Краевые задачи с максимальным решением

Л.А.Лепин

Аннотация. Для дифференциального уравнения второго порядка найдены двухточечные краевые задачи с максимальным решением при условиях 1-B.

УДК 517.927

Рассмотрим краевую задачу

$$x'' = f(t, x, x'), \tag{1}$$

$$H_1(x(a), x(b), x'(a), x'(b)) = h_1, \quad H_2(x(a), x(b), x'(a), x'(b)) = h_2, \tag{2}$$

$$\alpha \le x \le \beta, \quad U, \tag{3}$$

где $f \in Car([a,b] \times R^2, R)$, $H_1, H_2 \in C(R^4, R)$, α – нижняя функция, β – верхняя функция, U – подмножество множества условий: 1. $\alpha(a) = \beta(a)$, 2. $\alpha'(a) < \beta'(a)$, 3. $\alpha'(a) = \beta'(a)$, 4. $\alpha'(a) > \beta'(a)$, 5. $\alpha(b) = \beta(b)$, 6. $\alpha'(b) < \beta'(b)$, 7. $\alpha'(b) = \beta'(b)$, 8. $\alpha'(b) > \beta'(b)$, 9. $(\forall x, y \in S([a,b], R))(x \le y \wedge x'(a) \le y'(a) \Rightarrow x'(b) \le y'(b)) \wedge (x \le y \wedge x'(b) \ge y'(b) \Rightarrow x'(a) \ge y'(a)))$, A. $\alpha \in S([a,b], R)$, B. $\beta \in S([a,b], R)$, $S([a,b], R)$ – множество решений x уравнения (1), удовлетворяющих неравенствам $\alpha \le x \le \beta$. В работе [1] найдены теоремы существования обобщенного решения краевой задачи (1)-(3), если H_1 и H_2 принадлежат классам монотонности. А в работе [2] для условий 1-8 найдены теоремы существования максимального обобщенного решения краевой задачи (1)-(3) в терминах классов монотонности. В работах [3]-[4] показано, что других теорем такого типа нет. Наша цель – найти теоремы существования максимального решения краевой задачи (1)-(3) для условий 1-B. При этом будем пользоваться теоремами и обозначениями работы [1].

Оказалось, что в соответствующей постановке имеется всего 235 теорем. Из них следуют все остальные. Использовав симметрию, из 235 теорем удалось получить 85 порождающих теорем. Чтобы показать, что ни одна теорема не пропущена, нужно построить соответствующие порождающие примеры. Такие примеры будут построены в другой работе.

Короткая запись теорем

Определение 1. Функция $H \in C(R^4, R)$ имеет тип монотонности $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$, где $\sigma_i \in \{0, -, +, 1\}$, $i = 1, 2, 3, 4$, если при $\sigma_i = 0$ функция H не зависит от i-го аргумента, при $\sigma_i = -$ функция H не возрастает по i-му аргументу, при $\sigma_i = +$ функция H не убывает по i-му аргументу, а при $\sigma_i = 1$ на i-й аргумент функции H условия не накладываются. Класс монотонности $M(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ состоит из функций, имеющих тип монотонности $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$.

Далее будем предполагать, что задача Дирихле

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(a) = A, \quad x(b) = B, \quad \alpha_1 \le x \le \beta_1$$

имеет решение при любых нижней функции α_1, верхней функции β_1, $\alpha \le \alpha_1 \le \beta_1 \le \beta$, $A \in [\alpha_1(a), \beta_1(a)]$, $B \in [\alpha_1(b), \beta_1(b)]$ и множество этих решений компактно. При этом предположении решения теорем, которые будут рассматриваться, существуют. Теорему

Tn. *Для любых $H_1 \in M(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$, $H_2 \in M(\sigma_5, \sigma_6, \sigma_7, \sigma_8)$, $h_1 \in [H_1\alpha, H_1\beta]$ и $h_2 \in [H_2\alpha, H_2\beta]$ из $H_1\alpha \le H_1\beta$, $H_2\alpha \le H_2\beta$ и условий U следует существование решения краевой задачи (1) - (3).*

коротко будем записывать так

$$Tn.\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4.\sigma_5\sigma_6\sigma_7\sigma_8.u_1u_2u_3u_4u_5u_6u_7u_8u_9u_Au_Bu_Cu_D, \tag{4}$$

где n – номер теоремы, $u_i = i$, если i-е условие входит в U, и u_i пусто в противном случае. Симметрии, которые использовались для получения порождающих теорем, следующие. Если поменять H_1 и H_2 местами, то теорема (4) переходит в теорему

$$TnH.\sigma_5\sigma_6\sigma_7\sigma_8.\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4.u_1u_2u_3u_4u_5u_6u_7u_8u_9u_Au_Bu_Cu_D.$$

Замена в уравнении (1) независимой переменной t на $-t$ переводит теорему (4) в теорему

$$Tnt.\sigma_2\sigma_1\sigma_4'\sigma_3'.\sigma_6\sigma_5\sigma_8'\sigma_7'.u_5u_8u_7u_6u_1u_4u_3u_2u_9u_Au_Bu_Cu_D,$$

где $1' = 1$, $+' = -$, $-' = +$, $0' = 0$. Теперь приведем список порождающих теорем

TMg01. 1−− 0. −10+
TMg02. 11− +.1 −− 0.1
TMg03. −−−0.−−−0.2
TMg04. −10+.−0+0.3
TMg05. −−−0.−−−0.3
TMg06. −−−0.−0+0.3
TMg07. −0+0.−0+0.3
TMg08. −10+.−0+0.4
TMg09. −−−0.−0+0.4
TMg10. −0+0.−0+0.4
TMg11. 111+.1−10.13
TMg12. 1111.1111.14
TMg13. 11− +.11− +.15
TMg14. 1−− +.1−0−.16

TMg15. 1–0–.1–0–.16
TMg16. 1−− +.1−−+.17
TMg17. 1−− +.1–0–.17
TMg18. 1–0–.1–0–.17
TMg19. 1−− +.1−− +.18
TMg20. 1111.1111.23
TMg21. 1111.1111.24
TMg22. 1111.1111.34
TMg23. –0+0.0–0–.36
TMg24. –0+0.0–0–.37
TMg25. –0+0.0–0–.46
TMg26. 111+.111+.135
TMg27. 1–1+.1–1–.136
TMg28. 1–1–.1–1–.136
TMg29. 1–1+.1–1+.137
TMg30. 1–1+.1–1–.137
TMg31. 1–1–.1–1–.137
TMg32. 1–1+.1–1+.138
TMg33. 1111.1111.1357
TMg34. − +++.−−−0.39
TMg35. − +++.–0+0.39
TMg36. − +++.−−−0.49
TMg37. − +++.–0+0.49
TMg38. 1−–1.1−−−.169
TMg39. 1−–1.1−–1.179
TMg40. −−−0.0−−−.269
TMg41. 0−−−.0−−−.269
TMg42. −−−0.0−−−.279
TMg43. 0−−−.0−−−.279
TMg44. −−−0.0−−−.369
TMg45. –0++.0−−−.369
TMg46. 0−−−.0−−−.369
TMg47. −−−0.0−−−.379
TMg48. –0++.–0++.379
TMg49. –0++.0−−−.379
TMg50. –0++.0−−−.469
TMg51. 1–11.1–1–.1369
TMg52. 1–11.1–11.1379
TMg53. −–10.−–10.3B
TMg54. −− + 0.−− + 0.4B
TMg55. −− + 0.−−− 0.4B
TMg56. 1−− +.1−−−.16B
TMg57. 1−−−.1−−−.16B
TMg58. 1−–1.1−–1.17B
TMg59. −−−−.−−−−.26B
TMg60. −−−−.−–0+.26B

TMg61. −−−1.−−−1.27B
TMg62. −−−+.−−−+.28B
TMg63. −−1–.−−1–.36B
TMg64. −−−−.−–0+.36B
TMg65. −−11.−−11.37B
TMg66. −− + −.−− + −.46B
TMg67. 1–11.1–11.137B
TMg68. –1++.−−−0.39B
TMg69. –1++.–0+0.39B
TMg70. –1++.−−−0.49B
TMg71. –1++.–0+0.49B
TMg72. −− + +.−−−−.369B
TMg73. −− + +.−−−−.469B
TMg74. 1−−−.–1++.9AB
TMg75. 1111.1−−−.19AB
TMg76. 1−−−.0−−−.29AB
TMg77. −−−−.−−−−.29AB
TMg78. 1−−−.0−−−.39AB
TMg79. −−1–.−−1–.39AB
TMg80. 1111.1–1–.139AB
TMg81. 1111.1111.159AB
TMg82. 1111.1–11.179AB
TMg83. 1111.1111.189AB
TMg84. 1111.1111.279AB
TMg85. 1111.1111.289AB

Существование максимального решения

Теорема 1. Для теорем TMg01–TMg85 существует максимальное решение.

Доказательство. Теоремы TMg12, TMg20 - TMg22 и TMg83 - TMg85 технические. Их условия противоречивы. Теоремы TMg01–TMg11, TMg13–TMg19 и TMg23–TMg33 доказаны в работе [2]. Осталось доказать теоремы TMg34–TMg82. Заметим, что для теорем TMg53 – TMg54, TMg57 – TMg59, TMg61 – TMg63, TMg65 – TMg67, TMg77, TMg79 и TMg81 функция β является максимальным решением. Множество решений краевой задачи (1)-(3) обозначим через SH. Для доказательства существования максимального решения краевой задачи (1)-(3) достаточно показать, что для любых $x, y \in SH$ существует $z \in SH$ такое, что $z \geq s = \max\{x, y\}$. Действительно, если SH состоит из конечного числа решений, то существование максимального решения очевидно. Пусть SH состоит из бесконечного числа решений. Обозначим через r_i, $i = 1, 2, ...$ рациональные точки интервала $[a, b]$ и через $x_i \in SH$ такие решения, что $x_i(r_i) = \max\{x(r_i) : x \in SH\}$. Определим последовательность z_i, $i = 1, 2, ...$ следующим образом: $z_1 = x_1$ и $z_i \in SH$, $i = 2, 3, ...$ такие, что $z_i \geq \max\{z_{i-1}, x_i\}$. Ясно, что $\lim_{i\to\infty} z_i = z \in SH$ и z -– максимальное решение краевой задачи (1)-(3). Без ограничения общности будем считать, что $x(a) \geq y(a)$ и $x'(a) \geq y'(a)$ при $x(a) = y(a)$. Обозначим через u решение задачи Дирихле

$$u'' = f(t, u, u'), \quad u(a) = x(a), \quad u(b) = \max\{x(b), y(b)\}, \quad s \leq u \leq \beta.$$

Рассмотрим случай, когда выполняется условие 9. Если $x(a) > y(a)$ и $x(b) > y(b)$ или $x(a) = y(a)$ или $x(b) = y(b)$, то $u \in SH$ и его можно взять в качестве z. Следовательно, теоремы TMg38–TMg39, TMg51–TMg52, TMg75, TMg80, TMg82 доказаны, и можно рассматривать только случай $x(a) > y(a)$ и $x(b) < y(b)$. Заметим, что из условия 9 следует $x'(a) \leq u'(a) \leq y'(a)$ и $x'(b) \leq u'(b) \leq y'(b)$. Рассмотрим теорему

TMg35. –+++.–0+0.39. Из $H_1u \geq H_1x = h_1$, $H_1u \leq H_1y = h_1$, $H_2u \geq H_2x = h_2$ и $H_2u \leq H_2y = h_2$ следует $H_1u = h_1$ и $H_2u = h_2$. Следовательно, $u \in SH$ и теорема TMg35 доказана. Аналогично доказываются теоремы TMg37, TMg41, TMg43, TMg45–TMg46 и TMg48–TMg50. Рассмотрим теоремы

TMg34. – +++.–––0.39, TMg36. – +++.––– 0.49. Из $H_1u \geq H_1x = h_1$, $H_1u \leq H_1y = h_1$ и $H_2u \leq H_2x = h_2$ следует $H_1u = h_1$ и $H_2u \leq h_2$. Если $u'(a) > \beta'(a)$, то существование z следует из теоремы

Tb07. –1++.––10.4. Если $x'(a) \leq \beta'(a)$, то из $h_2 \leq H_2\beta \leq H_2u$ следует $H_2u = h_2$. Следовательно, $u \in SH$.

Рассмотрим теоремы TMg40. –––0.0–––.269, TMg42. –––0.0–––.279, TMg44. –––0.0–––.369, TMg47. –––0.0–––.379. Из $H_1u \leq H_1x = h_1$, $H_2u \leq H_2x = h_2$ и $H_2u \geq H_2y = h_2$ следует $H_1u \leq h_1$ и $H_2u = h_2$. Если $u'(a) > \beta'(a)$, то существование z следует из $H_2\beta = h_2$ и теоремы

Tb07HD. ––10.+1––.4D. Если $u'(a) \leq \beta'(a)$, то из $h_1 \leq H_1\beta \leq H_1u$ следует $H_1u = h_1$. Следовательно, $u \in SH$. Рассмотрим теорему

TMg55. ––+0.–––0.4B. Заметим, что $H_1\beta = h_1$. Если $H_2\beta = h_2$, то β – максимальное решение. Пусть $H_2\beta > h_2$. Тогда $x'(a) > \beta'(a)$, $y'(a) > \beta'(a)$, $H_1s \leq h_1$ и $H_2s \leq h_2$. Из теоремы

Tb07. –1++.––10.4 следует существование z. Рассмотрим теорему

TMg56. 1––+.1–––.16B. Заметим, что $H_2\beta = h_2$. Если $H_1\beta = h_1$, то β – максимальное решение. Пусть $H_1\beta > h_1$. Тогда $x'(b) < \beta'(b)$, $y'(b) < \beta'(b)$, $H_1s \leq h_1$ и $H_2s \leq h_2$. Из теоремы

Tb10. 1––1.1–––.16 следует существование z. Рассмотрим теоремы

TMg60. ––––.––0+.26B, TMg64. ––––.––0+.36B. Заметим, что $H_1\beta = h_1$. Если $H_2\beta = h_2$, то β – максимальное решение. Пусть $H_2\beta > h_2$. Тогда $x'(b) < \beta'(b)$ и $y'(b) < \beta'(b)$. Если $x(b) > y(b)$ или $x'(b) \leq y'(b)$, то $H_1s \leq h_1$, $H_2s \leq h_2$ и существование z следует из теоремы

Tb07t. 1–––.––01.6. Если $x(b) \leq y(b)$ и $x'(b) > y'(b)$, то обозначим через v решение краевой задачи

$$v'' = f(t, v, v'), \quad v(a) = x(a), \quad v'(b) = x'(b), \quad s \leq v \leq \beta,$$

которое существует по теореме

Tb02. 1––0.–10+. Тогда $H_1v \leq H_1x = h_1$, $H_2v \leq H_2x = h_2$ и z существует по теореме Tb07t. Рассмотрим теоремы

TMg68. –1++.–––0.39B,

TMg70. –1++.–––0.49B. Из $H_1u \leq H_1y = h_1$, $H_2u \leq H_2x = h_2$ и теоремы

Tb26H. –1++.1–––.9AB следует существование z. Рассмотрим теоремы

TMg69. –1++.–0+0.39B,

TMg71. –1++.–0+0.49B. Из $H_1u \leq H_1y = h_1$, $H_2u \geq H_2x = h_2$, $H_2u \leq H_2y = h_2$ и теоремы

Tb26HD. –1++.1+++.9ABD следует существование z. Рассмотрим теоремы

TMg72. ––++.––––.369B,

TMg73. ––++.––––.469B. Из $H_1u \le H_1y = h_1$, $H_2u \le H_2x = h_2$ и теоремы

Tb26H. –1++.1–––.9AB следует существование z. Рассмотрим теорему

TMg74. 1–––.–1++.9AB. Из $H_1u \le H_1x = h_1$, $H_2u \le H_2y = h_2$ и теоремы

Tb26. 1–––.–1++.9AB следует существование z. Рассмотрим теоремы

TMg76. 1–––.0–––.29AB,

TMg78. 1–––.0–––.39AB. Из $h_2 \ge H_2\alpha \ge H_2\beta \ge h_2$, $H_1u \le H_1x = h_1$, $H_2u \le H_2x = h_2$ и $H_2u \ge H_2y = h_2$ следует $H_2\alpha = H_2\beta$, $H_1u \le h_1$ и $H_2u = h_2$. Существование z следует из теоремы

Tb26D. 1–––.+1––.9ABD.

Список литературы

[1] Лепин А.Я., Лепин Л.А. Краевые задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, Зинатне, Рига (1988).

[2] Лепина Э.И. О максимальных решениях краевых задач для уравнения второго порядка // Актуальные вопросы краевых задач. Теория и приложения, Рига, ЛГУ, 1988, 131-139.

[3] Лепина Э.И. Краевые задачи без максимального решения // Теоретические и численные исследования краевых задач, Рига, ЛГУ, 1989, 91-99.

[4] Лепина Э.И. Краевые задачи без максимального решения II // Математика. Дифференциальные уравнения. Научные труды, т.553, Рига, ЛУ, 1990.

L. Lepin. Boundary value problems with a maximal solution.

Summary. The second order boundary value problems with maximal solutions are found provided that the 1-B conditions are fulfilled.

1991 MSC 34B15

L. Lepins. Robežproblēmas ar maksimālu atrisinājumu.

Anotācija. Otrās kārtas diferenciālvienādojumam tika atrastas robežproblēmas ar maksimālu atrisinājumu pie 1-B nosacījumiem.

Institute of Mathematics
and Computer Science,
University of Latvia
Riga, Rainis blvd 29

Received 15.01.2004