Об одной краевой задаче

А.Я.Лепин, Л.А.Лепин

Аннотация. Для дифференциального уравнения второго порядка показано, как из решений одной краевой задачи получаются решения другой краевой задачи.

УДК 517.927

Рассмотрим краевую задачу

$$x'' = f(t, x, x'), \tag{1}$$

$$H_1(x(a), x(b), x'(a), x'(b)) = h_1, \quad H_2(x(a), x(b), x'(a), x'(b)) = h_2, \tag{2}$$

$$\alpha \le x \le \beta, \quad U, \tag{3}$$

где $f \in Car([a,b] \times R^2, R)$, $H_1, H_2 \in C(R^4, R)$, α – нижняя функция, β – верхняя функция, U – подмножество множества условий: 1. $\alpha(a) = \beta(a)$, 2. $\alpha'(a) < \beta'(a)$, 3. $\alpha'(a) = \beta'(a)$, 4. $\alpha'(a) > \beta'(a)$, 5. $\alpha(b) = \beta(b)$, 6. $\alpha'(b) < \beta'(b)$, 7. $\alpha'(b) = \beta'(b)$, 8. $\alpha'(b) > \beta'(b)$, 9. $(\forall x, y \in SG([a,b], R))(x \le y \wedge x'(a) \le y'(a) \Rightarrow x'(b) \le y'(b)) \wedge (x \le y \wedge x'(b) \ge y'(b) \Rightarrow x'(a) \ge y'(a)))$, A. $\alpha \in SG([a,b], R)$, B. $\beta \in SG([a,b], R)$, C. $H_1\alpha = H_1\beta$, D. $H_2\alpha = H_2\beta$, $SG([a,b], R)$ – множество обобщенных решений x уравнения (1), удовлетворяющих неравенствам $\alpha \le x \le \beta$.

Определение 1. Функция $H \in C(R^4, R)$ имеет тип монотонности $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$, где $\sigma_i \in \{0, -, +, 1\}$, $i = 1, 2, 3, 4$, если при $\sigma_i = 0$ функция H не зависит от i-го аргумента, при $\sigma_i = -$ функция H не возрастает по i-му аргументу, при $\sigma_i = +$ функция H не убывает по i-му аргументу, а при $\sigma_i = 1$ на i-й аргумент функции H условия не накладываются. Класс монотонности $M(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ состоит из функций, имеющих тип монотонности $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$.

В работе [1] найдены все теоремы существования обобщенного решения краевой задачи (1)-(3) вида

T. Для любых $H_1 \in M(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$, $H_2 \in M(\sigma_5, \sigma_6, \sigma_7, \sigma_8)$, $h_1 \in [H_1\alpha, H_1\beta]$ и $h_2 \in [H_2\alpha, H_2\beta]$ из $H_1\alpha \le H_1\beta$, $H_2\alpha \le H_2\beta$ и условий U_1 следует существование решения краевой задачи (1)-(3) при $U = U_1$.

Коротко теорему T будем записывать так

$$T.\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4.\sigma_5\sigma_6\sigma_7\sigma_8.u_1u_2u_3u_4u_5u_6u_7u_8u_9u_Au_Bu_Cu_D,$$

где $u_i = i$, если i-е условие входит в U_1 и u_i пусто в противном случае. Наряду с теоремами T в работе [1] рассматривались теоремы вида

TEE. Для любых $H_1 \in M(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$, $H_2 \in M(\sigma_5, \sigma_6, \sigma_7, \sigma_8)$ найдутся $h_1 \in [H_1\alpha, H_1\beta]$ и $h_2 \in [H_2\alpha, H_2\beta]$ такие, что из $H_1\alpha \le H_1\beta$, $H_2\alpha \le H_2\beta$ и условий U_2 следует существование решения краевой задачи (1)-(3) при $U = U_2$.

В работе [1] была доказана

Теорема 1. Если справедлива теорема T, то справедлива теорема TEE для $U_2 = U_1 \backslash \{H_1\alpha = H_1\beta, H_2\alpha = H_2\beta\}$.

Возникает вопрос: все ли теоремы вида TEE даются теоремой 1? Аналогично тому, как это делалось в работе [1], покажем, что теорема 1 дает все теоремы вида TEE.

Теорема 1 показывает, что максимальные теоремы для TEE легко получаются из максимальных теорем для T (приложение 1 работы [1]) отбрасыванием условий C и D. Из максимальных теорем для TEE выделим порождающие теоремы, используя следующие симметрии. Перемена H_1 и H_2 местами, замена в уравнении (1) независимой переменной t на $-t$, замена в уравнении (1) x на $-x$, замена H_1 на $-H_1$ и замена H_2 на $-H_2$. Получаются следующие порождающие теоремы.

TEEG01. 11+ –.++00
TEEG02. 11+ –.+ –00
TEEG03. 1100.1100
TEEG04. 1++ –.+ –0–
TEEG05. 1++0.+10–
TEEG06. 1+0+.++0–
TEEG07. 11+–.1++0.1
TEEG08. 1++–.1+0+.1
TEEG09. +1+ –.+++0.2
TEEG10. +11–.++10.3
TEEG11. +1–0.0100.3
TEEG12. ++1–.0+1+.3
TEEG13. +++–.+–––.3
TEEG14. ++– +.++0–.3
TEEG15. 0110.0110.3
TEEG16. +11–.++–0.4
TEEG17. +11–.0++0.4
TEEG18. +1––.++10.4
TEEG19. +1–0.0100.4
TEEG20. ++1–.0+++.4
TEEG21. +++–.+–––.4
TEEG22. ++– +.++0–.4
TEEG23. ++––.0+1+.4
TEEG24. 0110.0110.4
TEEG25. 111+.1+10.13
TEEG26. 1110.1110.13
TEEG27. 1+1+.1+1–.13
TEEG28. 1111.1111.14
TEEG29. 11+–.11+–.15

TEEG30. 1++1.1+++.16
TEEG31. 1++1.1++1.17
TEEG32. 1++–.1++–.18
TEEG33. 1111.1111.23
TEEG34. 1111.1111.24
TEEG35. +++1.++++.26
TEEG36. +++1.+++1.27
TEEG37. +++–.+++–.28
TEEG38. 1111.1111.34
TEEG39. ++11.++1+.36
TEEG40. ++– +.+–––.36
TEEG41. +0–1.0001.36
TEEG42. 0011.0011.36
TEEG43. ++11.++11.37
TEEG44. ++– +.+–––.37
TEEG45. ++11.++– +.46
TEEG46. ++11.00++.46
TEEG47. ++1+.++–1.46
TEEG48. ++– +.+–––.46
TEEG49. +0–1.0001.46
TEEG50. 0011.0011.46
TEEG51. 111+.111+.135
TEEG52. 1+11.1+1+.136
TEEG53. 1011.1011.136
TEEG54. 1+11.1+11.137
TEEG55. 1+1–.1+1–.138
TEEG56. 1111.1111.1357
TEEG57. 1111.1111.A

Из порождающих теорем с помощью симметрий можно получить все максимальные теоремы. С помощью комплекса программ BVP9ABCD по максимальным теоремам были найдены 1048 минимальных примеров. С помощью симметрий из них были выделены 104 порождающих примера.

EEEG001. 0010.0000.12579CD, EG053
EEEG002. 0010.0000.12589CD, EG054
EEEG003. 0010.0000.1269CD, EG055
EEEG004. 00++.0000.12589CD, EG056
EEEG005. 1000.00+0.2579CD, EG074
EEEG006. 1000.00+0.2589CD, EG075
EEEG007. 1000.00+0.269CD, EG076
EEEG008. 1000.00+0.3579CD, EG077
EEEG009. 1000.00+0.3589CD, EG078
EEEG010. 1000.00+0.369CD, EG079
EEEG011. 1000.00+0.4579CD, EG080
EEEG012. 1000.00+0.4589CD, EG081
EEEG013. 1000.00+0.469CD, EG082
EEEG014. +0++.0000.3589CD, EG087

EEEG015. +0++.0000.4589CD, EG088
EEEG016. +00+.00+0.2589CD, EG111
EEEG017. +00+.00+0.3589CD, EG112
EEEG018. +00+.00+0.4589CD, EG113
EEEG019. 1010.0000.3579CD, EG135
EEEG020. 1010.0000.3589CD, EG136
EEEG021. 1010.0000.369CD, EG137
EEEG022. 1010.0000.4579CD, EG138
EEEG023. 1010.0000.4589CD, EG139
EEEG024. 1010.0000.469CD, EG140
EEEG025. 1000.+00+.2589CD, EG141
EEEG026. 1000.+00+.3589CD, EG142
EEEG027. 1000.+00+.4589CD, EG143
EEEG028. + − ++.0000.369CD, EG168
EEEG029. + − ++.0000.379CD, EG169
EEEG030. + − ++.0000.469CD, EG170
EEEG031. + − +0.000+.369CD, EG183
EEEG032. + − +0.000+.379CD, EG184
EEEG033. + − +0.000+.389CD, EG185
EEEG034. + − +0.000+.469CD, EG186
EEEG035. + − +0.000+.479CD, EG187
EEEG036. + − +0.000+.489CD, EG188
EEEG037. + − 00.00++.269CD, EG205
EEEG038. + − 00.00++.279CD, EG206
EEEG039. + − 00.00++.369CD, EG207
EEEG040. + − 00.00++.379CD, EG208
EEEG041. + − 00.00++.469CD, EG209
EEEG042. +0+0.+0+0.4579CD, EG218
EEEG043. +0+0.+0+0.4589CD, EG219
EEEG044. +0+0.+0+0.469CD, EG220
EEEG045. +0+0.0010.4579CD, EG223
EEEG046. +0+0.0010.4589CD, EG224
EEEG047. +0+0.0010.469CD, EG225
EEEG048. +0+0.00+ −.4589CD, EG226
EEEG049. +0 − 0.+0 − 0.2579CD, EG229
EEEG050. +0 − 0.+0 − 0.2589CD, EG230
EEEG051. +0 − 0.+0 − 0.269CD, EG231
EEEG052. +00+.+00+.2589CD, EG232
EEEG053. +00+.+00+.3589CD, EG233
EEEG054. +00+.+00+.4589CD, EG234
EEEG055. 0010.00+ −.4589CD, EG239
EEEG056. 00+ −.00+ −.1269CD, EG240
EEEG057. 1000.+ − 0+.269CD, EG262
EEEG058. 1000.+ − 0+.279CD, EG263
EEEG059. 1000.+ − 0+.369CD, EG264
EEEG060. 1000.+ − 0+.379CD, EG265

EEEG061. 1000.+ – 0+.469CD, EG266
EEEG062. 1000.+ – 0+.479CD, EG267
EEEG063. +0++.0++0.469CD, EG272
EEEG064. +0++.0++0.479CD, EG273
EEEG065. +0+ –.0+0 –.369CD, EG274
EEEG066. +0+ –.0+0 –.469CD, EG275
EEEG067. +0+ –.0001.369CD, EG276
EEEG068. +0+ –.0001.469CD, EG277
EEEG069. 1+00.100+.269CD, EG280
EEEG070. 1+00.100+.279CD, EG281
EEEG071. 1+00.100+.369CD, EG282
EEEG072. 1+00.100+.379CD, EG283
EEEG073. 1+00.100+.469CD, EG284
EEEG074. 1+00.100+.479CD, EG285
EEEG075. 1001.+ – 00.269CD, EG286
EEEG076. 1001.+ – 00.279CD, EG287
EEEG077. 1001.+ – 00.369CD, EG288
EEEG078. 1001.+ – 00.379CD, EG289
EEEG079. 1001.+ – 00.469CD, EG290
EEEG080. 1001.+ – 00.479CD, EG291
EEEG081. + –10.+ – 00.369CD, EG292
EEEG082. + –10.+ – 00.379CD, EG293
EEEG083. + –10.+ – 00.389CD, EG294
EEEG084. + –10.+ – 00.469CD, EG295
EEEG085. + –10.+ – 00.479CD, EG296
EEEG086. + –10.+ – 00.489CD, EG297
EEEG087. + – +0.+ – +0.369CD, EG298
EEEG088. + – +0.+ – +0.379CD, EG299
EEEG089. + – +0.+ – +0.389CD, EG300
EEEG090. + –– 0.+ ––0.369CD, EG301
EEEG091. +–– 0.+ ––0.379CD, EG302
EEEG092. +–– 0.+ ––0.389CD, EG303
EEEG093. +–– 0.+ ––0.469CD, EG304
EEEG094. +–– 0.+ ––0.479CD, EG305
EEEG095. +––0.+ ––0.489CD, EG306
EEEG096. +01–.+00 –.369CD, EG307
EEEG097. +01–.+00 –.469CD, EG308
EEEG098. +0+ –.+0+ –.369CD, EG309
EEEG099. +0 ––.+0––.369CD, EG310
EEEG100. +0 ––.+0 ––.469CD, EG311
EEEG101. +001.00+1.369CD, EG312
EEEG102. +001.00+1.469CD, EG313
EEEG103. +00 –.0011.369CD, EG314
EEEG104. +00 –.0011.469CD, EG315

Все они совпадают с соответствующими порождающими примерами работы [1]. Через запятую указан номер порождающего примера из приложения 1 работы [1].

Список литературы

[1] Лепин А.Я., Лепин Л.А. Краевые задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, Зинатне, Рига (1988).

A. Lepin and L. Lepin. On some boundary value problem.

Summary. It is shown for the second order differential equation how one differential equation can be obtained from another one.

1991 MSC 34B15

A. Lepins, L. Lepins. Par vienu robežproblēmu.

Anotācija. Otrās kārtas diferenciālvienādojumam tiek parādīts, kā no viena diferenciālvienādojuma var būt iegūts cits diferenciālvienādojums.

Institute of Mathematics
and Computer Science,
University of Latvia
Riga, Rainis blvd 29

Received 12.12.2003