Об одной задаче Дирихле для ОДУ четвертого порядка

Ю.А. Клоков

Аннотация. Указаны достаточные условия существования решения задачи Дирихле

$$x'''' = f(t, x, x', x'', x'''),$$

$$x(0) = x''(0) = x(\tau) = x''(\tau) = 0.$$

УДК 517.927.4

Эта статья является продолжением работ [1]-[4], посвященных нелинейным краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка.

Рассмотрим задачу

$$x'''' = f(t, x, x', x'', x'''), \tag{1}$$

$$x(0) = x''(0) = x(\tau) = x''(\tau) = 0, \tag{2}$$

где

$$f \in C(I \times R^4), \quad I = [0, \tau], \quad I_0 = (0, \tau).$$

Теорема 1. Пусть

$$f \le H(t), \quad x \ge 0, \qquad f \ge -H(t), \quad x \le 0, \tag{3}$$

где $H \in C(I), \quad H(t) \ge 0, \quad \forall t \in I$ и неравенства (3) выполняются $\forall t \in I$ и $\forall (x', x'', x''') \in R^3$. Предположим далее, что для любых $N_0 > 0, \quad N_1 > 0$ существует $B > 0$ такое, что

$$|f(t, x, x', x'', x''')| \le B(1 + |x''|^5 + |x'''|^{\frac{5}{3}}) \tag{4}$$

для $|x| \le N_0, \quad |x'| \le N_1$ и $\quad \forall (x'', x''') \in R^2$.

Тогда решение задачи (1),(2) существует.

Для доказательства Теоремы 1 нам понадобится

Лемма. Пусть $x(t), \ t \in I$, есть решение уравнения (1), для которого выполняется условие (4) и, кроме того, $\int\limits_0^\tau x''^2(t)dt < M$ (для некоторого $M > 0$.)

Тогда существует постоянная $N > 0$ такая, что $|x''(t)| \le N, \quad |x'''(t)| \le N, \quad \forall t \in I$, причем постоянная N зависит только от постоянных N_0, N_1, M, B.

Эта лемма является частным случаем Теоремы 2, доказанной в работе [5].

Заметим, что в условии (4) показатели степеней 5 и $\frac{5}{3}$ являются точными и не могут быть увеличены.

Доказательство теоремы 1. Пусть $x(t),\ \ t \in I$, есть решение задачи (1), (2). Установим априорные оценки для этого решения и его производных. Умножая (1) на $x(t)$ и учитывая (3), найдем $xx'''' \le |x|H(t), \quad \forall t \in I$. Дважды интегрируя это неравенство от $t = 0$ до $t = \tau$ и учитывая (2), найдем

$$\int_0^\tau x''^2(t)dt \le \int_0^\tau |x(t)|H(t)dt. \tag{5}$$

Пусть $G(t,s)$ есть функция Грина для задачи $z'' = 0, \quad z(0) = z(\tau) = 0$, так что

$$G(t,s) = \tau^{-1}(\tau - t)s, \quad t \ge s, \qquad G(t,s) = \tau^{-1}t(\tau - s), \quad t \le s. \tag{6}$$

Тогда

$$x(t) = -\int_0^\tau G(t,s)x''(s)ds \tag{7}$$

Используя неравенство Гёльдера, из (7) и (5) найдем

$$\begin{aligned} x^2(t) \ &= \left(\int_0^\tau G(t,s)x''(s)ds\right)^2 \le \int_0^\tau G^2(t,s)ds \int_0^\tau x''^2(s)ds \\ &\le \int_0^\tau G^2(t,s)ds \int_0^\tau |x(s)|H(s)ds. \end{aligned} \tag{8}$$

Далее легко проверяется равенство

$$\int_0^\tau G^2(t,s)ds = \frac{t^2(\tau - t)^2}{3\tau}, \quad \forall t \in I, \tag{9}$$

$\max \int_0^\tau G^2(t,s)ds = \frac{\tau^3}{48}$ достигается при $t = \frac{\tau}{2}$. Пусть $t_0 \in I_0$ есть точка максимума для $|x(t)|$. Тогда из (8) следует

$$|x(t_0)| \le \frac{\tau^3}{48} \int_0^\tau H(s)ds \tag{10}$$

Из (8), (9), (10) находим

$$x^2(t) \le \frac{t^2(\tau - t)^2}{3\tau} \cdot \frac{\tau^3}{48} \left(\int_0^\tau H(s)ds\right)^2$$

или

$$|x(t)| \leq \frac{\tau t(\tau - t)}{12} \int\limits_0^\tau H(s)ds := N_0, \quad \forall t \in I. \tag{11}$$

Из (11) и (5) следует, что

$$\int\limits_0^\tau x''^2(t)dt \leq M \tag{12}$$

где $M = \frac{\tau^3}{48}\left(\int\limits_0^\tau H(s)ds\right)^2$. Из (7) и (6) находим, используя неравенство Гёльдера

$$|x'(t)| = \left|\left(\int\limits_0^t \frac{s(\tau-t)}{\tau}x''(s)ds + \int\limits_t^\tau \frac{t(\tau-s)}{\tau}x''(s)ds\right)'_t\right| \leq$$

$$\leq \int\limits_0^t \frac{s}{\tau}|x''(s)|ds + \int\limits_t^\tau \frac{\tau-s}{\tau}|x''(s)|ds \leq$$

$$\leq \left[\left(\int\limits_0^t \frac{s^2}{\tau^2}ds\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int\limits_t^\tau (\frac{\tau-s}{\tau})^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right]\left(\int\limits_0^\tau x''^2(s)ds\right)^{\frac{1}{2}};$$

откуда следует

$$|x'(t)| \leq (\frac{\tau}{3})^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} := N_1, \quad \forall t \in I \tag{13}$$

Теперь из леммы для постоянных N_0, N_1, M, B (определенных неравенствами (11), (12), (13)) следует существование постоянной N, для которой выполняются неравенства $|x''(t)| \leq N, \quad |x'''(t)| \leq N \quad \forall t \in I$.

Определим нечетную функцию $\sigma(s)$, $s \in R$, равенствами $\sigma(s) = s, \ \ 0 \leq s \leq 1$, $\sigma(s) = 1, s > 1$ и рассмотрим вспомогательное уравнение

$$x'''' = f\left(t, n\sigma(\frac{x}{n}), n\sigma(\frac{x'}{n}), n\sigma(\frac{x''}{n}), n\sigma(\frac{x'''}{n})\right), \tag{14}$$

где $n = \max(N_0, N_1, N)$. Так как уравнение $x'''' = 0$ с условиями (2) имеет только тривиальное решение, и т. к. правая часть (14) ограничена некоторой постоянной, то решение задачи (14), (2) существует (см. [6], стр. 25). Обозначим его через $x_0(t), t \in I$. Повторяя предыдущие рассуждения, найдем, что для $x_0(t)$ выполняются те же априорные оценки, что и для $x(t)$. При выполнении этих оценок уравнение (14) совпадает с уравнением (1), и поэтому $x_0(t)$ есть решение задачи (1), (2). Тем самым теорема 1 доказана.

Замечание 1. Как следует из доказательства теоремы 1, условие (3) можно заменить более слабым, а именно

$$f \leq H(t), \quad 0 \leq x \leq N_0, \quad f \geq -H(t), \quad -N_0 \leq x \leq 0$$

$|x'| \leq N_1$, и $\quad \forall (x'', x''') \in R^2$, где N_0 и N_1 определены неравенствами (11), (12), (13).

Замечание 2. Рассмотрим множество уравнений (1), для которых выполняются условия (3) (с разными $H(t)$), причем существует постоянная H_0 такая, что $\int\limits_0^\tau H(t)dt \leq H_0$ для любых уравнений из этого множества. В этом случае оценка (11) является точной и в общем случае не может быть улучшена.

Рассмотрим задачу (2) для более общего уравнения

$$x'''' = \sigma(t)x + f(t, x, x', x'', x''') \tag{15}$$

Теорема 2. Пусть f удовлетворяет условиям теоремы 1, $\sigma \in C(I)$, $\sigma(t) \geq 0$, $\forall t \in I$. Предположим далее, что

$$\int\limits_0^\tau \int\limits_0^\tau G^2(t,s)\sigma(t)dtds < 1. \tag{16}$$

Тогда решение задачи (15), (2) существует.

Эта теорема доказывается с помощью тех же рассуждений, которые были использованы в теореме 1.

Рассмотрим задачу (2) для уравнения

$$x'''' = \sigma_0 x + \varphi(t), \tag{17}$$

где $\sigma_0 = const$, $\varphi \in C(I)$. Задача (17), (2) имеет единственное решение, если $\sigma_0 < \tau^{-4}\pi^4 = \tau^{-4} \cdot 97,409...$ (При $\sigma_0 = \tau^{-4}\pi^4$ однородное уравнение (17) имеет решение $x(t) = \sin\frac{\pi}{\tau}t$ и поэтому задача (17), (2), вообще говоря, решения не имеет.) Из условия (16), используя (9), находим, что задача (17), (2) имеет решение, если $\sigma_0 < \tau^{-4} \cdot 90$.

Теорема 3. Пусть $H(t) \geq 0 \quad \forall t \in I$, и

$$f \geq -H(t), \quad 0 \leq x'' \leq h_2, \quad f \leq H(t), \quad -h_2 \leq x'' \leq 0, \tag{18}$$

причем неравенства (18) выполняются для всех $|x| \leq h_0$, $|x'| \leq h_1$, и для $\forall(t, x''') \in I \times R$, где $h_0 = \frac{\tau^2}{8}h_2$, $h_1 = \frac{2\tau}{5}h_2$, $h_2 = \left(\frac{\tau^3}{2}\int\limits_0^\tau H^2(s)ds\right)^{\frac{1}{2}}$. Предположим далее, что существует $B > 0$ такое, что выполняется неравенство

$$|f(t, x, x', x'', x''')| \leq B\left(1 + |x'''|^3\right) \tag{19}$$

для $|x| \leq h_0$, $|x'| \leq h_1$, $|x''| \leq h_2$ и для $\forall(t, x''') \in (I \times R)$.

Тогда решение задачи (1),(2) существует.

Теорема 3 доказывается с помощью тех же рассуждений, которые были использованы в теореме 1. Заметим, что показатель степени 3 в условии (19) является точным и в общем случае не может быть увеличен.

Список литературы

[1] Беспалова С.А., Клоков Ю.А. //Дифференциальные уравнения. 1989. т. 25. Nr.4. Стр. 573 - 578.

[2] Беспалова С.А., Клоков Ю.А. //Дифференциальные уравнения. 1990. т.26. Nr.6. Стр. 931 - 933.

[3] Беспалова С.А., Клоков Ю.А. //Дифференциальные уравнения. 1992. т.28. Nr.9. Стр. 1484 - 1490.

[4] Клоков Ю.А. // LU zinātniskie raksti. Diferenciālvienādojumi. 1995, 599. s., 25 - 29. lpp.

[5] Клоков Ю.А. //Дифференциальные уравнения. 1987. т. 23. Nr.4. Стр. 611 - 618.

[6] Васильев Н.И., Клоков Ю.А. Основы теории краевых задач обыкновенных дифференци альных уравнений. Рига, "Зинатне", 1978.

Yu. Klokov. On the Dirichlet problem for nonlinear ordinary differential equation of the fourth order.

Summary. Sufficient conditions for solvability of the Dirichlet problem

$$x'''' = f(t, x, x', x'', x'''),$$

$$x(0) = x''(0) = x(\tau) = x''(\tau) = 0$$

are given.

1991 MSC 34B99

J. Klokovs. Par vienu Dirihle tipa problēmu ceturtās kārtas PDV.

Anotācija. Iegūti Dirihle problēmas

$$x'''' = f(t, x, x', x'', x'''),$$

$$x(0) = x''(0) = x(\tau) = x''(\tau) = 0$$

atrisinājuma eksistences pietiekamie nosacījumi.

Institute of Mathematics
and Computer Science,
University of Latvia
Riga, Rainis blvd 29

Received 7.11.03