Априорные оценки производных для систем дифференциальных неравенств

А.Я. Лепин

Аннотация. Для системы дифференциальных неравенств при наличии оценки решений по норме даны условия ограниченности производных решения.

УДК 517.927

В работе [1] показано, что для задачи

$$x_i^{(n)} = f_i(t, x_1, ..., x_m^{(n-1)}), \quad \|x_i\|_p < A, \quad i = 1, ..., m, \tag{1}$$

где $p \in [1, \infty)$, при наличии оценки

$$| f_i(t, x_1, ..., x_m^{(n-1)}) | \leq B(1+ | x_1 |^{\alpha_0} + ... + | x_m^{(n-1)} |^{\alpha_{n-1}}),$$

где $\alpha_j = (1 + pn)/(1 + pj)$, $j = 0, ..., n-1$, найдется $M > 0$ такое, что для любого решения $x_1, ..., x_m$ задачи (1) справедлива оценка

$$\|x_i^{(j)}\|_\infty < M, \quad i = 1, ..., m, \quad j = 0, ..., n-1.$$

Наша цель – для задачи

$$\begin{gathered} | x_i^{(n_i)}(t) | \leq \sum_{k=1}^{r_i} g_{ik}(t) M_1^{\alpha_{i1k}}(t) ... M_m^{\alpha_{imk}}(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \\ \|x_i\|_{p_i} < A_i, \quad i = 1, ..., m, \end{gathered} \tag{2}$$

где $n_i \in \{2, 3, ...\}$, $r_i \in \{1, 2, ...\}$, $p_i \in [1, \infty)$, $A_i > 0$, $g_{ik} \in L_1([0,1], [0, \infty))$, $\alpha_{ijk} \geq 0$ и

$$M_i(t) = \max\{| x_i^{(k)}(t) |^{(n_i - 1 + 1/p_i)/(k + 1/p_i)} \colon k \in \{0, ..., n_i - 1\}\}, \tag{3}$$

найти условия на g_{ik} и α_{ijk}, при наличии которых найдется $M > 0$ такое, что для любого решения $x_1, ..., x_m$ задачи (2) справедливы оценки

$$\|x_i^{(j)}\|_\infty < M, \quad i = 1, ..., m, \quad j = 0, ..., n_i - 1. \tag{4}$$

Под решением задачи (2) понимаются функции $x_i \in AC_{n_i-1}([0,1],R)$, $i=1,...,m$, удовлетворяющие (2).

Условия на g_{ik} имеют следующий вид. Для любых $t_1 \in [0,1)$ и $t_2 \in (t_1,1]$

$$\int_{t_1}^{t_2} g_{ik}(t)dt \le B_{ik}(t_2-t_1)^{\gamma_{ik}}, \quad i=1,...,m, \quad k=1,...,r_i, \tag{5}$$

где $B_{ik}>0$ и $\gamma_{ik}>0$. Далее понадобятся следующие формулы и условие. Для $k_i \in \{1,...,r_i\}$, $i=1,...,m$

$$\begin{aligned} &\alpha^0_{ijk_i} = \alpha_{ijk_i} - \delta_{ij}\left(\gamma_{ik_i}(n_i-1+1/p_i)^{-1}+1\right), \quad i,j=1,...,m, \\ &A^0(k_i) = \|\alpha^0_{ijk_i}\| \quad (i,j=1,...,m). \end{aligned} \tag{6}$$

Заметим, что у матриц $A^0(k_i)$ внедиагональные элементы неотрицательны.

A. Главные миноры матрицы нечетного порядка неположительны, а четного порядка – неотрицательны.

Теперь можно сформулировать основную теорему.

Теорема 1 *Если при любом выборе $k_i \in \{1,...,r_i\}$, $i=1,...,m$ матрица $A^0(k_i)$ удовлетворяет условию A, то для решений системы неравенств (2) справедлива априорная оценка (4).*

Основные леммы

Рассмотрим систему неравенств

$$1 < M_1^{\alpha^0_{i1}} ... M_m^{\alpha^0_{im}}, \quad 1 < M_i, \quad i=1,...,m. \tag{7}$$

Лемма 1 *(см.[2]) Если для матрицы $A^0 = \|\alpha^0_{ij}\|$ $(i,j=1,...,m)$ выполняется условие A и внедиагональные элементы неотрицательны, то система неравенств (7) не имеет решения.*

Далее понадобится следующее определение. Будем говорить, что матрицы $A^0(k_i)$ разложимы, если $\{1,...,m\}$ можно разбить на два непустых множества I и $I' = \{1,...,m\}\backslash I$ со следующими свойствами. Если $i \in I$, а $j \in I'$, то $\alpha^0_{ijk}=0$, $k=1,...,r_i$.

Лемма 2 *(см.[3]) Если при любом выборе $k_i \in \{1,...,r_i\}$, $i=1,...,m$ матрица $A^0(k_i)$ удовлетворяет условию A, найдутся $S_1 \subset \{1,...,m\}$ и $k_i \in \{1,...,r_i\}$, $i \in S_1$ такие, что S_1 и $S_1' = \{1,...,m\}\backslash S_1$ непустые, матрица $\|\alpha^0_{ijk_i}\|$ $(i,j \in S_1)$ неразложима, $|\,\alpha^0_{ijk_i}\,|\ (i,j \in S_1) = 0$ и*

$$\sum_{i\in S_1}\sum_{j\in S_1'} \alpha^0_{ijk_i} > 0, \tag{8}$$

то матрицы $A^0(k_i)$ разложимы.

Введем обозначения. Если $t_1 \in [0,1)$, $t_2 \in (t_1,1]$, $x : [t_1,t_2] \to R$ и $p \in [1,\infty)$, то

$$\|x\|_{p[t_1,t_2]} = \left(\int_{t_1}^{t_2} | x(t) |^p \, dt\right)^{1/p}, \quad p < \infty,$$

$$\|x\|_{\infty[t_1,t_2]} = \text{ess sup}\{| \mathrm{x(t)} |: \mathrm{t_1 \le t \le t_2}\}, \quad \|\mathrm{x}\|_{\mathrm{p}} = \|\mathrm{x}\|_{\mathrm{p[0,1]}}.$$

Пусть $l > 0$, $n \in \{1,2,...\}$ и $x \in AC_{n-1}([0,l],R)$.

Лемма 3 *(см.[4]) Если $0 < M \le x^{(n)}(t)$ для почти всех $t \in [0,l]$, то*

$$c_{np} l^{n+1/p} M \le \|x\|_{p[0,l]}.$$

Лемма 4 *(см.[5]) Если $k \in \{0,...,n-1\}$ и*

$$l^{n+1/p} \, \|x\|_{p[0,l]}^{-1} \, \|x^{(n)}\|_{\infty[0,l]} \ge 1,$$

то

$$\|x^{(k)}\|_{\infty[0,l]} \le c_{pkn} \, \|x\|_{p[0,l]}^{(n-k)/(n+1/p)} \, \|x^{(n)}\|_{\infty[0,l]}^{(k+1/p)/(n+1/p)},$$

а если $l^{n+1/p} \, \|x\|_{p[0,l]}^{-1} \, \|x^{(n)}\|_{\infty[0,l]} \le 1$, то $\|x^{(k)}\|_{\infty[0,l]} \le c_{pkn} \, \|x\|_{p[0,1]} \, l^{-k-1/p}$.

Доказательство теоремы

Теорему будем доказывать по индукции. Рассмотрим случай $m = 1$. Пусть $a_0 = 0$, $b_0 = 1$, $s = 0$ и $M_{1s} = \|x_1^{(n_1-1)}\|_{\infty[a_s,b_s]}$. Если

$$M_{1s} \le \max\{1, A_1 3^{(n_1-1+1/p_1)s}\} = m_s,$$

то оценка (4) следует из леммы 4. Пусть $M_{1s} > m_s$. Из (3) и леммы 4 следует оценка

$$M_1(t) \le c_1 M_{1s}, \quad a_s \le t \le b_s,$$

$$c_1 = \max\{c_{p_1 k n_1 - 1}^{(n_1-1+1/p_1)/(k+1/p_1)} \, A_1^{(n_1-1-k)/(k+1/p_1)} : k \in \{0,...,n_1-1\}\}.$$

Пусть $t_{1s} \in [a_s,b_s)$, $t_{2s} \in (t_{1s},b_s]$ и $t_{2s} - t_{1s} = \varepsilon M_{1s}^{-1/(n_1-1+1/p_1)}$, где ε определяется из (9). Из (2) и условий теоремы следует

$$\begin{aligned} | x_1^{(n_1-1)}(t_{2s}) - x_1^{(n_1-1)}(t_{1s}) | &\le \textstyle\sum_{k=1}^{r_1} B_{1k}(t_{2s}-t_{1s})^{\gamma_{1k}} c_1^{\alpha_{11k}} M_{1s}^{\alpha_{11k}} \\ &\le \textstyle\sum_{k=1}^{r_1} B_{1k} c_1^{\alpha_{11k}} \varepsilon^{\gamma_{1k}} M_{1s}^{\alpha_{11k}-\gamma_{1k}/(n_1-1+1/p_1)} \qquad (9) \\ &\le M_{1s} \textstyle\sum_{k=1}^{r_1} B_{1k} c_1^{\alpha_{11k}} \varepsilon^{\gamma_{1k}} = 2^{-1} M_{1s}. \end{aligned}$$

Пусть $| x_1^{(n_1-1)}(t_{1s}) |= M_{1s}$ или $| x_1^{(n_1-1)}(t_{2s}) |= M_{1s}$. Если $M_{1s} \le (3^{s+1}\varepsilon)^{n_1-1+1/p_1}$, то теорема очевидна. Пусть

$$t_{2s} - t_{1s} = \varepsilon M_{1s}^{-1/(n_1-1+1/p_1)} < 3^{-s-1}. \qquad (10)$$

Из (9)-(10) и леммы 3 следует оценка

$$q_1 = c_{n_1-1p_1}\varepsilon^{n_1-1+1/p_1}2^{-1} \le \|x_1\|_{p_1[t_{1s},t_{2s}]}. \tag{11}$$

Пусть $q = (A_1/q_1)^{p_1}$. Ясно, что если найдутся $s > q$ непересекающихся интервалов, для которых справедлива оценка (11), то получится противоречие. Обозначим через $[a_1, b_1]$ наибольший из интервалов $[a_0, t_{10}]$, $[t_{20}, b_0]$. Предыдущие рассуждения справедливы и при $s = 1$. Продолжая аналогично, далее найдем $s \le q$ такое, что справедлива оценка

$$M_{1s} \le \max\{1, A_1 3^{(n_1-1+1/p_1)s}, (3^{s+1}\varepsilon)^{n_1-1+1/p_1}\}. \tag{12}$$

Из (12) следует оценка

$$\|x_1^{(n_1-1)}\|_\infty \le 2^q \max\{1, A_1 3^{(n_1-1+1/p_1)q}, (3^q\varepsilon)^{n_1-1+1/p_1}\}.$$

Рассмотрим случай $m > 1$. Будем предполагать, что для всех меньших значений теорема справедлива. Если матрицы $A^0(k_i)$ разложимы, то в силу индуктивного предположения теорема справедлива. Предположим, что матрицы $A^0(k_i)$ неразложимы. Аналогично случаю $m = 1$ пусть $a_0 = 0$, $b_0 = 1$, $s = 0$ и $M_{is} = \|x_i^{(n_i-1)}\|_{\infty[a_s,b_s]}$, $i = 1, ..., m$. Первоначально получим оценку для M_{is}, $i = 1, ..., m$ при $s \le q$, где q определим позже. Заметим, что достаточно иметь оценку для M_{is} при фиксированном i, чтобы из индуктивного предположения получить оценку для всех i. Если для некоторого $i \in \{1, ..., m\}$

$$M_{is} \le \max\{1, A_i 3^{(n_i-1+1/p_i)s}\} = m_{is},$$

то для M_{is}, $i = 1, ..., m$ имеется оценка. Если $M_{is} > m_{is}$, то из (3) и леммы 4 для $i = 1, ..., m$ следуют оценки

$$M_i(t) \le c_i M_{is}, \quad a_s \le t \le b_s,$$

$$c_i = \max\{c_{p_ikn_i-1}^{(n_i-1+1/p_i)/(k+1/p_i)} A_i^{(n_i-1-k)/(k+1/p_i)} : k \in \{0, ..., n_i-1\}\}.$$

Пусть $t_{1s} \in [a_s, b_s)$, $t_{2s} \in (t_{1s}, b_s]$ и $t_{2s} - t_{1s} = \varepsilon_i M_{is}^{-1/(n_i-1+1/p_i)}$, где

$$\varepsilon_i = \min\{(2r_iB_{ik}c_1^{\alpha_{i1k}}...c_m^{\alpha_{imk}})^{-1/\gamma_{ik}} : k \in \{1, ..., r_i\}\}.$$

Из (2) для $i = 1, ..., m$ следуют оценки

$$\begin{aligned} |\, x_i^{(n_i-1)}(t_{2s}) - x_i^{(n_i-1)}(t_{1s}) \,| &\le \textstyle\sum_{k=1}^{r_i} B_{ik}(t_{2s}-t_{1s})^{\gamma_{ik}} c_1^{\alpha_{i1k}}...c_m^{\alpha_{imk}} M_{1s}^{\alpha_{i1k}}...M_{ms}^{\alpha_{imk}} \\ &\le M_{is} \textstyle\sum_{k=1}^{r_i} B_{ik}\varepsilon_i^{\gamma_{ik}} c_1^{\alpha_{i1k}}...c_m^{\alpha_{imk}} M_{1s}^{\alpha_{i1k}^0}...M_{ms}^{\alpha_{imk}^0} \qquad (13) \\ &\le M_{is}(2r_i)^{-1} \textstyle\sum_{k=1}^{r_i} M_{1s}^{\alpha_{i1k}^0}...M_{ms}^{\alpha_{imk}^0}. \end{aligned}$$

Если в последней сумме максимальное слагаемое обозначить $M_{1s}^{\alpha_{i1}^0}...M_{ms}^{\alpha_{im}^0}$, то из (13) следует

$$|\, x_i^{(n_i-1)}(t_{2s}) - x_i^{(n_i-1)}(t_{1s}) \,| \le M_{is}\, 2^{-1} M_{1s}^{\alpha_{i1}^0}...M_{ms}^{\alpha_{im}^0}, \quad i = 1, ..., m. \tag{14}$$

Если для некоторого $i \in \{1, ..., m\}$ справедлива оценка

$$M_{is} \leq (3^{s+1}\varepsilon_i)^{n_i-1+1/p_i},$$

то из индуктивного предположения следует оценка для M_{is}, $i = 1, ..., m$. Предположим, что

$$M_{is} > (3^{s+1}\varepsilon_i)^{n_i-1+1/p_i}, \quad i = 1, ..., m.$$

Обозначим через S_1 и S_2 подмножества $\{1, ..., m\}$ такие, что

$$M_{1s}^{\alpha_{i1}^0} ... M_{ms}^{\alpha_{im}^0} \leq 1, \quad i \in S_1, \tag{15}$$

$$M_{1s}^{\alpha_{i1}^0} ... M_{ms}^{\alpha_{im}^0} > 1, \quad i \in S_2 \tag{16}$$

и $S_1 \cup S_2 = \{1, ..., m\}$. Из леммы 1 следует, что S_1 непусто. Рассмотрим случай, когда S_2 пусто. Пусть $N_s = \max\{M_{is} : i \in \{1, ..., m\}\}$, $N_s = M_{js}$ и $\mid x_j^{(n_j-1)}(t_{1s}) \mid = M_{js}$ или $\mid x_j^{(n_j-1)}(t_{2s}) \mid = M_{js}$. Из леммы 3 следует оценка

$$q_j = c_{n_j-1p_j}\varepsilon_j^{n_j-1+1/p_j}2^{-1} \leq \|x_j\|_{p_j[t_{1s}, t_{2s}]}. \tag{17}$$

Пусть $q = \sum_{j=1}^m (A_j/q_j)^{p_j}$. Ясно, что если найдутся $s > q$ непересекающихся интервалов, для которых справедлива оценка (17), то получается противоречие. Обозначим через $[a_{s+1}, b_{s+1}]$ наибольший из интервалов $[a_s, t_{1s}]$, $[t_{2s}, b_s]$. Из (14) и (15) следует оценка $N_{s+1} \geq 2^{-1}N_s$. Рассмотрим случай, когда S_2 непусто. При равенстве нулю главного минора $M(S_2) = \mid \alpha_{ij}^0 \mid$ $(i, j \in S_2)$ покажем, что матрицы $A^0(k_i)$ разложимы. Если матрица $A_* = \|\alpha_{ij}^0\|$ $(i, j \in S_2)$ неразложима, то это следует из леммы 2. При разложимости матрицы A_* найдется $S_3 \subset S_2$ такое, что S_3 непусто, главный минор $M(S_3)$ равен нулю и матрица $\|\alpha_{ij}^0\|$ $(i, j \in S3)$ неразложима. Покажем, что условие (8) леммы 2 выполняется с заменой S_1 на S_3. Предполагая противное и используя лемму 1, получаем противоречие. Следовательно, лемма 2 применима и матрицы $A^0(k_i)$ разложимы, что противоречит нашему предположению. Пусть главный минор $M(S_2)$ отличен от нуля. Исключая неизвестные, систему неравенств (16) можно привести к виду

$$M_{is}^{-\alpha_{ii}^*} < \Pi_{j \in S_1} M_{js}^{\alpha_{ij}^*}, \quad i \in S_2. \tag{18}$$

Пусть $N_{s1} = \max\{M_{is} : i \in S_1\}$, $N_{s1} = M_{js}$ и $\mid x_j^{(n_j-1)}(t_1) \mid = M_{js}$ или $\mid x_j^{(n_j-1)}(t_2) \mid = M_{js}$. Аналогично предыдущему случаю получаем (17) и оценку $N_{s+1} \geq 2^{-1}N_{s1}$. Если $N_s = N_{s1}$, то $N_{s+1} \geq 2^{-1}N_s$. Пусть $N_s > N_{s1}$. Тогда из (18) следует

$$N_s^{-\alpha_{jj}^*} < N_{s1}^{\beta_j}, \quad \beta_j = \sum_{i \in S_1} \alpha_{ji}^*.$$

Следовательно,

$$N_{s+1} \geq 2^{-1}\min\{N_s, \min\{N_s^{-\alpha_{ii}^*/\beta_i} : i \in S_2\}\}. \tag{19}$$

Из (19) получаем оценку N_s через N_0, что доказывает теорему.

Список литературы

[1] Клоков Ю.А. // Дифференц.уравнения. 1987. Т.23, N 4. С.611-618.

[2] Лепин А.Я. // Научные труды ИМИ ЛУ. Т.1. Рига: 2000. С.25-28.

[3] Лепин А.Я. // Научные труды ИМИ ЛУ. Т.2. Рига: 2001. С.26-31.

[4] Звягинцев А.И. // Латв.мат.ежегодник. Рига, 1988. Вып.31. С.216-221.

[5] Звягинцев А.И. // Научные труды. Т.553. Рига: ЛУ. 1990. С.54-62.

A. Ja. Lepin. A priori bounds of derivatives for systems of differential inequalities.

Annotation. Conditions for boundedness of derivatives of solutions to a system of differential inequalities are given provided that the estimate of the norm of a solution is known.

1991 MSC 34B15

A. Ja. Lepins. Atvasinājumu ierobežotibas nosacījumi diferenciālo nevienādibu sistēmai.

Anotācija. Aplukoti nosacījumi, kuri nodrošina diferenciālo nevienādibu sistēmas atrisinājumu atvasinājumu ierobežotibu pie pieņemuma ka atrisinājuma normas novērtējums ir zināms.

Institute of Mathematics
and Computer Science,
University of Latvia
Riga, Rainis blvd 29

Received 21.11.02