D_l\beta(t) = -\infty \vee \mid \beta'_b \mid < \infty).$$

Множество нижних и верхних функций в смысле определения 7 будем обозначать через $A(I,R)$ и $B(I,R)$.

Лемма 2. Все пределы, которые участвуют в определении 7, существуют.

Доказательство. Покажем, что предел $\lim_{t\to a+} \alpha(t)$ существует. Предположим противное:

$$\underline{\lim}_{t\to a+} = \alpha_- < \alpha_+ = \overline{\lim}_{t\to a+}\alpha(t). \tag{9}$$

Пусть $M \in (0,\infty)$, $c_1 \in R$, $c_2 \in (-\infty, c_1)$, $g \in L(I,[0,\infty))$ и выполняются условия $\mid \alpha(t) \mid \leq M$, $t \in I$, $\mid f(t,x,x') \mid \leq g(t)$, $t \in I$, $x \in [-M,M]$ и $x' \in [c_2,c_1]$. Найдем $b_1 \in (a,b)$ такое, что

$$\int_a^{b_1} g(t)dt < c_1 - c_2. \tag{10}$$

Из условия (9) следует существование $c \in (a,b_1)$ и $d \in (c,b_1)$ таких, что

$$D_r\alpha(c) > c_1 > c_2 > D_l\alpha(d). \tag{11}$$

Но из [4] следует, что для нижней функции α из (11) следует неравенство

$$c_1 - c_2 \leq \int_c^d g(t)dt,$$

что противоречит (10). Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Теорема 2. Если $\alpha \in A(I,R)$, $\beta \in B(I,R)$, $\alpha \leq \beta$ и между α и β справедливо условие Шредера [5], то между α и β имеется глобальная разрешимость: для любых $c \in [a,b)$, $d \in (c,b]$, $C \in [\alpha(c),\beta(c)]$ и $D \in [\alpha(d),\beta(d)]$ существует решение $x : [c,d] \to R$ уравнения (2), удовлетворяющее условиям $x(c) = C$, $x(d) = D$ и $\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t)$, $t \in [c,d]$.

Доказательство. Ясно, что $\alpha \in AG(I,R)$ и $\beta \in BG(I,R)$. Из работы [6] следует, что между α и β имеется обобщенная глобальная разрешимость. Из условия Шредера следует, что любое обобщенное решение уравнения (2) является решением.

Теорема 3. Если ограниченные функции $\alpha, \beta : I \to R$ удовлетворяют условиям: $\alpha \leq \beta$, между α и β справедливо условие Шредера и имеется глобальная разрешимость, то $\alpha \in A(I,R)$ и $\beta \in B(I,R)$.

Доказательство. Из глобальной разрешимости следует односторонняя локальная разрешимость. Следовательно, можно применить теорему 1. Случаи $\alpha(a) > \alpha_a \wedge \alpha'_a = +\infty$ и $\alpha(b) > \alpha_b \wedge \alpha'_b = -\infty$ исключаются условием Шредера. Следовательно, $\alpha \in A(I,R)$ и $\beta \in B(I,R)$.

Для правой части вида $f(t,x)$ условие Шредера справедливо. Следовательно, $A_6([0,\pi],R) \subset A([0,\pi],R)$ и $B_6([0,\pi],R) \subset B([0,\pi],R)$.

Рассмотрим вопрос о количестве угловых точек для $\alpha \in A(I,R)$ и $\beta \in B(I,R)$. Пусть

$$A = \{t \in (a,b) : D_l\alpha(t) < D_r\alpha(t)\}, \quad B = \{t \in (a,b) : D_l\beta(t) > D_r\beta(t)\}.$$

Теорема 4. Если $\alpha \in A(I,R)$ и $\beta \in B(I,R)$, то множества A и B не более чем счетны.

Доказательство. Пусть $c \in (a,b)$, $d \in (c,b)$, $\varepsilon \in (0,\infty)$ и

$$A_\varepsilon = \{t \in [c,d] : D_r\alpha(t) - D_l\alpha(t) > \varepsilon\}.$$

Покажем, что A_ε содержит конечное число элементов. Предположим противное. Тогда для A_ε существует предельная точка τ. Применяя условия 1,2 леммы 1, получаем противоречие. Следовательно, A не более чем счетно. Аналогичное утверждение справедливо и для B.

На примере покажем, что множество угловых точек для $\alpha \in A(I,R)$ может быть всюду плотным. Пусть $I = [0,1]$ и $f \equiv 0$. Построим вогнутую функцию со всюду плотным множеством угловых точек. Возьмем равнобедренный треугольник с основанием на интервале $[0,1]$ оси t, высотой $h_1 = 5^{-1}$ и вершиной вниз. На боковых сторонах треугольника строим равнобедренные треугольники с отношением основания к высоте равным 5^2. Продолжая этот процесс, получив вогнутую функцию, которая имеет всюду плотное множество угловых точек.

Список литературы

[1] C.De Coster and P.Habets, Upper and lower solutions in the theory of ODE boundary value problems: classical and recent results, Non linear analysis and boundary value problems for ordinary differential equations, courses and lectures. – N 371,1-78.

[2] И.Т.Кигурадзе, О некоторых сингулярных краевых задачах для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, Дифференц.уравнения, 1968, т.4, N 10, 1753-1773.

[3] Л.А.Лепин, О понятиях нижней и верхней функций, Дифференц.уравнения, 1980, т.16, N 10, 1750-1759.

[4] А.Я.Лепин, Л.А.Лепин, Краевые задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, Рига, 1988.

[5] K.W.Schrader, Existence theorems for second-order boundary value problems, J.Different.Equations, 1969, v.5, N 3, 572-584.

[6] Л.А.Лепин, Обобщенные решения и разрешимость краевых задач для дифференциального уравнения второго порядка, Дифференц.уравнения, 1982, т.18, N 8, 1323-1330.

A. Lepin and L. Lepin. On upper and lower functions.

Summary. The upper and lower functions definition is given, which relates to the one-sided local solvability.

1991 MSC 34B15

A. Lepins, L. Lepins. Par augšējam un apakšējam funkcijām.

Anotācija. Otrās kārtas diferenciālvienādojumam tiek dota augšējo un apakšējo funkciju definīcija, saistīta ar vienpusīgu lokālu atrisināmību.

Institute of Mathematics
and Computer Science,
University of Latvia
Riga, Rainis blvd 29

Received 01.12.2003