Задача Дирихле для уравнения третьего порядка

А.Я.Лепин

Аннотация. Для дифференциального уравнения третьего порядка исследуется структура множества решений задачи Дирихле.

УДК 517.927

Рассмотрим уравнение

$$x''' = f(t, x, x', x''), \tag{1}$$

где $f : [0,1] \times R^3 \to R$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Фиксируем $\alpha, \beta \in AC^2([0,1], R)$ такие, что $\alpha < \beta$. Для $a \in [0,1)$ и $b \in (a,1]$ обозначим через $S(a,b)$ множество решений $x : [a,b] \to R$ уравнения (1), удовлетворяющих неравенствам $\alpha(t) \le x(t) \le \beta(t)$, $t \in [a,b]$,

$$S_\alpha(a,b) = \{x \in S(a,b) : (\exists \sigma \in [a,b])(x(\sigma) = \alpha(\sigma) \wedge x'(\sigma) = \alpha'(\sigma))\},$$

$$S_\beta(a,b) = \{x \in S(a,b) : (\exists \tau \in [a,b])(x(\tau) = \beta(\tau) \wedge x'(\tau) = \beta'(\tau))\},$$

для $A \in [\alpha(a), \beta(a)]$ и $B \in [\alpha(b), \beta(b)]$ обозначим через $D(a,b,A,B)$ множество решений задачи Дирихле

$$x''' = f(t,x,x',x''), \quad x(a) = A, \quad x(b) = B, \quad \alpha(t) \le x(t) \le \beta(t), \quad t \in [a,b],$$

для $U \in R$ обозначим через $S(a,A,U)$ множество решений $x : [a,b_x] \to R$, $b_x \in (a,1]$ задачи

$$x''' = f(t,x,x',x''), \quad x(a) = A, \quad x'(a) = U, \quad \alpha(t) \le x(t) \le \beta(t), \quad t \in [a,b_x],$$

а $S(b,B,U)$ определяется аналогично.

Далее понадобятся следующие условия.

1. Для любых $a \in [0,1)$ и $b \in (a,1]$ найдется $M \in (0,\infty)$ такое, что для любого решения $x : (a,b) \to R$ уравнения (1) из $\alpha(t) \le x(t) \le \beta(t)$, $t \in (a,b)$ следует $\mid x''(t) \mid < M$, $t \in (a,b)$.

2. Для любых $a \in [0,1)$, $b \in (a,1]$ и $A, B, A_1, B_1 \in R$ решение $x : [a,b] \to R$ любой из краевых задач

$$x''' = f(t,x,x',x''), \quad x(a) = A, \quad x'(a) = A_1, \quad x(b) = B,$$

$$x''' = f(t,x,x',x''), \quad x(a) = A, \quad x(b) = B, \quad x'(b) = B_1,$$

лежащее между α и β, единственно.

3. Для любых $a \in [0,1)$ и $b \in (a,1]$ $S_\alpha(a,b) \cap S_\beta(a,b) = \emptyset$.

Цель работы – доказать теорему.

Теорема 1. Если выполняются условия 1–3, то для любых $A \in [\alpha(0), \beta(0)]$ и $B \in [\alpha(1), \beta(1)]$ множество решений задачи Дирихле $D(0,1,A,B)$ имеет минимальное решение $y_{AB} \in S_\alpha(0,1)$ и максимальное решение $z_{AB} \in S_\beta(0,1)$, для которых справедливо неравенство $y_{AB}(t) < z_{AB}(t)$, $t \in (0,1)$. Решения y_{AB} и z_{AB} непрерывно зависят от (A,B). Для любого $U \in [y'_{AB}(0), z'_{AB}(0)]$ существует единственное решение $s_{ABU} \in D(0,1,A,B)$ такое, что $s'_{ABU}(0) = U$. Решение s_{ABU} непрерывно зависит от (A,B,U) и для любого $V \in (U, z'_{AB}(0)]$ справедливо неравенство $s_{ABU}(t) < s_{ABV}(t)$, $t \in (0,1)$.

Из теоремы 1 непосредственно следует теорема 2 (см.[1]-[3]).

Теорема 2. Если выполняются условия 1–3, $H_1, H_2, H_3 \in C(S(0,1), R)$ и для любого $x \in S(0,1)$ справедливы условия

$$x(0) = \alpha(0) \Rightarrow H_1 x \le 0, \quad x(0) = \beta(0) \Rightarrow H_1 x \ge 0,$$

$$x(1) = \alpha(1) \Rightarrow H_2 x \le 0, \quad x(1) = \beta(1) \Rightarrow H_2 x \ge 0,$$

$$x \in S_\alpha(0,1) \Rightarrow H_3 x \le 0, \quad x \in S_\beta(0,1) \Rightarrow H_3 x \ge 0,$$

то краевая задача

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad H_1 x = 0, \quad H_2 x = 0, \quad H_3 x = 0, \quad \alpha \le x \le \beta$$

имеет решение.

Аналогичная задача изучалсь в [1]–[3] в предположении, что α и β – решения уравнения (1). Существование из единственности подробно изучалось для уравнения второго порядка (см.[4]). Единственность краевых задач используется и при исследовании разрешимости краевых задач для уравнения третьего порядка (см.[5]). Заметим, что теорема 1 с точки зрения верхних и нижних функций несколько неожиданна, так как на α и β не накладываются условия вида

$$\alpha'''(t) \ge f(t, \alpha(t), \alpha'(t), \alpha''(t)), \quad \beta'''(t) \le f(t, \beta(t), \beta'(t), \beta''(t)).$$

Лемма 1 (см.[2]–[3]). Если выполняются условия 1-2, то для любых $a \in [0,1)$, $b \in (a,1]$, $A \in [\alpha(a), \beta(a)]$, $B \in [\alpha(b), \beta(b)]$ и $y, z \in D(a,b,A,B)$ из $y \le z$ следует, что для любого $U \in [y'(a), z'(a)]$ существует единственное решение s_U краевой задачи

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad x(a) = A, \quad x'(a) = U, \quad x(b) = B, \quad y \le x \le z.$$

Решение s_U непрерывно зависит от U. Если $V \in (U, z'(a)]$, то справедливо неравенство $s_U(t) < s_V(t)$, $t \in (a,b)$.

Лемма 2. Если выполняются условия 1–3, то для любых $a \in [0,1)$, $b \in (a,1]$, $c \in (a,b)$, $A \in [\alpha(a), \beta(a)]$, $B \in [\alpha(b), \beta(b)]$ и $C \in [\alpha(c), \beta(c)]$ краевая задача

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad x(a) = A, \quad x(c) = C, \quad x(b) = B, \quad \alpha \le x \le \beta \tag{2}$$

имеет не более одного решения.

Доказательство. Пусть $y, z : [a, b] \to R$ – решения краевой задачи (2) и $y \neq z$. Без ограничения общности можно считать, что $y(t) < z(t)$, $t \in (a, c)$ и $y(t) \neq z(t)$, $t \in (c, b)$. Из условия 2 следует, что $y'(a) < z'(a)$, $y'(c) > z'(c)$ и $y'(b) < z'(b)$. Ясно, что $y(t) > z(t)$, $t \in (c, b)$. Если $C = \alpha(c)$ или $C = \beta(c)$, то $y'(c) = z'(c)$, что противоречит неравенству $y'(c) > z'(c)$. Следовательно, $\alpha(c) < C < \beta(c)$. Если найдется $\sigma \in (c, b]$ такое, что $z(t) > \alpha(t)$, $t \in (c, 0)$, $z(\sigma) = \alpha(\sigma)$ и $z'(\sigma) = \alpha'(\sigma)$, то из условия 3 следует, что $z(t) < \beta(t)$, $t \in (a, b)$, а если $z(a) = \beta(a)$, то $z'(a) < \beta'(a)$. Выберем $z_* \in S(a, z(a), z'(a))$ так, чтобы $z(\sigma) < z_*(\sigma) < y(\sigma)$ и $z_*(t) < \beta(t)$, $t \in (a, \sigma)$. Заменяя z на z_*, приходим к единственности аналогичной задачи, но без касания z_* с α и β. Без ограничения общности будем считать, что α и β не касаются y и z. Обозначим через U_0 множество решений $x \in S(a, y(a), y'(a))$ таких, что существуют $c_x, b_x \in [c, b]$ такие, что $c_x < b_x$, $\alpha(t) \leq x(t) \leq y(t)$, $t \in [a, b_x]$, $x(t) < z(t)$, $t \in (a, c_x)$, $x(c_x) = z(c_x)$, $x(t) > z(t)$, $t \in (c_x, b_x)$ и $x(b_x) = z(b_x)$, через V_0 множество решений $x \in S(a, z(a), z'(a))$ таких, что существуют $c_x, b_x \in [c, b]$ такие, что $c_x < b_x$, $z(t) \leq x(t) \leq \beta(t)$, $t \in [a, b_x]$, $x(t) > y(t)$, $t \in (a, c_x)$, $x(c_x) = y(c_x)$, $x(t) < y(t)$, $t \in (c_x, b_x)$ и $x(b_x) = y(b_x)$, через u_0 – минимальное решение из U_0, а через v_0 – максимальное решение из V_0. Из условий 1-2 следует существование u_0, v_0 и $u_0 \in U_0$, $v_0 \in V_0$, а из экстремальности u_0 и v_0 следует существование $\sigma \in [a, c_{y_0}]$ и $\tau \in [a, c_{z_0}]$ таких, что $u_0(\sigma) = \alpha(\sigma)$, $u_0'(\sigma) = \alpha'(\sigma)$ и $v_0(\tau) = \beta(\tau)$, $v_0'(\tau) = \beta'(\tau)$. Покажем, что найдется $d_0 \in (a, \min\{b_{u_0}, b_{v_0}\})$ такое, что $u_0(d_0) = v_0(d_0)$. Действительно, в противном случае для минимального элемента множества $x \in V_0$ таких, что $x(t) > u_0(t)$, $t \in (c, \min\{b_x, b_{u_0}\})$ получаем противоречие с условием 2. По лемме 1, существует решение краевой задачи

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad x(a) = A, \quad x'(a) = 2^{-1}(y'(a) + z'(a)), \quad x(c) = C.$$

Продолжим его за точку c до пересечения с y или z и обозначим через x. Если x пересекается с y, то $y_1 = y$ и $z_1 = x$. В противном случае $y_1 = x$ и $z_1 = z$. Аналогично предыдущему находим u_1 и v_1 для y_1 и z_1 – аналогично u_0 и v_0 для y и z. Продолжая, получим последовательности u_i, v_i, $i = 0, 1, \ldots$. Выберем из u_i и v_i сходящиеся подпоследовательности, пределы которых обозначим через u и v. Решения u и v обладают следующими свойствами: $u(a) = v(a)$, $u'(a) = v'(a)$, найдется $d \in [c, b]$ такое, что $u(d) = v(d)$ и на интервале (a, d) решение u касается α и не касается β, а решение v касается β и не касается α. Но это противоречит условию 2.

Замечание 1. Если решения y и z краевой задачи (2) не касаются α и β, то для доказательства того, что $y = z$, достаточно условий 1-2.

Лемма 3. Если выполняются условия 1–3, то для любого $A \in [\alpha(0), \beta(0)]$ найдется $x \in S(0, 1)$ такое, что $x(0) = A$.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $A \in (\alpha(0), \beta(0))$. Предположим, что из $x \in S$ следует $x(0) \neq A$. Пусть $u \in R$ и S_1 – множество, состоящее из $x : [0, b_x] \to R \in S(0, A, u)$, $b_x \in (0, 1)$, для которых $\alpha(t) < x(t) < \beta(t)$, $t \in (0, b_x)$ и $x(b_x) = \alpha(b_x)$, а S_2 – множество, состоящее из $x : [0, b_x] \to R \in S(0, A, u)$, $b_x \in (0, 1)$, для которых $\alpha(t) < x(t) < \beta(t)$, $t \in (0, b_x)$ и $x(b_x) = \beta(b_x)$. Обозначим через $s_1 : [0, b_1] \to R$ верхнюю грань решений из S_1, а через $s_2 : [0, b_2] \to R$ – нижнюю грань для решений из S_2. Ясно, что $s_1(b_1) = \alpha(b_1)$ и $s_2(b_2) = \beta(b_2)$. Рассмотрим случай, когда $b_1 \leq b_2$. Если $s_2(b_1) > s_1(b_1)$, то для решения из $S(0, A, u)$, проходящего через точку, лежащую между $s_1(b_1)$ и $s_2(b_1)$ при $t = b_1$, получаем противоречие. Следовательно, и $s_2(t) =$

$s_1(t)$, $t \in [0,b_1]$, $b_1 < b_2$ и $s_2'(b_1) = \alpha'(b_1)$. Обозначим $s_{\alpha u} = s_2$, $a_u = b_1$ и $b_u = b_2$. Случай, когда $b_1 > b_2$, рассматривается аналогично. При этом получается решение $s_{\beta u} \in S(0,A,u)$, $a_u \in (0,1)$ и $b_u \in (a_u,1)$ такие, что $s_{\beta u}(a_u) = \beta(a_u)$, $s'_{\beta u}(a_u) = \beta'(a_u)$ и $s_{\beta u}(b_u) = \alpha(b_u)$. Если $v > u$ и $s_{\alpha u}$ и $s_{\alpha v}$ существуют, то из леммы 2 следует, что $a_u < a_v$, а если существуют $s_{\beta u}$ и $s_{\beta v}$, то из леммы 2 следует, что $a_u > a_v$. Из условия 1 следует, что найдется $M > 0$ такое, что при $u > M$ существует $s_{\beta u}$, а при $u < -M$ существует $s_{\alpha u}$. Пусть v – нижняя грань u, для которых существует $s_{\beta u}$. Из условия 1 следует, что для v существуют $s_{\alpha v}$ и $s_{\beta v}$, что противоречит условиям 2-3.

Рассмотрим случай, когда $A = \alpha(0)$. Пусть $x_i \in S$ и $x_i(0) \to \alpha(0)$. Из условия 1 следует существование сходящейся подпоследовательности $x_{i_k} \to x$. Ясно, что x – искомое решение. Случай, когда $A = \beta(0)$, рассматривается аналогично.

Лемма 4. Если выполняются условия 1–3 и $s \in S$ не касается α, то найдется $y \in S$ такое, что $y \le s$ и $y'(0) < s'(0)$, а если s не касается β, то найдется $z \in S$ такое, что $z \ge s$ и $z'(0) > s'(0)$.

Доказательство. Пусть $u_i \in R$, $i = 1,2,...$ – монотонно возрастающая последовательность и $u_i \to s'(0)$. Если $s(0) = \alpha(0)$, то пусть $u_1 > \alpha'(0)$. Обозначим через S_i множество тех $x \in S(0,s(0),u_i)$, для которых найдется $\tau \in (0,1]$ такое, что $x(\tau) = s(\tau)$, а через y_i обозначим минимальный элемент из S_i. Из условия 1 следует непустота S_i и существование y_i. Если $y_i(1) = s(1)$, то лемма доказана. Рассмотрим случай, когда для всех $i = 1,2,...$ условие $y_i(1) = s(1)$ не выполняется. Тогда найдутся $c_i, b_i \in (0,1)$ такие, что $c_i < b_i$, $y_i(t) > \alpha(t)$, $t \in (0,c_i)$, $y_i(c_i) = \alpha(c_i)$, $y_i(t) < s(t)$, $t \in (0,b_i)$ и $y_i(b_i) = s(b_i)$. Заметим, что из леммы 2 следует $c_i < c_{i+1}$. Если $c_i \to c < 1$, то выберем сходящуюся подпоследовательность $y_{i_k} \to y$. Ясно, что $y'(0) = s'(0)$, $y(c) = \alpha(c) < s(c)$ и найдется $b \in (c,1]$ такое, что $y(b) = s(b)$. Но это противоречит условию 2. Рассмотрим случай, когда $c_i \to 1$. Это возможно только при $y(1) = \alpha(1)$. Выберем сходящуюся подпоследовательность $y_{i_k} \to y$. Ясно, что $y'(0) = s'(0)$, $y(1) = s(1)$ и $y'(1) = \alpha'(1)$. Но это противоречит условию 2.

Аналогично доказывается вторая часть леммы.

Лемма 5. Если выполняются условия 1-3, $A \in [\alpha(0),\beta(0)]$, $B \in [\alpha(1),\beta(1)]$ и $D(0,1,A,B) \neq \oslash$, то множество решений задачи Дирихле $D(0,1,A,B)$ имеет минимальное решение $y_{AB} \in S_\alpha(0,1)$ и максимальное решение $z_{AB} \in S_\beta(0,1)$. Решения y_{AB} и z_{AB} непрерывно зависят от (A,B). Для любого $U \in [y'_{AB}(0), z'_{AB}(0)]$ существует единственное $s_{ABU} \in D(0,1,A,B)$ такое, что $s'_{ABU}(0) = U$. Решение S_{ABU} непрерывно зависит от (A,B,U) и для любого $V \in (U, z'_{AB}(0)]$ справедливо неравенство $s_{ABU}(t) < s_{ABV}(t)$, $t \in (0,1)$.

Доказательство. Из леммы 2 следует упорядоченность решений из $D(0,1,A,B)$. Используя условие 1, получаем существование минимального и максимального решений. Из леммы 4 следует $y_{AB} \in S_\alpha(0,1)$ и $z_{AB} \in S_\beta(0,1)$. Непрерывная зависимость следует из условий 1-2. Лемма 1 гарантирует существование решения s_{ABU}, а условие 2 – его единственность. Непрерывная зависимость от (A,B,U) следует из условий 1-2.

Лемма 6. Если выполняются условия 1–3, то $D(0,1,A,B) \neq \oslash$ для любых $A \in [\alpha(0),\beta(0)]$ и $B \in [\alpha(1),\beta(1)]$.

Доказательство. Обозначим через X множество $B \in [\alpha(1),\beta(1)]$, для которых $D(0,1,A,B) \neq \oslash$. Из леммы 3 следует $X \neq \oslash$, а из условия 1 следует замкнутость X.

Покажем, что X открыто в $[\alpha(1), \beta(1)]$. Пусть $B \in X$. Тогда решения из $S(0, A, y'_{AB}(0))$ и $S(0, A, z'_{AB}(0))$ дают решение задачи Дирихле для некоторой окрестности точки B. Из замкнутости и открытости X следует $X = [\alpha(1), \beta(1)]$.

Доказательство теоремы 1. Из леммы 6 следует, что для любых $A \in [\alpha(0), \beta(0)]$ и $B \in [\alpha(1), \beta(1)]$ множество решений задачи Дирихле $D(0, 1, A, B)$ непусто. Тогда из леммы 5 следует теорема 1.

Замечание 2. Отображение $(A, B, U) \to s_{ABU}$ дает гомеоморфизм между S и множеством

$$\{(A, B, U) : A \in [\alpha(0), \beta(0)] \wedge B \in [\alpha(1), \beta(1)] \wedge U \in [y'_{AB}(0), z'_{AB}(0)]\},$$

которое гомеоморфно кубу.

Лемма 7. Если выполняются условия 1-2, то условие 3 эквивалентно следующему условию:

4. Для любых $a \in [0, 1)$ и $b \in (a, 1]$

$$D(a, b, \alpha(a), \beta(b)) \backslash (S_\alpha(a, b) \cup S_\beta(a, b)) \neq \oslash,$$

$$D(a, b, \alpha(b), \beta(a)) \backslash (S_\alpha(a, b) \cup S_\beta(a, b)) \neq \oslash.$$

Доказательство. Так как свойства 1-3 справедливы и для интервала $[a, b]$, то из теоремы 1 следует $3 \Rightarrow 4$. Покажем, что $4 \Rightarrow 3$. Предположим противное. Пусть $x \in D(a, b, \alpha(a), \beta(b))$ такое, что $x'(a) = \alpha'(a)$, $x'(b) = \beta'(b)$ и $\alpha(t) < x(t) < \beta(t)$, $t \in (a, b)$, а $y \in D(a, b, \alpha(a), \beta(b)) \backslash (S_\alpha(a, b) \cup S_\beta(a, b))$. Заметим, что x и y имеют не менее трех общих точек. Из $S(a, \alpha(a), y'(a))$ выберем решение $y_1 : [a, b_{y_1}] \to R$, которое удовлетворяет условиям: $y_1(t) \geq y(t)$, $t \in [a, b_{y_1}]$, найдутся $c_1, b_1 \in (a, b_{y_1})$ такие, что $c_1 < b_1$, $y_1(c_1) = x(c_1)$ и $y_1(b_1) = x(b_1)$. На интервале $[a, b_1]$ x и y_1 имеют не менее трех общих точек, не совпадают и меньше β. Выберем из $S(b_1, y_1(b_1), y_1'(b_1))$ решение $y_2 : [a_{y_2}, b_1] \to R$, которое удовлетворяет условиям: $y_2(t) \leq y_1(t)$, $t \in [a_{y_2}, b_1]$, найдутся $a_1, c_2 \in (a_{y_2}, b_1)$ такие, что $a_1 < c_2$, $y_2(a_1) = x(a_1)$ и $y_2(c_2) = x(c_2)$. На интервале $[a_1, b_1]$ x и y_2 имеют не менее трех общих точек, не совпадают и лежат строго между α и β. Но это противоречит замечанию 1.

Список литературы

[1] Лепин А.Я. Краевые задачи для уравнения третьего порядка // ДАН, 1995, т.344, N 3, 309-310.

[2] Lepin A.Ya., Myshkis A.D. General nonlocal nonlinear boundary value problem for differential equation of 3rd order // Nonlinear Anal., Theory, Meth., Appl. v.28, N 9, 1533-1543 (1997).

[3] Лепин А.Я. Общая краевая задача для уравнения третьего порядка // Научные труды ЛУ, Рига 1997, т.605, 92-103.

[4] Bailey P.B., Shampine L.F. Existence from uniqueness for two point boundary value problems // J.Math.Anal.Appl. 25, 569-574 (1969).

[5] Das K.M., Lalli B.S. Boundary value problems for $y''' = f(t, y, y,', y'')$ // J.Math.Anal.Appl. 81, 300-307 (1981).

A.Lepin. Dirichlet problem for the third order differential equation.

Summary. The structure of a set of solutions to the Dirichlet boundary value problem is investigated for the third order differential equation.

1991 MSC 34B15

A.Lepins. Dirihle problēma trešās kārtas diferenciālvienādojumam.

Anotācija. Tiek pētīta Dirihle robežproblēmas atrisinājumu kopas struktūra trešās kārtas diferenciālvienādojumam.

Institute of Mathematics
and Computer Science,
University of Latvia
Riga, Rainis blvd 29

Received 15.12.2003