Двухточечные краевые задачи с монотонными граничными условиями

А.Я.Лепин, Л.А.Лепин

Аннотация. Для φ–Лапласиана доказывается существование решения различных краевых задач.

УДК 517.927

Рассмотрим уравнение

$$(\varphi(x'))' = f(t, x, x'), \quad t \in I = [a, b], \tag{1}$$

где $\varphi \in C(R, R)$ строго возрастает, $\lim_{y \to -\infty} \varphi(y) = -\infty$, $\lim_{y \to +\infty} \varphi(y) = +\infty$ и f удовлетворяет условиям Каратеодори: $f(\cdot, x, y)$ измерима на I при фиксированных $x, y \in R$, $f(t, \cdot, \cdot)$ непрерывна на R^2 почти при всех $t \in I$ и для любого компактного множества $P \subset R^2$ найдется функция $g \in L_1(I, R)$ такая, что для всех $(t, x, y) \in I \times P$ справедливо неравенство $| f(t, x, y) | \leq g(t)$. Аналогичное уравнение изучалось в работах [1]-[4].

Определение 1. Функция $x \in C^1(I, R)$ является решением уравнения (1), если функция $\varphi(x') : I \to R$ абсолютно непрерывна и уравнение (1) удовлетворяется почти всюду на I. Множество решений уравнения (1) обозначим через $S(I, R)$.

Пусть U – подмножество следующего множества условий:
1. $\alpha(a) = \beta(a)$,
2. $\alpha'(a) < \beta'(a)$,
3. $\alpha'(a) = \beta'(a)$,
4. $\alpha'(a) > \beta'(a)$,
5. $\alpha(b) = \beta(b)$,
6. $\alpha'(b) < \beta'(b)$,
7. $\alpha'(b) = \beta'(b)$,
8. $\alpha'(b) > \beta'(b)$,
9. $(\forall x, y \in S(I, R))((x \leq y \land x'(a) \leq y'(a) \to x'(b) \leq y'(b)) \land (x \leq y \land x'(b) \geq y'(b) \to x'(a) \geq y'(a)))$,
A. $\alpha \in S(I, R)$,
B. $\beta \in S(I, R)$,

C. $H_1\alpha = H_1\beta$,
D. $H_2\alpha = H_2\beta$.

Далее будет изучаться краевая задача

$$(\varphi(x'))' = f(t, x, x'), \tag{2}$$

$$H_1(x(a), x(b), x'(a), x'(b)) = H_1 x = h_1, \tag{3}$$

$$H_2(x(a), x(b), x'(a), x'(b)) = H_2 x = h_2, \tag{4}$$

$$\alpha \le x \le \beta, \quad U, \tag{5}$$

где $H_1, H_2 \in C(R^4, R)$, $h_1, h_2 \in R$, $\alpha : I \to R$ – нижняя, $\beta : I \to R$ -– верхняя функции для уравнения (1) и $\alpha \le \beta$. Кроме непрерывности, функции H_1 и H_2 будут принадлежать к определенным классам монотонности.

Определение 2. Функция $H \in C(R^4, R)$ имеет тип монотонности $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$, где $\sigma_i \in \{0, -, +, 1\}$, $i = 1, 2, 3, 4$, если при $\sigma_i = 0$ функция H не зависит от i–го аргумента, при $\sigma_i = -$ функция H не возрастает по i–му аргументу, при $\sigma_i = +$ функция H не убывает по i–му аргументу, а при $\sigma_i = 1$ на i–й аргумент функции H условия не накладываются. Класс монотонности $M(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ состоит из функций, имеющих тип монотонности $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$.

Разрешимость краевой задачи (2)-(5) будем выводить из разрешимости задачи Дирихле

$$(\varphi(x'))' = f(t, x, x'), \quad x(a) = h_1, \quad x(b) = h_2, \quad \alpha_1 \le x \le \beta_1, \tag{6}$$

где $h_1 \in [\alpha_1(a), \beta_1(a)]$, $h_2 \in [\alpha_1(b), \beta_1(b)]$, α_1 -– нижняя, а β_1 -– верхняя функции и $\alpha \le \alpha_1 \le \beta_1 \le \beta$. Будем говорить, что выполняется условие E, если краевая задача Дирихле (6) имеет решение при любых α_1, β_1, h_1, h_2 и множество этих решений компактно.

Заметим, что если $\alpha, \beta \in Lip(I, R)$, для любых $t_1 \in (a, b)$, $t_2 \in (t_1, b)$ из существования соответствующих производных следуют неравенства

$$\varphi(\alpha'(t_2)) - \varphi(\alpha'(t_1)) \ge \int_{t_1}^{t_2} f(s, \alpha(s), \alpha'(s))ds,$$

$$\varphi(\beta'(t_2)) - \varphi(\beta'(t_1)) \le \int_{t_1}^{t_2} f(s, \beta(s), \beta'(s))ds$$

и между α и β справедливо условие Шредера (см.[5]), то справедливо условие E. Для так определенных нижних и верхних функций существуют $\alpha'(a)$, $\beta'(a)$, $\alpha'(b)$ и $\beta'(b)$. Другое определение верхних и нижних функций есть в работах [3]-[4].

Постановка задачи

Задача Дирихле

$$(\varphi(x'))' = f(t, x, x'), \quad x(a) = h_1, \quad x(b) = h_2, \quad \alpha \le x \le \beta$$

получается из краевой задачи (2)-(5) при $H_1 x = x(a)$, $H_2 x = x(b)$ и $U = \oslash$. Ясно, что условия $h_1 \in [\alpha(a), \beta(a)]$ и $h_2 \in [\alpha(b), \beta(b)]$ являются необходимыми для существования решения задачи Дирихле. Если переписать их в терминах функций H_1 и

H_2, то получим условия $h_1 \in [H_1\alpha, H_1\beta]$ и $h_2 \in [H_2\alpha, H_2\beta]$. Эти условия являются естественными и для краевой задачи (2)-(5). Причем разумно требовать выполнения условий $H_1\alpha \leq H_1\beta$ и $H_2\alpha \leq H_2\beta$. Этого всегда можно добиться, при необходимости умножая соответствующее граничное условие на –1.

Пусть M_1 и M_2 – классы монотонности. Основная цель дальнейшего – выяснить, при каких M_1, M_2 и U справедливо

Утверждение $\forall\forall$. Для любых $H_1 \in M_1$, $H_2 \in M_2$, $h_1 \in [H_1\alpha, H_1\beta]$ и $h_2 \in [H_2\alpha, H_2\beta]$ из $H_1\alpha \leq H_1\beta$, $H_2\alpha \leq H_2\beta$, условий U и E следует существование решения краевой задачи (2)-(5).

Из разрешимости задачи Дирихле следует справедливость утверждения $\forall\forall$ для $M_1 = M(1,0,0,0)$, $M_2 = M(0,1,0,0)$ и $U = \oslash$. Для $H_1x = x(a) = \alpha(a) = h_1$ и $H_2x = x(a) = \beta(a) = h_2$ при $\alpha(a) < \beta(a)$ краевая задача (2)-(5) не имеет решения. Следовательно, для $M_1 = M(1,0,0,0)$, $M_2 = M(1,0,0,0)$ и $U = \oslash$ утверждение $\forall\forall$ неверно.

Набор (M_1, M_2, U), подстановка которого в формулировку утверждения $\forall\forall$ делает его верным, будем называть теоремой. Если набор не является теоремой, то можно построить противоречащий пример. Поэтому такой набор будем называть примером. Обозначим через TE множество всех наборов (M_1, M_2, U), через T – множество всех теорем, а через E – множество всех примеров. В TE введем частичный порядок следующим образом: $(M_1, M_2, U_1) \leq (M_3, M_4, U_2)$, если $M_1 \subset M_3$, $M_2 \subset M_4$ и $U_2 \subset U_1$. Пусть T_m – множество максимальных элементов множества T, а E_m – множество минимальных элементов множества E. Из $t_1 \in T$, $t_2 \in TE$ и $t_2 \leq t_1$ следует, что t_2 является частным случаем теоремы t_1. Поэтому $t_2 \in T$. Аналогично из $e_1 \in E$, $e_2 \in TE$ и $e_1 \leq e_2$ следует $e_2 \in E$. Поэтому T_m полностью определяет множество T, а E_m – множество E.

Заметим, что количество элементов в TE – около $5 \cdot 10^8$. В работе [6] для $\varphi(y) = y$ было показано, что T_m состоит из 931 элемента, а E_m – из 2554 элементов. Краевая задача (2)-(5) и условия 1-D обладают симметрией, которой естественно воспользоваться для уменьшения нуждающихся в доказательстве теорем. Таким образом, удалось выделить порождающие теоремы T_g, которых оказалось 106. Аналогично из E_m выделяются порождающие примеры E_g, которых оказалось 315. Порождающие теоремы, отличающиеся друг от друга только тем, что вместо условия 3 стоит условие 2 или 4, а вместо условия 7 – условие 6, имеют аналогичные доказательства. Поэтому их можно объединить и получить множество базовых теорем Tb. Оказалось, что множество Tb состоит из 95 элементов. Для доказательства всех теорем из T достаточно доказать все теоремы из Tb. Чтобы убедиться, что ни одна теорема не пропущена, достаточно построить все примеры из E_g. Все это было проделано в работе [6] для $\varphi(y) = y$.

Базовые теоремы

Набор (M_1, M_2, U), где $M_1 = M(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ и $M_1 = M(\sigma_5, \sigma_6, \sigma_7, \sigma_8)$, полностью определяет теорему или пример. Для базовых теорем будем пользоваться следующим обозначением:

$$Tbn.\ \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4.\sigma_5\sigma_6\sigma_7\sigma_8.u_1u_2u_3u_4u_5u_6u_7u_8u_9u_Au_Bu_Cu_D,$$

где n – номер базовой теоремы, $u_i = i$, если i–е условие входит в U и u_i пусто в противном случае. Теперь приведем список базовых теорем.

Tb01. 11– +.–– 00.––.NS
Tb02. 1––0.–10+.––.NN.m
Tb03. 11– +.1––0.1.+ –.NS.m
Tb04. —1–+.–––0.2.+–.NS
Tb05. —11+.––10.3.+ –.NS
Tb06. —11+.––+0.4.+ –.NS
Tb07. — 1+ +.––10.4.+ –.NN
Tb08. 111+.1–10.13.+ –.NS.m
Tb09. 11– +.11– +.15.+ +.SS.m
Tb10. 1––1.1–––.16.+ +.NS
Tb11. 1––1.1––1.17.+ +.SS
Tb12. 1–– +.1–– +.18.+ +.SS.m
Tb13. –––1.––––.26.+ +.NS
Tb14. –––1.–––1.27.+ +.SS
Tb15. –∸– +.––– +.28.+ +.SS
Tb16. ––11.––1–.36.+ +.NS
Tb17. ––11.––11.37.+ +.SS
Tb18. ––11.–– + –.46.+ +.NS
Tb19. ––1–.–– + 1.46.+ +.NN
Tb20. 111+.111+.135.++.SS.m
Tb21. 1–11.1–1–.136.++.NS
Tb22. 1–11.1–11.137.+ +.SS
Tb23. 1–1+.1–1+.138.+ +.SS.m
Tb24. 1111.1111.1357.++.SS.m
Tb25. 1111.––00.9AB.+ +.NS
Tb26. 1–––.–1+ +.9AB.––.NN.m
Tb27. 1111.1–––.19AB.+ +.NS.m
Tb28. 1111.––––.29AB.+ +.NS
Tb29. 1–––.––1–.29AB.+ +.NN
Tb30. 1–––.–– +1.2∨39AB.– +.NN
Tb31. 1111.––1–.39AB.+ +.NS
Tb32. 1111.–– +0.49AB.+ +.NS
Tb33. —1+ +.––1–.49AB.+ –.NN
Tb34. 1111.1–1–.139AB.+ +.NS.m
Tb35. 1111.1111.159AB.+ +.SS.m
Tb36. 1111.1–11.179AB.+ +.NS.m
Tb37. 1111.––11.379AB.+ +.NS
Tb38. 1111.–– + –.469AB.+ +.NS
Tb39. 1+0+.––0+.C.– +.N
Tb40. + ––0.–1– +.C.––.N
Tb41. + –00.11–+.C.––.N
Tb42. 1+0+.1–– +.1C.+ +.N.m
Tb43. 0+1+.––1+.3C.+ +.N
Tb44. + + – +.–– 0+.3∨4C.– +.N

Tb45. +−−−.−−−+.3∨4C.−−.N
Tb46. 0+1+.−− + +.4C.+ +.N
Tb47. 0+++.−−1+.4C.+ −.N
Tb48. 0++0.–11+.4C.+ −.N
Tb49. 1+1+.1–1+.13C.+ +.N.m
Tb50. + −−−.−− + −.3∨46∨7C.−−.S
Tb51. 00++.−−11.46C.++.N
Tb52. 1111.−−00.AC.++.S.*
Tb53. 1+++.−−0+.AC.− +.N
Tb54. + −−−.−−− +.AC.−−.N
Tb55. 1111.1−−0.1AC.+ +.S.*
Tb56. 1+++.1−− +.1AC.+ +.N
Tb57. 1111.−−−0.2AC.+ +.S.*
Tb58. ++++.−−− +.2AC.++.N
Tb59. 1111.−−10.3AC.+ +.S.*
Tb60. ++1+.−−1+.3AC.+ +.N
Tb61. 1111.−− + 0.4AC.+ +.S.*
Tb62. ++1+.−− + +.4AC.+ +.N
Tb63. 1111.1–10.13AC.+ +.S.*
Tb64. 1111.11− +.15AC.++.S.*
Tb65. 1111.1−−−.16AC.+ +.S.*
Tb66. 1111.1−−1.17AC.+ +.S.*
Tb67. 1111.1−− +.18AC.+ +.S.*
Tb68. 1111.−−−−.26AC.+ +.S.*
Tb69. 1111.−−−1.27AC.+ +.S.*
Tb70. 1111.−−− +.28AC.+ +.S.*
Tb71. 1111.−−1–.36AC.+ +.S.*
Tb72. 1111.−−11.37AC.+ +.S.*
Tb73. 1111.−− + 1.46AC.+ +.S.*
Tb74. 1111.111+.135AC.+ +.S.*
Tb75. 1111.1–1–.136AC.+ +.S.*
Tb76. 1111.1–11.137AC.+ +.S.*
Tb77. 1111.1–1+.138AC.+ +.S.*
Tb78. 1000.–1+ +.3∨49AC.−−.N
Tb79. 1000.−− + 1.3∨469AC.− +.N
Tb80. + −−−.1111.9ABC.−−.N
Tb81. 1100.1100.CD.−−.m
Tb82. +1–0.0100.3∨4CD.−−
Tb83. 0110.0110. 3∨4CD.+ −
Tb84. 1110.1110.13CD.+ −.m
Tb85. +0–1.0001.3∨46CD.−+
Tb86. 0011.0011.3∨46CD.+ +
Tb87. 1011.1011.136CD.+ +
Tb88. 1111.1111.ACD.+ +.*
Tb89. 1111.1111.14
Tb90. 1111.1111.23

Tb91. 1111.1111.24

Tb92. 1111.1111.34

Tb93. 1111.1111.189AB

Tb94. 1111.1111.279AB

Tb95. 1111.1111.289AB

В теореме Tb30 условие 2∨3 соответствует условию $\alpha'(a) \leq \beta'(a)$, в теоремах Tb44, Tb45, Tb50, Tb78, Tb79, Tb82, Tb83, Tb85 и Tb86 условие 3∨4 соответствует условию $\alpha'(a) \geq \beta'(a)$, а в теореме Tb50 условие 6∨7 соответствует условию $\alpha'(b) \leq \beta'(b)$. Оказывается, что решение краевой задачи (2)-(5) может удовлетворять неравенствам

$$\min\{\alpha'(a), \beta'(a)\} \leq x'(a) \leq \max\{\alpha'(a), \beta'(a)\}, \tag{7}$$

$$\min\{\alpha'(b), \beta'(b)\} \leq x'(b) \leq \max\{\alpha'(b), \beta'(b)\}. \tag{8}$$

Если удовлетворяются оба неравенства, то в теореме после идентификатора для U стоит $+\,+$, если удовлетворяется неравенство (7), то стоит $+\,-$, если удовлетворяется неравенство (8), то стоит $-\,+$, если оба неравенства (7)-(8) могут не удовлетворяться, то стоит $-\,-$. В теоремах Tb01-Tb38 граничные условия $H_1x = h_1$ и $H_2x = h_2$ могут вырождаться. Будем говорить, что граничное условие $H_1x = h_1$ вырождено, если из условий теоремы следует, что $H_1\alpha = H_1\beta$. Аналогично граничное условие $H_2x = h_2$ вырождено, если из условий теоремы следует, что $H_2\alpha = H_2\beta$. Так, в теореме Tb09 оба граничных условия вырождены. Этому соответствует идентификатор SS. В теореме Tb01 вырождено второе граничное условие. Этому соответствует идентификатор NS. В теореме Tb02 нет вырождения. Этому соответствует идентификатор NN. Ясно, что наибольший интерес представляют теоремы без вырождения. В теоремах Tb39-Tb80 нет смысла говорить о вырожденности первого граничного условия. Поэтому идентификатор вырожденности относится только ко второму граничному условию. Так, для теоремы Tb50 второе граничное условие вырождено. Для теорем Tb81-Tb95 понятие вырожденности не имеет смысла. В теоремах Tb52, Tb55, Tb57, Tb59, Tb61, Tb63-Tb77 и Tb88 функция α является решением. Этот факт отмечен *. Для некоторых теорем существуют максимальное и минимальное решения. Этот факт отмечен m. Теоремы Tb89-Tb95 тривиально истинны, так как их условия противоречивы.

Для базовой теоремы Tbn через TbnC будем обозначать теорему, получающуюся из Tbn добавлением условия C и заменой H_1 на $-H_1$. Если теорема Tbn доказана, то ясно, что теорема TbnC справедлива. Аналогично через TbnD будем обозначать теорему, получающуюся из Tbn добавлением условия D и заменой H_2 на $-H_2$, через TbnH будем обозначать теорему, получающуюся из Tbn, если H_1 и H_2 поменять местами, через Tbnt будем обозначать теорему, получающуюся из Tbn, если в уравнении заменить t на $-t$, через Tbnx будем обозначать теорему, получающуюся из Tbn, если в уравнении заменить x на $-x$. Эти теоремы показывают, какими симметриями пользовались для нахождения T_g.

Пусть справедлива

Теорема *Id***.** Для любых $H_1 \in M_1$, $H_2 \in M_2$, $h_1 \in [H_1\alpha, H_1\beta]$ и $h_2 \in [H_2\alpha, H_2\beta]$ из $H_1\alpha \leq H_1\beta$, $H_2\alpha \leq H_2\beta$ и условий U и E следует существование решения краевой задачи (2)-(5).

Тогда справедливы следующие теоремы.

Теорема $Id\exists\forall$**.** Для любых $H_1 \in M_1$, $H_2 \in M_2$ и $h_1 \in [H_1\alpha, H_1\beta]$ найдется $h_2 \in [H_2\alpha, H_2\beta]$ такое, что из $H_1\alpha \le H_1\beta$, $H_2\alpha \le H_2\beta$, условий $U \backslash \{H_2\alpha = H_2\beta\}$ и E следует существование решения краевой задачи (2)-(5).

Теорема $Id\exists\forall$**.** Для любых $H_1 \in M_1$, $H_2 \in M_2$ и $h_2 \in [H_2\alpha, H_2\beta]$ найдется $h_1 \in [H_1\alpha, H_1\beta]$ такое, что из $H_1\alpha \le H_1\beta$, $H_2\alpha \le H_2\beta$, условий $U \backslash \{H_1\alpha = H_1\beta\}$ и E следует существование решения краевой задачи (2)-(5).

Теорема $Id\exists\exists$**.** Для любых $H_1 \in M_1$ и $H_2 \in M_2$ найдутся $h_1 \in [H_1\alpha, H_1\beta]$ и $h_2 \in [H_2\alpha, H_2\beta]$ такие, что из $H_1\alpha \le H_1\beta$, $H_2\alpha \le H_2\beta$, условий $U \backslash \{H_1\alpha = H_1\beta, H_2\alpha = H_2\beta\}$ и E следует существование решения краевой задачи (2)-(5).

Действительно, пусть $\varphi_i(t) = t - H_i\alpha$ при $t < H_i\alpha$, $\varphi_i(t) = 0$ при $H_i\alpha \le t \le H_i\beta$ и $\varphi_i(t) = t - H_i\beta$ при $H_i\beta < t$, $i = 1, 2$. Заменяя H_2 на $\varphi_2(H_2)$, получим справедливость теоремы $Id\forall\exists$. При замене H_1 на $\varphi_1(H_1)$ получаем справедливость теоремы $Id\exists\forall$. Заменяя H_1 на $\varphi_1(H_1)$ и H_2 на $\varphi_2(H_2)$, получаем справедливость теоремы $Id\exists\exists$.

Заметим, что для конкретных α и β по крайней мере два из условий 1-8 выполняются. Это говорит об их естественности. Условия A и B часто встречаются. Например, при доказательстве базовых теорем они будут использоваться. Интересно отметить, что добавление условий A и B к условиям 1-8 не дает новых теорем. Однако добавление условия 9 к условиям A и B приводит к новым теоремам. Условие C нужно для периодической задачи.

Доказательство базовых теорем

Аналогично тому, как это делалось в работе [6], можно доказать все базовые теоремы для краевой задачи (2)-(5) кроме теоремы Tb50. Эту методику доказательства продемонстрируем на примере доказательства теорем Tb01-Tb09.

Теорема Tb01. $11{-}{+}.{-}{-}00.{-}{-}$. Для любых $H_1 \in M(1, 1, -, +)$, $H_2 \in M(-, -, 0, 0,)$, $h_1 \in [H_1\alpha, H_1\beta]$ и $h_2 \in [H_2\alpha, H_2\beta]$ из $H_1\alpha \le H_1\beta$, $H_2\alpha \le H_2\beta$ и условия E следует существование решения краевой задачи (2)-(5).

Доказательство. Определим последовательности α_k, β_k, $k = 1, 2, ...$ по индукции. Пусть $\alpha_1 = \alpha$ и $\beta_1 = \beta$. Через y обозначим решение задачи Дирихле

$$(\varphi(x'))' = f(t, x, x'), \quad x(a) = (\alpha_k(a) + \beta_k(a))/2,$$

$$x(b) = (\alpha_k(b) + \beta_k(b))/2, \quad \alpha_k \le x \le \beta_k.$$

Если $H_1 y \le h_1$, то полагаем $\alpha_{k+1} = y$ и $\beta_{k+1} = \beta_k$. Если $H_1 y > h_1$,то полагаем $\alpha_{k+1} = \alpha_k$ и $\beta_{k+1} = y$. Ясно, что α_k – нижняя функция, β_k – верхняя функция, $\alpha = \alpha_1 \le \alpha_2 \le ... \le \beta_2 \le \beta_1 = \beta$ и $H_1\alpha_k \le h_1 \le H_1\beta_k$. Из $H_2\beta \ge H_2\alpha$ и условий монотонности для H_2 получаем неравенства $H_2\alpha \ge H_2\alpha_k \ge H_2\beta_k \ge H_2\beta \ge H_2\alpha$. Следовательно, $H_2\alpha_k = h_2 = H_2\beta_k$. Пределы $\alpha_k \to \alpha_0$ и $\beta_k \to \beta_0$ удовлетворяют условиям $\alpha \le \alpha_0 \le \beta_0 \le \beta$, $\alpha_0(a) = \beta_0(a)$, $\alpha_0(b) = \beta_0(b)$, $H_1\alpha_0 \le h_1 \le H_1\beta_0$, $H_2\alpha_0 = h_2 = H_2\beta_0$, $\alpha_0 \in S(I, R)$ или $\beta_0 \in S(I, R)$. На основании условий монотонности для H_1 имеем $H_1\alpha_0 \ge H_1\beta_0$. Следовательно, $H_1\alpha_0 = h_1 = H_1\beta_0$. Таким образом, α_0 или β_0 является решением краевой задачи (2)-(5).

Теорема Tb02. $1{-}{-}0.{-}10{+}.{-}{-}$. Для любых $H_1 \in M(1, -, -, 0)$, $H_2 \in M(-, 1, 0, +)$, $h_1 \in [H_1\alpha, H_1\beta]$ и $h_2 \in [H_2\alpha, H_2\beta]$ из $H_1\alpha \le H_1\beta$, $H_2\alpha \le H_2\beta$ и условия E следует существование решения краевой задачи (2)-(5).

Доказательство. Предварительно докажем, что для любого $B \in [\alpha(b), \beta(b)]$ существует решение краевой задачи

$$(\varphi(z'))' = f(t, z, z'), \quad H_1 z = h_1, \quad z(b) = B, \quad \alpha \leq z \leq \beta. \tag{9}$$

Пусть α_* и β_* – решения задач Дирихле

$$(\varphi(\alpha_*'))' = f(t, \alpha_*, \alpha_*'), \quad \alpha_*(a) = \alpha(a), \quad \alpha_*(b) = B, \quad \alpha \leq \alpha_* \leq \beta,$$

$$(\varphi(\beta_*'))' = f(t, \beta_*, \beta_*'), \quad \beta_*(a) = \beta(a), \quad \beta_*(b) = B, \quad \alpha_* \leq \beta_* \leq \beta.$$

Тогда $\alpha \leq \alpha_* \leq \beta_* \leq \beta$ и из условий монотонности для H_1 получаем неравенства $H_1\alpha_* \leq H_1\alpha \leq h_1 \leq H_1\beta \leq H_1\beta_*$. Из теоремы Tb01 следует существование решения z краевой задачи

$$(\varphi(z'))' = f(t, z, z'), \quad H_1 z = h_1, \quad \alpha_* \leq z \leq \beta_*.$$

Ясно, что $z(b) = B$ и $\alpha \leq z \leq \beta$. Следовательно, z является решением краевой задачи (9).

Определим последовательности α_k, β_k, $k = 1, 2, ...$ по индукции. Пусть $\alpha_1 = \alpha$ и $\beta_1 = \beta$. Из предыдущего следует существование решения y краевой задачи

$$(\varphi(y'))' = f(t, y, y'), \quad H_1 y = h_1, \quad y(b) = (\alpha_k(b) + \beta_k(b))/2, \quad \alpha_k \leq y \leq \beta_k.$$

Если $H_2 y \leq h_2$, то полагаем $\alpha_{k+1} = y$ и $\beta_{k+1} = \beta_k$. Если $H_2 y > h_2$, то полагаем $\alpha_{k+1} = \alpha_k$ и $\beta_{k+1} = y$. Ясно, что α_k – нижняя функция, β_k – верхняя функция, $\alpha = \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq ... \leq \beta_2 \leq \beta_1 = \beta$ и $H_2\alpha_k \leq h_2 \leq H_2\beta_k$. Пределы $\alpha_k \to \alpha_0$ и $\beta_k \to \beta_0$ удовлетворяют условиям $\alpha \leq \alpha_0 \leq \beta_0 \leq \beta$, $\alpha_0(b) = \beta_0(b)$, $H_2\alpha_0 \leq h_2 \leq H_2\beta_0$, $\alpha_0 \in S(I, R) \wedge H_1\alpha_0 = h_1$ или $\beta_0 \in S(I, R) \wedge H_1\beta_0 = h_1$. На основании условий монотонности для H_2 имеем $H_2\alpha_0 \geq H_2\beta_0$. Следовательно, $H_2\alpha_0 = h_2 = H_2\beta_0$. Таким образом, α_0 или β_0 является решением краевой задачи (2)-(5).

Теорема Tb03. 11− +.1−− 0.1.+ −. Для любых $H_1 \in M(1, 1, -, +)$, $H_2 \in M(1, -, -, 0)$, $h_1 \in [H_1\alpha, H_1\beta]$ и $h_2 \in [H_2\alpha, H_2\beta]$ из $H_1\alpha \leq H_1\beta$, $H_2\alpha \leq H_2\beta$, условий 1 и E следует существование решения краевой задачи (2)-(5), удовлетворяющего условию (7).

Доказательство. Из теоремы Tb01 следует существование решения x краевой задачи

$$(\varphi(x'))' = f(t, x, x'), \quad H_1 x = h_1, \quad \alpha \leq x \leq \beta.$$

Ясно, что $\alpha'(a) \leq x'(a) \leq \beta'(a)$, а из условий монотонности для H_2 получаем неравенства $H_2\alpha \geq H_2 x \geq H_2\beta$. Следовательно, $H_2 x = h_2$. Таким образом, x является решением краевой задачи (2)-(5) и удовлетворяет условию (7).

Теорема Tb04. −1− +.−−−0.2.+ −. Для любых $H_1 \in M(-, 1, -, +)$, $H_2 \in M(-, -, -, 0)$, $h_1 \in [H_1\alpha, H_1\beta]$ и $h_2 \in [H_2\alpha, H_2\beta]$ из $H_1\alpha \leq H_1\beta$, $H_2\alpha \leq H_2\beta$, условий 2 и E следует существование решения краевой задачи (2)-(5), удовлетворяющего условию (7).

Доказательство. Определим последовательности α_k, β_k, $k = 1, 2, ...$ по индукции. Пусть $\alpha_1 = \alpha$ и $\beta_1 = \beta$. Из теоремы Tb02 C∃∀. 1++0.-10+.C следует существование решения y краевой задачи

$$(\varphi(y'))' = f(t, y, y'), \quad \alpha_k'(a) \leq y'(a) \leq \beta_k'(a),$$

$$y(b) = (\alpha_k(b) + \beta_k(b))/2, \quad \alpha_k \le y \le \beta_k.$$

Если $H_1 y \le h_1$, то полагаем $\alpha_{k+1} = y$ и $\beta_{k+1} = \beta_k$. Если $H_1 y > h_1$, то полагаем $\alpha_{k+1} = \alpha_k$ и $\beta_{k+1} = y$. Ясно, что α_k – нижняя функция, β_k – верхняя функция, $\alpha = \alpha_1 \le \alpha_2 \le ... \le \beta_2 \le \beta_1 = \beta$, $\alpha'(a) = \alpha'_1(a) \le \alpha'_2(a) \le ... \le \beta'_2(a) \le \beta'_1(a) = \beta'(a)$ и $H_1\alpha_k \le h_1 \le H_1\beta_k$. Из $H_2\beta \ge H_2\alpha$ и условий монотонности для H_2 получаем неравенства $H_2\alpha \ge H_2\alpha_k \ge H_2\beta_k \ge H_2\beta \ge H_2\alpha$. Следовательно, $H_2\alpha_k = h_2 = H_2\beta_k$. Пределы $\alpha_k \to \alpha_0$ и $\beta_k \to \beta_0$ удовлетворяют условиям $\alpha \le \alpha_0 \le \beta_0 \le \beta$, $\alpha'(a) \le \alpha'_0(a) \le \beta'_0(a) \le \beta'(a)$, $\alpha_0(b) = \beta_0(b)$, $H_1\alpha_0 \le h_1 \le H_1\beta_0$, $H_2\alpha_0 = h_2 = H_2\beta_0$, $\alpha_0 \in S(I, R)$ или $\beta_0 \in S(I, R)$. На основании условий монотонности для H_1 имеем $H_1\alpha_0 \ge H_1\beta_0$. Следовательно, $H_1\alpha_0 = h_1 = H_1\beta_0$. Таким образом, α_0 или β_0 является решением краевой задачи (2)-(5) и удовлетворяет условию (7).

Теорема Tb05. –11+.––10.3.+ –. Для любых $H_1 \in M(-, 1, 1, +)$, $H_2 \in M(-, -, 1, 0)$, $h_1 \in [H_1\alpha, H_1\beta]$ и $h_2 \in [H_2\alpha, H_2\beta]$ из $H_1\alpha \le H_1\beta$, $H_2\alpha \le H_2\beta$, условий 3 и E следует существование решения краевой задачи (2)-(5), удовлетворяющего условию (7).

Доказательство. Определим последовательности α_k, β_k, $k = 1, 2, ...$ по индукции. Пусть $\alpha_1 = \alpha$ и $\beta_1 = \beta$. Из теоремы Tb02 следует существование решения y краевой задачи

$$(\varphi(y'))' = f(t, y, y'), \quad -y'(a) = -\alpha'(a), \quad y(b) = (\alpha_k(b) + \beta_k(b))/2, \quad \alpha_k \le y \le \beta_k.$$

Если $H_1 y \le h_1$, то полагаем $\alpha_{k+1} = y$ и $\beta_{k+1} = \beta_k$. Если $H_1 y > h_1$, то полагаем $\alpha_{k+1} = \alpha_k$ и $\beta_{k+1} = y$. Ясно, что α_k – нижняя функция, β_k – верхняя функция, $\alpha = \alpha_1 \le \alpha_2 \le ... \le \beta_2 \le \beta_1 = \beta$, $\alpha'_k(a) = \beta'_k(a) = \alpha'(a)$ и $H_1\alpha_k \le h_1 \le H_1\beta_k$. Из $H_2\beta \ge H_2\alpha$ и условий монотонности для H_2 получаем неравенства $H_2\alpha \ge H_2\alpha_k \ge H_2\beta_k \ge H_2\beta \ge H_2\alpha$. Следовательно, $H_2\alpha_k = h_2 = H_2\beta_k$. Пределы $\alpha_k \to \alpha_0$ и $\beta_k \to \beta_0$ удовлетворяют условиям $\alpha \le \alpha_0 \le \beta_0 \le \beta$, $\alpha'_0(a) = \beta'_0(a) = \alpha'(a)$, $\alpha_0(b) = \beta_0(b)$, $H_1\alpha_0 \le h_1 \le H_1\beta_0$, $H_2\alpha_0 = h_2 = H_2\beta_0$, $\alpha_0 \in S(I, R)$ или $\beta_0 \in S(I, R)$. На основании условий монотонности для H_1 имеем $H_1\alpha_0 \ge H_1\beta_0$. Следовательно, $H_1\alpha_0 = h_1 = H_1\beta_0$. Таким образом, α_0 или β_0 является решением краевой задачи (2)-(5) и удовлетворяет условию (7).

Теорема Tb06. –11+.–– +0.4.+ –. Для любых $H_1 \in M(-, 1, 1, +)$, $H_2 \in M(-, -, +, 0)$, $h_1 \in [H_1\alpha, H_1\beta]$ и $h_2 \in [H_2\alpha, H_2\beta]$ из $H_1\alpha \le H_1\beta$, $H_2\alpha \le H_2\beta$, условий 4 и E следует существование решения краевой задачи (2)-(5), удовлетворяющего условию (7).

Доказательство. Определим последовательности α_k, β_k, $k = 1, 2, ...$ по индукции. Пусть $\alpha_1 = \alpha$ и $\beta_1 = \beta$. Из теоремы Tb02 следует существование решения y краевой задачи

$$(\varphi(y'))' = f(t, y, y'),$$
$$-y'(a) = -(\alpha'_k(a) + \beta'_k(a))/2, \quad y(b) = (\alpha_k(b) + \beta_k(b))/2, \quad \alpha_k \le y \le \beta_k.$$

Если $H_1 y \le h_1$, то полагаем $\alpha_{k+1} = y$ и $\beta_{k+1} = \beta_k$. Если $H_1 y > h_1$, то полагаем $\alpha_{k+1} = \alpha_k$ и $\beta_{k+1} = y$. Ясно, что α_k – нижняя функция, β_k – верхняя функция, $\alpha = \alpha_1 \le \alpha_2 \le ... \le \beta_2 \le \beta_1 = \beta$, $\beta'(a) = \beta'_1(a) \le \beta'_2(a) \le ... \le \alpha'_2(a) \le \alpha'_1(a) = \alpha'(a)$ и $H_1\alpha_k \le h_1 \le H_1\beta_k$. Из $H_2\beta \ge H_2\alpha$ и условий монотонности для H_2 получаем неравенства $H_2\alpha \ge H_2\alpha_k \ge H_2\beta_k \ge H_2\beta \ge H_2\alpha$. Следовательно, $H_2\alpha_k = h_2 = H_2\beta_k$. Пределы $\alpha_k \to \alpha_0$ и $\beta_k \to \beta_0$ удовлетворяют условиям $\alpha \le \alpha_0 \le \beta_0 \le \beta$,

$\beta'(a) \le \beta_0'(a) = \alpha_0'(a) \le \alpha'(a)$, $\alpha_0(b) = \beta_0(b)$, $H_1\alpha_0 \le h_1 \le H_1\beta_0$, $H_2\alpha_0 = h_2 = H_2\beta_0$, $\alpha_0 \in S(I,R)$ или $\beta_0 \in S(I,R)$. На основании условий монотонности для H_1 имеем $H_1\alpha_0 \ge H_1\beta_0$. Следовательно, $H_1\alpha_0 = h_1 = H_1\beta_0$. Таким образом, α_0 или β_0 является решением краевой задачи (2)-(5) и удовлетворяет условию (7).

Теорема Tb07. –1++.––10.4.+ –. Для любых $H_1 \in M(-,1,+,+)$, $H_2 \in M(-,-,1,0)$, $h_1 \in [H_1\alpha, H_1\beta]$ и $h_2 \in [H_2\alpha, H_2\beta]$ из $H_1\alpha \le H_1\beta$, $H_2\alpha \le H_2\beta$, условий 4 и E следует существование решения краевой задачи (2)-(5), удовлетворяющего условию (7).

Доказательство. Предварительно докажем, что для любого $A' \in [\beta'(a), \alpha'(a)]$ существует решение краевой задачи

$$(\varphi(z'))' = f(t,z,z'), \quad H_1 z = h_1, \quad -z'(a) = -A', \quad \alpha \le z \le \beta. \tag{10}$$

Пусть α_* и β_* – решения краевых задач

$$(\varphi(\alpha_*'))' = f(t,\alpha_*,\alpha_*'), \quad -\alpha_*'(a) = -A', \quad \alpha_*(b) = \alpha(b), \quad \alpha \le \alpha_* \le \beta,$$

$$(\varphi(\beta_*'))' = f(t,\beta_*,\beta_*'), \quad -\beta_*'(a) = -A', \quad \beta_*(b) = \beta(b), \quad \alpha_* \le \beta_* \le \beta,$$

существование которых следует из теоремы Tb02. Тогда $\alpha \le \alpha_* \le \beta_* \le \beta$ и из условий монотонности для H_1 получаем неравенства $H_1\alpha_* \le H_1\alpha \le h_1 \le H_1\beta \le H_1\beta_*$. Из теоремы Tb05 следует существование решения z краевой задачи

$$(\varphi(z'))' = f(t,z,z'), \quad H_1 z = h_1, \quad -z'(a) = -A', \quad \alpha_* \le z \le \beta_*.$$

Ясно, что $\alpha \le z \le \beta$. Следовательно, z является решением краевой задачи (10).

Определим последовательности α_k, β_k, $k = 1,2,...$ по индукции. Пусть $\alpha_1 = \alpha$ и $\beta_1 = \beta$. Из предыдущего следует существование решения y краевой задачи

$$(\varphi(y'))' = f(t,y,y'),$$

$$H_1 y = h_1, \quad -y'(a) = -(\alpha_k'(a) + \beta_k'(a))/2, \quad \alpha_k \le y \le \beta_k.$$

Если $H_2 y \le h_2$, то полагаем $\alpha_{k+1} = y$ и $\beta_{k+1} = \beta_k$. Если $H_2 y > h_2$, то полагаем $\alpha_{k+1} = \alpha_k$ и $\beta_{k+1} = y$. Ясно, что α_k – нижняя функция, β_k – верхняя функция, $\alpha = \alpha_1 \le \alpha_2 \le ... \le \beta_2 \le \beta_1 = \beta$, $\beta'(a) = \beta_1'(a) \le \beta_2'(a) \le ... \le \alpha_2'(a) \le \alpha_1'(a) = \alpha'(a)$ и $H_2\alpha_k \le h_2 \le H_2\beta_k$. Пределы $\alpha_k \to \alpha_0$ и $\beta_k \to \beta_0$ удовлетворяют условиям $\alpha \le \alpha_0 \le \beta_0 \le \beta$, $\beta'(a) \le \beta_0'(a) = \alpha_0'(a) \le \alpha'(a)$, $H_2\alpha_0 \le h_2 \le H_2\beta_0$, $\alpha_0 \in S(I,R) \wedge H_1\alpha_0 = h_1$ или $\beta_0 \in S(I,R) \wedge H_1\beta_0 = h_1$. На основании условий монотонности для H_2 имеем $H_2\alpha_0 \ge H_2\beta_0$. Следовательно, $H_2\alpha_0 = h_2 = H_2\beta_0$. Таким образом, α_0 или β_0 является решением краевой задачи (2)-(5) и удовлетворяет условию (7).

Теорема Tb08. 111+.1–10.13.+ –. Для любых $H_1 \in M(1,1,1,+)$, $H_2 \in M(1,-,1,0)$, $h_1 \in [H_1\alpha, H_1\beta]$ и $h_2 \in [H_2\alpha, H_2\beta]$ из $H_1\alpha \le H_1\beta$, $H_2\alpha \le H_2\beta$, условий 1, 3 и E следует существование решения краевой задачи (2)-(5), удовлетворяющего условию (7).

Доказательство. По теореме Tb03 существует решение x краевой задачи

$$(\varphi(x'))' = f(t,x,x'), \quad H_1(x(a), x(b), \alpha'(a), x'(b)) = h_1,$$

$$H_2(x(a), x(b), \alpha'(a), x'(b)) = h_2, \quad \alpha \le x \le \beta.$$

Ясно, что $\alpha'(a) = x'(a) = \beta'(a)$, $H_1x = h_1$ и $H_2x = h_2$. Таким образом, x является решением краевой задачи (2)-(5)и удовлетворяет условию (7).

Теорема Tb09. 11− +.11− +.15.++. Для любых $H_1, H_2 \in M(1,1,-,+)$, $h_1 \in [H_1\alpha, H_1\beta]$ и $h_2 \in [H_2\alpha, H_2\beta]$ из условий 1, 5 и E следует существование решения краевой задачи (2)-(5), удовлетворяющего условию (7)-(8).

Доказательство. Пусть x – решение краевой задачи

$$(\varphi(x'))' = f(t, x, x'), \quad x(a) = \alpha(a), \quad x(b) = \alpha(b), \quad \alpha \leq x \leq \beta,$$

которое существует по теореме Tb02. Ясно, что $\alpha'(a) \leq x'(a) \leq \beta'(a)$ и $\beta'(b) \leq x'(b) \leq \alpha'(b)$. На основании условий монотонности для H_1 и H_2 имеем $H_1\alpha \geq H_1x \geq H_1\beta$ и $H_2\alpha \geq H_2x \geq H_2\beta$. Следовательно, $H_1x = h_1$ и $H_2x = h_2$. Таким образом, x является решением краевой задачи (2)-(5) и удовлетворяет условиям (7)-(8).

Существование максимального решения

Теорема 1. Для теорем Tb02-Tb03, Tb08-Tb09, Tb12, Tb20, Tb23-Tb24, Tb26-Tb27, Tb34-Tb36, Tb42, Tb49, Tb81 и Tb84 существуют максимальное и минимальное решения.

Доказательство. Проведем доказательство для теоремы Tb02. Пусть S – множество решений краевой задачи (2)-(5), $x, y \in S$ и $s = \max\{x, y\}$. Тогда для данного выше определения нижней функции s – нижняя функция. Покажем, что $H_1s \leq h_1$ и $H_2s \leq h_2$. Пусть $x(a) > y(a)$ и $x(b) < y(b)$. Тогда $h_1 = H_1x \geq H_1(x(a), y(b), x'(a), x'(b)) = H_1s$, $h_2 = H_2y \geq H_2(x(a), y(b), y'(a), y'(b)) = H_2s$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Следовательно, существует решение $z \in S$, удовлетворяющее неравенству $z \geq s$. Если S состоит из конечного числа решений, то существование максимального решения очевидно. Пусть множество S бесконечно, r_i, $i = 1, 2, ...$ – рациональные точки интервала I и $x_i \in S$, $i = 1, 2, ...$ такие, что $x_i(r_i) = \max\{x(r_i) : x \in S\}$. Определим последовательность z_i, $i = 1, 2, ...$ следующим образом: $z_1 = x_1$ и $z_i \in S$, $i = 2, 3, ...$ удовлетворяют неравенствам $z_i \geq \max\{z_{i-1}, x_i\}$. Ясно, что $\lim_{i\to\infty} z_i = z \in S$ и $z = \max\{x : x \in S\}$. Существование минимального решения доказывается аналогично. Доказательство существования максимального решения для остальных теорем аналогично.

Замечание 1. Для остальных теорем можно построить примеры, которые доказывают отсутствие максимального решения. Так, для теоремы Tb01 пример $a = -1$, $b = 1$, $x'' = 0$, $\alpha = -\beta = -1$,

$$H_1x = (\mid x(b) - \alpha(b) \mid + x(b) - \alpha(b))(\mid x'(a) - 1 \mid - x'(a) + 1) = 0$$

и $H_2 = 0$ показывает отсутствие максимального решения. Этот же пример годится для теорем Tb05, Tb25, Tb31 и Tb37.

Замечание 2. Простейшие примеры показывают, что для теорем Tb12, Tb23, Tb42 и Tb49 для максимального решения условие (8) не обязано выполняться.

Список литературы

[1] C. De Coster, On pairs of positive solutions for the one-dimensional p-Laplasian, preprint, 1992.

[2] C. De Coster, Pairs of positive solutions for the one-dimensional p-Laplasian, Nonlinear Anal. TMA 23 (5), 1994, 669-681.

[3] M. Cherpion, C. De Coster, P. Habets, Monotone iterative methods for boundary value problems, Diferential Integral Equation, 12 (3), 1999, 309.

[4] A. Cabada, R.L. Pouso, Extremal solutions of strongly nonlinear discontinuons second-order equation with nonlinear functional boundary conditions, Nonlinear Analysis 42, 2000, 1377-1396.

[5] K.W. Schader, Existence theorems for second-order boundary value problems, J.Different.Equations, 5 (3), 1969, 572-584.

[6] А.Я. Лепин, Л.А. Лепин, Краевые задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, Рига, Зинатне, 1988.

A. Lepin and L. Lepin. Two-point boundary value problems with monotone boundary conditions.

Summary. Existence results are obtained for several the second order boundary value problems, where equation is in the Φ-Laplacian form.

1991 MSC 34B15

A. Lepins, L. Lepins. Divpunktu robežproblēmas ar monotoniem robežnosacījumiem.

Anotācija. Otrās kārtas diferenciālvienādojumam Φ-Laplasian formā tiek pierādīti atrisinājumu eksistences rezultāti dažādām robežproblēmām.

Institute of Mathematics
and Computer Science,
University of Latvia
Riga, Rainis blvd 29

Received 08.12.2003