Максимальные решения двухточечных краевых задач

Л.А.Лепин

Аннотация. Для дифференциального уравнения второго порядка найдены двухточечные краевые задачи с максимальным решением.

УДК 517.927

Рассмотрим краевую задачу

$$x'' = f(t, x, x'), \tag{1}$$

$$H_1(x(a), x(b), x'(a), x'(b)) = h_1, \quad H_2(x(a), x(b), x'(a), x'(b)) = h_2, \tag{2}$$

$$\alpha \le x \le \beta, \quad U, \tag{3}$$

где $f \in Car([a,b] \times R^2, R)$, $H_1, H_2 \in C(R^4, R)$, α – нижняя функция, β – верхняя функция, U – подмножество множества условий:

1. $\alpha(a) = \beta(a)$, 2. $\alpha'(a) < \beta'(a)$, 3. $\alpha'(a) = \beta'(a)$, 4. $\alpha'(a) > \beta'(a)$,
5. $\alpha(b) = \beta(b)$, 6. $\alpha'(b) < \beta'(b)$, 7. $\alpha'(b) = \beta'(b)$, 8. $\alpha'(b) > \beta'(b)$,
9. $(\forall x, y \in S([a,b], R))(x \le y \wedge x'(a) \le y'(a) \Rightarrow x'(b) \le y'(b)) \wedge (x \le y \wedge x'(b) \ge y'(b) \Rightarrow x'(a) \ge y'(a)))$,

A. $\alpha \in S([a,b], R)$, B. $\beta \in S([a,b], R)$, C. $H_1\alpha = H_1\beta$, D. $H_2\alpha = H_2\beta$, $S([a,b], R)$ – множество решений x уравнения (1), удовлетворяющих неравенствам $\alpha \le x \le \beta$. В работе [1] найдены теоремы существования обобщенного решения краевой задачи (1)-(3), если H_1 и H_2 принадлежат классам монотонности, в работе [2] для условий 1 - 8 найдены теоремы существования максимально обобщенного решения краевой задачи (1)-(3) в терминах классов монотонности, а в работах [3]-[4] показано, что других теорем такого типа нет. Наша цель – установить, для каких теорем работы [1] существует максимальное решение, а для остальных теорем построить примеры отсутствия максимального решения. Оказывается, что для теорем Tb02-Tb03, Tb08-Tb09, Tb12, Tb20, Tb23-Tb24, Tb26-Tb27, Tb34-Tb36, Tb42, Tb49, Tb81 и Tb84 работы [1] существует максимальное решение, а для остальных теорем можно построить противоречащие примеры.

Короткая запись теорем

Определение 1. Функция $H \in C(R^4, R)$ имеет тип монотонности $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$, где $\sigma_i \in \{0, -, +, 1\}$, $i = 1, 2, 3, 4$, если при $\sigma_i = 0$ функция H не зависит от i-го аргумента, при $\sigma_i = -$ функция H не возрастает по i-му аргументу, при $\sigma_i = +$ функция H не убывает по i-му аргументу, а при $\sigma_i = 1$ на i-й аргумент функции H условия не накладываются. Класс монотонности $M(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ состоит из функций, имеющих тип монотонности $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$.

Далее будем предполагать, что задача Дирихле

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(a) = A, \quad x(b) = B, \quad \alpha_1 \le x \le \beta_1 \tag{4}$$

имеет решение при любых значениях нижней функции α_1, верхней функции β_1, $\alpha \le \alpha_1 \le \beta_1 \le \beta$, $A \in [\alpha_1(a), \beta_1(a)]$, $B \in [\alpha_1(b), \beta_1(b)]$ и множество этих решений компактно. При этом предположении для теорем Tb01-Tb49, Tb51-Tb88 существует обычное решение. Базовую теорему

Tbn. Для любых $H_1 \in M(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$, $H_2 \in M(\sigma_5, \sigma_6, \sigma_7, \sigma_8)$, $h_1 \in [H_1\alpha, H_1\beta]$ и $h_2 \in [H_2\alpha, H_2\beta]$ из $H_1\alpha \le H_1\beta$, $H_2\alpha \le H_2\beta$ и условий U следует существование решения краевой задачи (1) - (3).

коротко будем записывать так

$$Tbn. \quad \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4.\sigma_5\sigma_6\sigma_7\sigma_8.u_1u_2u_3u_4u_5u_6u_7u_8u_9u_Au_Bu_Cu_D,$$

где n – номер базовой теоремы, $u_i = i$, если i-е условие входит в U, и u_i пусто в противном случае.

Существование максимального решения

Теорема 1 *Для теорем*

Tb02. 1--0.-10+
Tb03. 11-+.1--0.1
Tb08. 111+.1-10.13
Tb09. 11-+.11-+.15
Tb12. 1--+.1--+.18
Tb20. 111+.111+.135
Tb23. 1-1+.1-1+.138
Tb24. 1111.1111.1357
Tb26. 1---.-1++.9AB
Tb27. 1111.1---.19AB
Tb34. 1111.1-1-.139AB
Tb35. 1111.1111.159AB
Tb36. 1111.1-11.179AB
Tb42. 1+0+.1--+.1C
Tb49. 1+1+.1-1+.13C
Tb81. 1100.1100.CD
Tb84. 1110.1110.13CD

существуют максимальное и минимальное решения.

Доказательство. Множество решений краевой задачи (1)-(3) обозначим через SH. Проведем доказательство существования максимального решения для теоремы Tb02. Предварительно докажем, что для любых $x, y \in SH$ существует $z \in SH$ такое, что $z \geq s = \max\{x, y\}$. Ясно, что s – нижняя функция. Следовательно, достаточно доказать, что $H_1 s \leq h_1$ и $H_2 s \leq h_2$, чтобы из теоремы Tb02 следовало существование z. Рассмотрим случай, когда $x(a) > y(a)$ и $x(b) < y(b)$. Тогда $h_1 = H_1 x \geq H_1(x(a), y(b), x'(a), x'(b)) = H_1 s$ и $h_2 = H_2 y \geq H_2(x(a), y(b),\ y'(a),\ y'(b)) = H_2 s$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Если SH состоит из конечного числа решений, то существование максимального решения очевидно. Пусть SH состоит из бесконечного числа решений. Обозначим через r_i, $i = 1, 2, \ldots$ рациональные точки интервала $[a, b]$ и через $x_i \in SH$ такие решения, что $x_i(r_i) = \max\{x(r_i) : x \in SH\}$. Определим последовательность z_i, $i = 1, 2, \ldots$ следующим образом: $z_1 = x_1$ и $z_i \in SH$, $i = 2, 3, \ldots$ такое, что $z_i \geq \max\{z_{i-1}, x_i\}$. Ясно, что $\lim_{i \to \infty} z_i = z \in SH$ и $z = \max\{x : x \in SH\}$. Существование минимального решения следует из симметрии теоремы относительно замены x на $-x$.

Из доказанного следует существование максимального и минимального решений задачи Дирихле (4). Для теорем Tb09, Tb20, Tb24, Tb35, Tb81 и Tb84 существование максимального решения следует из существования максимального решения задачи Дирихле

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(a) = \beta(a), \quad x(b) = \beta(b), \quad \alpha \leq x \leq \beta.$$

Проведем доказательство для теоремы Tb03. Для этого достаточно для любых $x, y \in SH$ показать существование $z \in SH$ такого, что $z \geq s = \max\{x, y\}$. Пусть $x(b) > y(b) \vee (x(b) = y(b) \wedge x'(b) \leq y'(b))$. Тогда $h_1 = H_1 x \geq H_1 s$ и $h_2 = H_2 x \geq H_2 s$. Следовательно, по теореме Tb03 найдется $z \in SH$ такое, что $z \geq s$.

Теорема Tb08. 111+.1-10.13 эквивалентна теореме 010+.0-00.13. Следовательно, существование максимального и минимального решений для теоремы Tb08 следует из соответствующего результата для теоремы Tb03.

Проведем доказательство для теоремы Tb12. Для этого достаточно для любых $x, y \in SH$ показать существование $z \in SH$ такого, что $z \geq s = \max\{x, y\}$. Пусть $x(b) > y(b) \vee (x(b) = y(b) \wedge x'(b) \leq y'(b))$. Из условий теоремы следует, что $H_1 s \leq h_1$ и $H_2 s \leq h_2$. Если $x'(b) \geq \beta'(b)$, то по теореме Tb12 найдется $z \in SH$ такое, что $z \geq s$. Если $x'(b) < \beta'(b)$, то по теореме Tb02 краевая задача

$$z'' = f(t, z, z'), \quad z(a) = \beta(a), \quad z'(b) = \beta'(b), \quad s \leq z \leq \beta$$

имеет решение. Из условий теоремы следует, что $H_1 z = h_1$ и $H_2 z = h_2$.

Теорема Tb23. 1-1+.1-1+.138 эквивалентна теореме 0-0+.0-0+.138. Следовательно, существование максимального и минимального решений для теоремы Tb23 следует из соответствующего результата для теоремы Tb12.

Проведем доказательство для теоремы Tb26. Для этого достаточно для любых $x, y \in SH$ показать существование $z \in SH$ такого, что $z \geq s = \max\{x, y\}$. Рассмотрим случай, когда $x(a) \leq y(a)$ и $x(b) \geq y(b)$. Через u обозначим решение задачи Дирихле

$$u'' = f(t, u, u'), \quad u(a) = y(a), \quad u(b) = x(b), \quad s \leq u \leq \beta.$$

Тогда $h_1 = H_1 y \geq H_1 u$ и $h_2 = H_2 x \geq H_2 u$. По теореме Tb26 найдется решение $z \in SH$ такое, что $z \geq u \geq s$. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Проведем доказательство для теоремы Tb27. Для этого достаточно для любых $x, y \in SH$ показать существование $z \in SH$ такого, что $z \geq s = \max\{x, y\}$. Если $x(b) = y(b)$, то обозначим через z решение задачи Дирихле

$$z'' = f(t, z, z'), \quad z(a) = x(a), \quad z(b) = x(b), \quad s \leq z \leq \beta. \tag{5}$$

Из условия 9 следует, что $z'(a) = x'(a)$ и $z'(b) = x'(b)$. Следовательно, $h_1 = H_1 x = H_1 z$ и $h_2 = H_2 x = H_2 z$. Если $x(b) > y(b)$, то $x'(a) \geq y'(a)$. Предположим противное: $y'(a) > x'(a)$. Тогда для решения задачи Дирихле (5) получаем $z'(a) = x'(a)$, что противоречит неравенствам $z'(a) \geq y'(a) > x'(a)$. Следовательно, $h_1 = H_1 x = H_1 z$ и $h_2 = H_2 x = H_2 z$.

Теорема Tb34. 1111.1-1-.139AB эквивалентна теореме 0101.0-0-.139AB и теорема Tb36. 1111.1-11.179AB эквивалентна теореме 0100.0-00.179AB. Следовательно, существование максимального и минимального решений для теорем Tb34 и Tb36 следует из соответствующего результата для теоремы Tb27.

Проведем доказательство для теоремы Tb42. Для этого достаточно для любых $x, y \in SH$ показать существование $z \in SH$ такого, что $z \geq s = \max\{x, y\}$. Пусть $x(b) > y(b) \vee (x(b) = y(b) \wedge x'(b) \leq y'(b))$. Ясно, что $h_1 = H_1 x = H_1 s$ и $h_2 = H_2 x \geq H_2 s$. По теореме Tb42 найдется решение $z \in SH$ такое, что $z \geq s$.

Теорема Tb49. 1+1+.1-1+.13C эквивалентна теореме 0+0+.0-0+.13C. Следовательно, существование максимального и минимального решений для теоремы Tb49 следует из соответствующего результата для теоремы Tb42.

Примеры

Теорема 2 *Для теорем Tb01, Tb04-Tb07, Tb10-Tb11, Tb13-Tb19, Tb21-Tb22, Tb25, Tb28-Tb33, Tb37-Tb41, Tb43-Tb48, Tb50-Tb80, Tb82-Tb83 и Tb85-Tb88 максимальное решение может не существовать.*

Доказательство. Противоречащий пример будем строить, используя одно граничное условие H_1, кроме тех случаев, когда по теореме Tb02 или Tb26 для H_1 построить противоречащий пример нельзя. Тогда будем использовать второе граничное условие H_2. Как и для теорем, для примеров будем использовать короткую запись

E01. 0+-0.379AB, $b = -a = 1$, $\beta = -\alpha = 1$, $f = 0$,

$Hx = (\mid x(b) - \alpha(b) \mid + x(b) - \alpha(b))(\mid x'(a) - s'(a) \mid - x'(a) + s'(a)) = 0$, где s – решение задачи Дирихле

$$s'' = f(t, s, s'), \quad s(a) = \alpha(a), \quad s(b) = \beta(b), \quad \alpha \leq s \leq \beta. \tag{6}$$

Этот пример годится для теорем

Tb01. 11-+.--00

Tb05. -11+.--10.3

Tb25. 1111.--00.9AB

Tb31. 1111.--1-.39AB

Tb37. 1111.--11.379AB

Tb40. +--0.-1-+.C.H_2

Tb41. +-00.11-+.C.H_2

Tb80. + ---.1111.9ABC.H_2

При этом для теорем Tb40-Tb41 из теоремы Tb02 следует, что для H_1 пример нельзя построить, и он строится для H_2. Аналогично для теоремы Tb80 из теоремы Tb26 следует, что для H_1 пример нельзя построить. Заметим, что условие C на H_2 не действует.

Небольшими изменениями примера E01 можно построить еще два примера. При этом построении выпишем только отличия.

E02. 0+-0.269AB, $\beta = 1 + \varepsilon t$, здесь и далее $\varepsilon > 0$ предполагается достаточно малым. Этот пример годится для теорем

Tb04. -1-+.---0.2

Tb28. 1111.----.29AB

E03. 0+-0.469AB, $\beta = -\alpha = \operatorname{ch} \varepsilon t$, $f = \varepsilon^2 x$. Этот пример годится для теорем

Tb06. –11+.--+0.4

Tb32. 1111.--+0.49AB

Tb38. 1111.--+-.469AB

Tb48. 0++0.-11+.4C.H_2

E04. 01+0.469AC, $b = -\alpha = 1$, $\alpha = -\varepsilon \operatorname{ch} t$, $\beta = 1$, $f = x$,

$Hx =\mid x(b) - \alpha(b) \mid x'(a) = 0$. Этот пример годится для теорем

Tb07. –1++.--10.4

Tb52. 1111.--00.AC

Tb61. 1111.--+0.4AC

Tb73. 1111.--+-.46AC

Tb78. 1000.-1++.49AC.H_2

Tb88. 1111.1111.ACD

E05. 01+0.379AC, $\alpha = 0$. Этот пример годится для теоремы

Tb78. 1000.-1++.39AC.H_2

E06. 0001.136AC, $a = -2$, $f = 6x^{1/3}$ для $-2 \le t < 0$, $f = 1$ при $x < -1$, $f = -x$ при $\mid x \mid\le 1$ и $f = -1$ при $x > 1$ для $0 \le t < \pi$ и $f = 0$ для $t \ge \pi$. В качестве α выбираем решение уравнения (1) такое, что $\alpha(-2) = \alpha'(2) = 0$, $\alpha(t) < 0$ для $0 \le t \le \pi$ и $\alpha'(\pi) = 0$, а в качестве β на интервале $[-2, \pi]$ выбираем такое решение уравнения (1), что $\beta(-2) = \beta'(-2) = 0$, $\beta(t) > 0$ для $0 \le t \le \pi$, $\beta'(\pi) > 0$ и $\beta = \beta(\pi) + (t - \pi)\varepsilon$ для $t > \pi$. Пусть s – решение уравнения (1) такое, что $s(-2) = s'(-2) = 0$, $s(0) < 0$ и найдется такое $b > \pi$, что $s(b) = \beta(b)$,

$$Hx = (x'(b) - \beta'(b))(x'(b) - s'(b))x'(b) = 0.$$

Этот пример годится для теорем

Tb10. 1--1.1---.16

Tb21. 1-11.1-1-.136

Tb55. 1111.1--0.1AC

Tb63. 1111.1-10.13AC

Tb65. 1111.1---.16AC

Tb75. 1111.1-1-.136AC

Tb87. 1011.1011.136CD

E07. 0001.137AC, $\beta = \beta(\pi)$ при $t > \pi$. Этот пример годится для теорем

Tb11. 1--1.1--1.17

Tb22. 1-11.1-11.137

Tb66. 1111.1--1.17AC

Tb76. 1111.1-11.137AC

E08. 00-+.269AC, $b = -a = 1$, $\alpha = 0$, $\beta = 1 + \varepsilon t$, $f = x$,

$Hx = (\mid x'(a) \mid -x'(a))(\mid x(b) \mid +x'(b)) = 0$. Этот пример годится для теорем

Tb13. ---1.----.26

Tb57. 1111.---0.2AC

Tb68. 1111.----.26AC

E09. 00-+.279AC, $\beta = 1 - \varepsilon(t-1)^2$. Этот пример годится для теорем

Tb14. ---1.---1.27

Tb69. 1111.---1.27AC

E10. 00-+.289AC, $\beta = 1 - \varepsilon t^2$. Этот пример годится для теорем

Tb15. ---+.---+.28

Tb70. 1111.---+.28AC

E11. 00-+.369AC, $\beta = 1 + \varepsilon(t+1)^2$. Этот пример годится для теорем

Tb16. --11.--1-.36

Tb43. 0+1+.--1+.3C

Tb44. ++-+.--0+.3C

Tb59. 1111.--10.3AC

Tb60. ++1+.--1+.3AC

Tb71. 1111.--1+.36AC

Tb85. +0-1.0001.36CD

Tb86. 0011.0011.36CD

E12. 00-+.379AC, $\beta = 1$. Этот пример годится для теорем

Tb17. --11.--11.37

Tb72. 1111.--11.37AC

E13. 00-+.469AC, $\beta = 1 + \varepsilon t^2$

$Hx = (\mid x'(a) \mid -x'(a))(\mid x'(b) - 2\varepsilon \mid +x'(b) - 2\varepsilon)$. Этот пример годится для теорем

Tb18. --11.--+-.46

Tb44. ++-+.--0+.4C

Tb46. 0+1+.--++.4C

Tb62. ++1+.--++.4AC

Tb85. +0-1.0001.46CD

Tb86. 0011.0011.46CD Если H умножить на -1, то получится пример

E14. 00+-.469AC. Этот пример годится для теоремы

Tb19. --1-.--+1.46

E15. 0010.269AB, $b = -a = 1$, $\alpha = -1$, $\beta = (1+t)/2$, $f = 0$,

$Hx = (1 - x'(a))x'(a) = 0$. Этот пример годится для теоремы

Tb29. 1---.--1-.29AB.H_2

E16. 0001.269AB, $a = 0$, $b = 1$, $\alpha = 0$, $\beta = \operatorname{ch} t + \varepsilon \operatorname{sh} t$, $f = x$,

$Hx = (s'(b) - x'(b))x'(b) = 0$, где s – решение задачи Дирихле (6). Этот пример годится для теоремы

Tb30. 1---.--+1.29AB.H_2

E17. 0001.369AB, $\beta = \operatorname{ch} t$. Этот пример годится для теоремы

Tb30. 1---.--+1.39AB.H_2

E18. 0010.489AB, $b = -a = 1$, $\alpha = -1$, $\beta = (1-t)/2$, $f = 0$,

$Hx = -(x'(a)+1)x'(a) = 0$. Этот пример годится для теоремы

Tb33. -1++.--1-.49AB.H_2

E19. +00+.379AC, $b = -a = 1$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $f = x$,

$Hx = (\mid x(a) \mid + x(a))(\mid x'(b) \mid + x'(b)) = 0$. Этот пример годится для теоремы

Tb39. 1+0+.--0+.C

E20. 00--.37AC, $b = -a = \pi$, $\alpha = -2 - \operatorname{sh}^{-1} 2\pi \operatorname{ch}(t-\pi)$, $\beta = t + \pi$ для $-\pi \le t \le o$, $\beta = \pi$ для $0 < t \le \pi$, $f = x + 2$ при $x < -1$, $f = -x$ при $-1 \le x \le 0$ и $f = 0$ при $x > 0$,

$Hx = -(\mid x'(a) \mid + x'(a))(\mid x'(b) \mid + x'(b)) = 0$. Этот пример годится для теорем

Tb45. +---.---+.3C

Tb50. +---.--+-.37C

Tb54. +---.---+.AC Если H умножить на -1, то получится пример

E21. 00++.37AC. Этот пример годится для теоремы

Tb53. 1+++.--0+.AC

E22. 00--.46AC, $\alpha = -2 - \operatorname{sh}^{-1} 2\pi \operatorname{ch}(t-\pi) - \varepsilon \operatorname{ch} t$. Этот пример годится для теорем

Tb45. +---.---+.4C

Tb50. +---.--+-.46C Если H умножить на -1, то получится пример

E23. 00++.46AC. Этот пример годится для теорем

Tb47. 0+++.--1+.4C

Tb51.00++.--11.46C

E24. 00--.36AC, $\alpha = -2 - \operatorname{sh}^{-1} 2\pi \operatorname{ch}(t-\pi) - \varepsilon \operatorname{ch}(t+\pi)$.Этот пример годится для теоремы

Tb50. +---.--+-.36C

E25. 00--.47AC, $\alpha = -2 - (\operatorname{sh}^{-1} 2\pi - \varepsilon) \operatorname{ch}(t-\pi)$. Этот пример годится для теоремы

Tb50. +---.--+-.47C

E26. 00++.27AC, $\alpha = -2 - (\operatorname{sh}^{-1} 2\pi + \varepsilon) \operatorname{ch}(t-\pi)$,

$Hx = (\mid x'(a) \mid + x'(a))(\mid x'(b) \mid + x'(b)) = 0$. Этот пример годится для теоремы Tb58. ++++.—+.2AC

E27. 00++.127AC, $b = -a = \pi$, $f = 1$ при $x < -1$, $f = -x$ при $-1 \le x \le 0$ и $f = 0$ при $x > 0$, α – решение уравнения (1) такое, что $\alpha(-\pi) = 0$, $\alpha < 0$ при $-\pi < t \le \pi$ и $\alpha'(\pi) = 0$, $\beta = t + \pi$ для $-\pi \le t \le 0$ и $\beta = \pi$ для $0 < t \le \pi$,

$Hx = (\mid x'(a) \mid + x'(a))(\mid x'(b) \mid + x'(b)) = 0$. Этот пример годится для теоремы

Tb56. 1+++.1--+.1AC

E28. 0001.1358AC, $a = -2$, $f = 6x^{1/3}$ для $-2 \le t \le 0$, $f = 1$ при $x < -1$, $f = -x$ при $\mid x \mid \le 1$ и $f = -1$ при $x > 1$ для $t > 0$. Пусть s – решение уравнения (1) такое, что $s(-2) = s'(-2) = 0$, $s(\pi/2) > 0$, $s(3\pi/2) < 0$ и $s(b) = 0$ для $b \in (3\pi/2, 2\pi)$. В качестве α выберем решение уравнения (1) такое, что $\alpha(-2) = \alpha'(-2) = 0$, $\alpha \le \min\{s, -s\}$ и $\alpha(b) = 0$, а в качестве β на интервале $[-2, c]$, где $c \in (0, b)$, решение u уравнения (1) такое, что $u(-2) = u'(-2) = 0$, $u(t) > -\alpha(t)$ для $t > 0$ и на интервале $[c, b]$ решение v уравнения (1) такое, что $v(b) = 0$, $v(t) > -\alpha(t)$ для $c \le t < b$ и $v(c) = u(c)$,

$Hx = (x'(b) - \alpha'(b))(x'(b) - s'(b))(x'(b) + s'(b))(x'(b) - \beta'(b)) = 0$. Этот пример годится для теорем

Tb64. 1111.11-+.15AC

Tb67. 1111.1--+.18AC
Tb74. 1111.111+.135AC
Tb77. 1111.1-1+.138AC
E29. 0001.379AC, $a = 0$, $b = 1$, $\alpha = 0$, $\beta = \operatorname{sh} 1$, $f = x$,
$Hx = (x'(b) - \operatorname{ch} 1)x'(b) = 0$. Этот пример годится для теоремы
Tb79. 1000.--+1.39AC.H_2
E30. 0001.479AC, $\beta = \operatorname{sh} 1 + \varepsilon(t-1)^2$. Этот пример годится для теоремы
Tb79. 1000.--+1.49AC.H_2
E31. 0+-0.379AC, $b = -a = 1$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $f = x$,
$Hx = (\mid x(b) \mid + x(b))(\mid x'(a) \mid - x'(a)) = 0$. Этот пример годится для теорем
Tb82. +1-0.0100.3CD
Tb83. 0110.0110.3CD
E32. 0+-0.479AC, $\beta = 1 + \varepsilon(t-1)^2$,
$Hx = (\mid x(b) \mid + x(b))(\mid x'(a) + 4\varepsilon \mid - x'(a) - 4\varepsilon) = 0$. Этот пример годится для теорем
Tb82. +1-0.0100.4CD
Tb83. 0110.0110.4CD

Замечание 1. Если для теоремы Tb41. +-00.11-+.C на первое граничное условие наложить дополнительные условия: H_1 по первому аргументу строго возрастает или по второму аргументу строго убывает, то для соответствующей краевой задачи существют максимальное и минимальное решения. Покажем существование максимального решения. Пусть $A = \sup\{x(a) : x \in SH\}$, $B = \sup\{x(b) : x \in SH\}$, $x_1 \in SH$, такое, что $x_1(a) = A$ и $x_2 \in SH$ такое, что $x_2(b) = B$. Из условий монотонности следует, что $x_1(b) = B$ или $x_2(b) = A$. Следовательно, существует $x \in SH$ такое, что $x(a) + A$ и $x(b) = B$. Пусть y – максимальное решение задачи Дирихле $x = f(t, x, x')$, $x(a) = A$, $x(b) = B$, $\alpha \leq x \leq \beta$. Ясно, что $H_2 y \leq h_2$. Следовательно, существует $z \in SH$ такое, что $z \geq y$. Ясно, что $z = y$ – максимальное решение.

Существование минимального решения

Не все базовые теоремы симметричны относительно замены x на $-x$. Теоремы Tb52-Tb79 и Tb88 содержат условие A и не содержат условия B. Поэтому из возможности отсутствия максимального решения для этих теорем не следует возможность отсутствия минимального решения. Действительно, для теорем Tb52, Tb55, Tb57, Tb59, Tb61, Tb63-Tb77 и Tb88 функция α является минимальным решением. Осталось исследовать теоремы Tb53-Tb54, Tb56, Tb58, Tb60, Tb62 и Tb78-Tb79.

Теорема 3 *Для теорем*
Tb53. 1+++.--0+.AC
Tb56. 1+++.1--+.1AC
Tb78. 1000.-1++.3 $\vee$*49AC существует минимальное решение.*

Доказательство. Множество решений краевой задачи (1)-(3) обозначим через SH. Проведем доказательство для теоремы Tb53. Если $H_2\alpha = h_2$, то α – минимальное решение. Если $\alpha'(b) \geq \beta'(b)$, то $H_2\alpha = H_2\beta = h_2$. Рассмотрим случай $\alpha'(b) < \beta'(b)$

и $H_2\alpha < h_2$. Вместо теоремы 1+++.–0+.6AC рассмотрим эквивалентную ей 1—.–0+.6AC. Пусть $x, y \in SH$ и $s = \min\{x, y\}$. Рассмотрим случай $x(a) < y(a)$ и $x(b) > y(b)$. Если $x'(b) \geq y'(b)$, то из $h_1 = H_1x \leq H_1s$, $h_2 = H_2y \leq H_2s$ и теоремы Tb07t. 1—.–01.6 следует существование $z \in SH$ такого, что $z \leq s$. Из монотонностей для H_2 следует $x'(b) > \alpha'(b)$ и $y'(b) > \alpha'(b)$. Если $x'(b) < y'(b)$, то краевая задача

$$u'' = f(t, u, u'), \quad u(a) = x(a), \quad u'(b) = x'(b), \quad \alpha \leq u \leq s \tag{7}$$

по теореме Tb02. 1–0.-10+ имеет решение. Из $h_1 = H_1x \leq H_1u$, $h_2 = H_2x \leq H_2u$ и теоремы Tb07t следует существование $z \in SH$ такого, что $z \leq u \leq s$. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Проведем доказательство для теоремы Tb56. Если $H_2\alpha = h_2$, то α – минимальное решение. Если $\alpha'(b) \geq \beta'(b)$, то $H_2\alpha = H_2\beta = h_2$. Рассмотрим случай $\alpha'(b) < \beta'(b)$ и $H_2\alpha < h_2$. Вместо теоремы 1+++.1–+.16AC рассмотрим эквивалентную ей 1—.1–+.16AC. Пусть $x, y \in SH$ и $s = \min\{x, y\}$. Из монотонности для H_2 следует $x'(b) > \alpha'(b)$ и $y'(b) > \alpha'(b)$. Рассмотрим случай $x'(a) \leq y'(a)$ и $x(b) > y(b)$. Если $x'(b) \geq y'(b)$, то из $h_1 = H_1x \leq H_1s$, $h_2 = H_2y \leq H_2s$ и Tb10H. 1—.1–1.16 следует существование $z \in SH$ такого, что $z \leq s$. Если $x'(b) < y'(b)$, то краевая задача (7) по теореме Tb02 имеет решение. Из $h_1 = H_1x \leq H_1u$, $h_2 = H_2x \leq H_2u$ и теоремы Tb10H следует существование $z \in SH$ такого, что $z \leq u \leq s$. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Проведем доказательство для теоремы Tb78. Пусть $x, y \in SH$ и $s = \min\{x, y\}$. Рассмотрим случай $x(a) < y(a)$ и $x(b) > y(b)$. По теореме Tb02 краевая задача

$$u'' = f(t, u, u'), \quad u(a) = x(a), \quad u(b) = y(b), \quad \alpha \leq u \leq s$$

имеет решение. Из $h_1 = H_1x = H_1u$, $h_2 = H_2y \leq H_2u$ и теоремы Tb26. 1—.-1++.9AB следует существование $z \in SH$ такого, что $z \leq u \leq s$. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Примеры

Теорема 4 *Для теорем Tb54, Tb58, Tb60, Tb62 и Tb79 минимальное решение может не существовать.*

Доказательство. Из условий теорем следует, что, используя только H_1, пример построить нельзя. Поэтому будем предполагать, что $H_1 \equiv 0 = h_1$.

E33. 00-+.369AB, $a = 0$, $b = 1$, $\beta = -\alpha = \operatorname{ch} t$, $f = x$,

$H_2x = -x'(a) + x'(b) = 0$. Этот пример годится для теорем

Tb54. +---.---+.AC

Tb60. ++1+.--1+.3AC

E34. 00-+.269AB, $a = 1/2$, $b = 1$, $\beta = -\alpha = \operatorname{ch} t$, $f = x$,

$H_2x = -x'(a) + x'(b) = 0$. Этот пример годится для теоремы

Tb58. ++++.---+.2AC

E35. 00++.4AB, $a = -\pi$, $b = 1$, $\alpha = -(t+\pi)/(1+\pi)$, $\beta = 3-t$, $f = 0$ при $t > 0$ или $x \leq 0$, или $x \geq 2$, $f = -x$ при $t \in [-\pi, 0]$, $x \in [0, 1]$, $f = x - 2$ при $t \in [-\pi, 0]$, $x \in [1, 2]$,

$H_2x = (x'(a) - \mid x'(a) \mid)(\mid x'(b) \mid - x'(b)) = 0$. Этот пример годится для теоремы

Tb62. ++1+.--++.4AC

E36. 0001.369AB, $a=0$, $b=1$, $\beta=-\alpha=\operatorname{ch} t$, $f=x$,

$H_2x=(x'(b)-\beta'(b))(x'(b)-s'(b))=0$, где s – решение задачи Дирихле

$$x''=f(t,x,x'),\quad x(a)=\beta(a),\quad x(b)=\alpha(b). \tag{8}$$

Этот пример годится для теоремы

Tb79. 1000.--+1.369AC

E37. 0001.469AB, $a=-1$, $b=1$, $\beta=-\alpha=\operatorname{ch} t$, $f=x$,

$H_2x=(x'(b)-\beta'(b))(x'(b)-s'(b))=0$, где s – решение задачи Дирихле (8). Этот пример годится для теоремы

Tb79. 0001.--+1.469AC

Список литературы

[1] Лепин А.Я., Лепин Л.А. Краевые задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. – Рига: Зинатне, 1988.

[2] Лепина Э.И. О максимальных решениях краевых задач для уравнения второго порядка // Актуальные вопросы краевых задач. Теория и приложения. – Рига: ЛГУ, 1988. – С.131-139.

[3] Лепина Э.И. Краевые задачи без максимального решения // Теоретические и численные исследования краевых задач. – Рига: ЛГУ, 1989. – С.91-99.

[4] Лепина Э.И. Краевые задачи без максимального решения. II // Математика. Дифференциальные уравнения. Научные труды. – Рига: ЛУ, 1990. – Т.553. – С.66-77.

L.A. Lepin. Maximal solutions of two-point boundary value problems.

Annotation. For the second order differential equations two-point boundary value problems with a maximal solution are found.

1991 MSC 34B15

L.A. Lepins. Divpunktu robežproblēmu maksimālie atrisinājumi.

Anotācija. Otrās kārtas diferenciālvienādojumiem ir atrastas divpunktu robežproblēmas ar maksimālu atrisinājumu.

Institute of Mathematics
and Computer Science,
University of Latvia
Riga, Rainis blvd 29

Received 21.11.02