Свойства решений дифференциального уравнения четвертого порядка

А.Я.Лепин, Л.А.Лепин

Аннотация. Для задачи Дирихле

$$x^{(4)} = f(t, x, x', x'', x'''), \quad x(0) = A, \quad x(1) = B, \quad \alpha \le x \le \beta$$

изучается существование решения и свойства решений.

УДК 517.927

Рассмотрим задачу Дирихле между функциями α и β

$$x^{(4)} = f(t, x, x', x'', x'''), \quad 0 \le t \le 1, \tag{1}$$

$$x(0) = A, \quad x(1) = B, \quad \alpha \le x \le \beta, \tag{2}$$

где $f : [0,1] \times R^4 \to R$ удовлетворяет условиям Каратеодори, $\alpha, \beta \in C([0,1], R)$, $\alpha < \beta$, $A \in [\alpha(0), \beta(0)]$ и $B \in [\alpha(1), \beta(1)]$. Изучение свойств решений задачи Дирихле (1) - (2) тесно связано с изучением свойств множества решений $x : [0,1] \to R$ уравнения (1), лежащих между α и β. Это множество обозначим через S. В работе [1] рассматривалась разрешимость задачи Дирихле при фиксированном $A \in (\alpha(0), \beta(0))$. Здесь мы отказываемся от этого предположения. Заметим, что дифференциальные свойства α и β не играют такой роли, как для уравнения второго порядка (см.[2]-[3]). Основную роль будут играть следующие условия.

1. Для любого $b \in (0,1]$ найдется $M > 0$ такое, что для любого решения $x : [0,b) \to R$ уравнения (1) из $\alpha(t) \le x(t) \le \beta(t)$, $t \in [0,b)$ следует $\mid x'''(t) \mid < M$, $t \in [0,b)$.

2. Задача Коши между α и β имеет единственное решение и следующие краевые задачи имеют единственное решение при $r \in \{2,3,4\}$, $c_1 \in [0,1)$, $c_2 \in (c_1, 1]$,...,$c_r \in (c_{r-1}, 1]$, $k_1 \in \{0,1,2\}$, если $k_1 = 2$, то $c_1 = 0$, $k_i \in \{0,1\}$, $i = 2,3,4$ и $C_{ij} \in R$, $i = 1,...,r$, $j = 0,...,k_i$.

$$x^{(4)} = f(t, x, x', x'', x'''), \quad x^{(j)}(c_i) = C_{ij}, \quad i = 1,...,r, \quad j = 0,...,k_i,$$

$$k_1 + ... + k_r = 4 - r, \quad \alpha(t) \le x(t) \le \beta(t), \quad t \in [c_1, c_r].$$

Далее предполагается, что условия 1-2 всегда выполняются.

В теореме 1 дается необходимое и достаточное условие отсутствия решений задачи Дирихле (1)-(2) при любых A и B, а в теореме 4 рассматривается поведение решений задачи Дирихле (1)-(2) для случая, когда решений достаточно много.

Введем обозначения. Через S^* обозначим множество решений $x : [0, b_x] \to R$, $b_x \in (0, 1]$ уравнения (1), удовлетворяющих неравенствам $\alpha(t) \le x(t) \le \beta(t)$, $t \in [0, b_x]$, а $S^*(A) = \{x \in S^* : x(0) = A\}$. Множество решений задачи Дирихле (1)-(2) обозначим $D(A, B)$. Для $k = 0, 1, ...$ и $p = 0, 1$

$$S_p^{*k} = \{x : [0, b_x] \to R \in S^* : (\exists \gamma_1, ..., \gamma_k \in [0, b_x])(\gamma_1 < ... < \gamma_k \wedge (\forall i \in \{1, ..., k\})$$

$$(x(\gamma_i) = \mid \sin \pi(i + p)/2 \mid \alpha(\gamma_i) + \mid \cos \pi(i + p)/2 \mid \beta(\gamma_i)))\},$$

$$S^{*k} = S_0^{*k} \cup S_1^{*k}, \quad S_{p*}^{*k} = S_p^{*k} \backslash S^{*k+1}, \quad S_*^{*k} = S^{*k} \backslash S^{*k+1},$$

$$S_p^k = S_p^{*k} \cap S, \quad S^k = S^{*k} \cap S, \quad S_{*p}^k = S_{p*}^{*k} \cap S, \quad S_*^k = S_*^{*k} \cap S,$$

$$S(A) = S \cap S^*(A), \quad S_p^{*k}(A) = S_p^{*k} \cap S^*(A), \quad ... \quad S_*^k(A) = S_*^k \cap S^*(A).$$

Нужные нам результаты из работы [1] сформулируем в виде трех лемм.

Лемма 1 *Если $A \in (\alpha(0), \beta(0))$, то условие $x : [0, b_x] \to R \in S^{*4}(A)$, $b_x < 1$ и решение x далее непродолжимо между α и β эквивалентно условию $D(A, B) = \oslash$ для $B \in [\alpha(1), \beta(1)]$.*

Лемма 2 *Если $A \in (\alpha(0), \beta(0))$, то условие $S^{*4}(A) \ne \oslash$ эквивалентно условию $S_*^0(A) = \oslash$.*

Лемма 3 *Если $A \in (\alpha(0), \beta(0))$ и $S_*^0(A) \ne \oslash$, то найдутся $B_0, B_1 \in [\alpha(1), \beta(1)]$ такие, что $B_0 < B_1$, $D(A, B) = \oslash$ для $B \in [\alpha(1), B_0) \cup (B_1, \beta(1)]$, $D(A, B) \cap S_*^0(A) \ne \oslash$ для $B \in (B_0, B_1)$, если $B_0 > \alpha(1)$, то $D(A, B_0) = \{x_0(A)\}$ и $x_0(A) \in S_{0*}^3$, если $B_1 < \beta(1)$, то $D(A, B_1) = \{x_1(A)\}$ и $x_1(A) \in S_{1*}^3$.*

Теорема 1 *Условие (i) $x : [0, b_x] \to R \in S^{*5}$, $b_x < 1$ и решение x далее непродолжимо между α и β эквивалентно условию (ii) $D(A, B) = \oslash$ для $A \in [\alpha(0), \beta(0)]$ и $B \in [\alpha(1), \beta(1)]$.*

Доказательство. Если условие (i) справедливо, то из условия 2 следует условие (ii). Покажем, что из условия (ii) следует условие (i). Для $A \in (\alpha(0), \beta(0))$ по лемме 1 существует непродолжимое между α и β решение $x(A) : [0, b_{x(A)}] \to R \in S^{*4}(A)$, $b_{x(A)} < 1$. Рассмотрим случай, когда $x(A) \in S_0^{*4}(A)$ для любого $A \in (\alpha(0), \beta(0))$. Если $A_0, A_1 \in (\alpha(0), \beta(0))$ и $A_0 < A_1$, то из условия 2 следует $b_{x(A_0)} < b_{x(A_1)}$. Теперь из условий 1-2 следует существование предела

$$y = \lim_{A \to \beta(0)} x(A) \in S_1^{*5}(\beta(0)).$$

Если максимально возможное продолжение y между α и β обозначить $x(\beta(0)) : [0, b_{x(\beta(0))}] \to R$, то $b_{x(\beta(0))} < 1$. Аналогично рассматривается случай, когда $x(A) \in S_1^{*4}$

для $A \in (\alpha(0), \beta(0))$. Рассмотрим случай, когда найдутся $A_0, A_1 \in (\alpha(0), \beta(0))$ такие, что $x(A_0) \in S_0^{*4}(A_0)$ и $x(A_1) \in S_1^{*4}(A_1)$. Из условия 2 следует, что $A_0 \le A_1$. Если $A_0 = A_1$, то $x(A_0) = x(A_1) \in S^{*5}$. Рассмотрим случай, когда $A_0 < A_1$. Из условия 2 следует существование $A_* \in [A_0, A_1]$ такого, что $x(A) \in S_0^{*4}(A)$ для $A < A_*$ и $x(A) \in S_1^{*4}(A)$ для $A > A_*$. Следовательно, $x(A_*) \in S^{*5}(A_*)$.

Теорема 2 *Условие (i) $x \in S^5$ эквивалентно условию (ii) найдется $x \in S$ такое, что $D(A,B) = \oslash$ для $(A,B) \in [\alpha(0), \beta(0)] \times [\alpha(1), \beta(1)] \setminus \{(x(0), x(1))\}$.*

Доказательство. Если условие (i) справедливо, то из условия 2 следует условие (ii). Покажем, что из условия (ii) следует условие (i). Рассмотрим случай, когда $x(0) = \alpha(0)$. Аналогично доказательству теоремы 1 определяем $x(A) \in S^{*4}(A)$ для $A \in (\alpha(0), \beta(0))$. Если $x(A) \in S_1^{*4}(A)$ для $A \in (\alpha(0), \beta(0))$, то существует предел

$$y : [0, b_y] \to R = \lim_{A \to \alpha(0)} x(A) \in S^{*5}(\alpha(0)).$$

Из условия 2 следует, что $y(t) = x(t)$ для $t \in [0, b_y]$. Следовательно, $x \in S^5(\alpha(0))$. По условию 2 случай, когда найдется $A \in (\alpha(0), \beta(0))$ такое, что $x(A) \in S_0^{*4}(A)$ невозможен. Случай, когда $x(0) = \beta(0)$, рассматривается аналогично. Пусть $x(0) \in (\alpha(0), \beta(0))$. Из условия 2 следует, что $x(A) \in S_0^{*4}(A)$ для $A \in (\alpha(0), x(0))$ и $x(A) \in S_1^{*4}(A)$ для $A \in (x(0), \beta(0))$. Тогда существуют пределы

$$y : [0, b_y] \to R = \lim_{A \to x(0)-} x(A) \in S_0^{*4}(x(0)),$$

$$z : [0, b_z] \to R = \lim_{A \to x(0)+} x(A) \in S_0^{*4}(A).$$

Ясно, что $y(t) = x(t)$ для $t \in [0, b_y]$ и $z(t) = x(t)$ для $t \in [0, b_z]$. Следовательно, $x \in S^5$.

Теорема 3 *Условие (i) $S^{*5} \neq \oslash$ эквивалентно условию (ii) $S_*^0 = \oslash$.*

Доказательство. Если условие (i) справедливо, то из теорем 1-2 следует условие (ii). Покажем, что из условия (ii) следует условие (i). Для $A \in (\alpha(0), \beta(0))$ из леммы 2 следует существование $x(A) \in S^{*4}(A)$. Если $x(A) \in S_0^{*4}(A)$ для $A \in (\alpha(0), \beta(0))$, то аналогично доказательству теоремы 1 определяем $x(\beta(0)) \in S_1^{*5}(\beta(0))$. Аналогично рассматривается случай, когда $x(A) \in S_1^{*4}(A)$ для $A \in (\alpha(0), \beta(0))$. Если найдутся $A_0, A_1 \in (\alpha(0), \beta(0))$ такие, что $x(A_0) \in S_0^{*4}(A_0)$ и $x(A_1) \in S_1^{*4}$, то аналогично доказательству теоремы 1 получаем, что $A_0 \le A_1$ и найдется $A_* \in [A_0, A_1]$ такое, что $x(A_*) \in S^{*5}(A_*)$.

Теорема 4 *Если $S^{*5} = \oslash$, то справедливы следующие условия. Найдутся $A_0, A_1 \in [\alpha(0), \beta(0)]$ такие, что $A_0 < A_1$, $S(A) = \oslash$ для $A \in [\alpha(0), A_0) \cup (A_1, \beta(0)]$, $S_*^0(A) \neq \oslash$ для $A \in (A_0, A_1)$, если $A_0 > \alpha(0)$, то $S(A_0) = \{x(A_0)\}$ и $x(A_0) \in S_{0*}^4$, если $A_1 < \beta(0)$, то $S(A_1) = \{x(A_1)\}$ и $x(A_1) \in S_{1*}^4$. Найдутся $A_2, A_3 \in [A_0, A_1]$ такие, что $S_0^3(A) = \{x_0(A)\}$ и $x_0(A)(1) \in (\alpha(1), \beta(1))$ для $A \in (A_0, A_2)$ и $S_0^3(A) = \oslash$ для $A \in (A_2, A_1)$, $S_1^3(A) = \{x_1(A)\}$ и $x_1(A)(1) \in (\alpha(1), \beta(1))$ для $A \in (A_3, A_1)$ и $S_1^3(A) = \oslash$ для $A \in (A_0, A_3)$. Если $A_2 \in (A_0, A_1)$, то $\lim_{A \to A_2} x_0(A)(1) = \alpha(1)$. Если $A_3 \in (A_0, A_1)$, то $\lim_{A \to A_3} x_1(A)(1) = \beta(1)$. Функции $x_p(A)$, $p = 0,1$ непрерывно зависят от A, а функции $x_p(A)(1)$, $p = 0,1$ строго убывают. Если $A_0 > \alpha(0)$, то $A_2 > A_3$ и из $x(A_0)(1) \in (\alpha(1), \beta(1))$ следует $A_3 = A_0$. Если $A_1 < \beta(0)$, то $A_3 < A_1$ и из $x(A_1)(1) \in (\alpha(1), \beta(1))$ следует $A_2 = A_1$.*

Доказательство. Пусть
$$A_* = \{A \in (\alpha(0), \beta(0)) : S^0_*(A) \neq \oslash\}.$$
По теореме 3 множество $A_* \neq \oslash$. Обозначим $A_0 = \inf A_*$ и $A_1 = \sup A_*$. Рассмотрим случай, когда $A_0 > \alpha(0)$. Аналогично доказательству теоремы 3 имеем $x(A) \in S_0^{*4}(A)$ для $A \in (\alpha(0), A_0)$ и $\lim_{A\to A_0} x(A) \in S_0^{*4}(A_0)$. Следовательно, $x(A_0) \in S_0^{*4}(A_0)$. Аналогично в случае, когда $A_1 < \beta(0)$, получаем $x(A_1) \in S_1^{*4}(A_1)$. Теперь ясно, что $A_0 < A_1$ и $S(A) = \oslash$ для $A \in [\alpha(0), A_0) \cup (A_1, \beta(0)]$. Покажем, что $S^0_*(A) \neq \oslash$ для $A \in (A_0, A_1)$. Действительно, если $A' \in (A_0, A_1)$ и $S^0_*(A') = \oslash$, то по лемме 2 $x(A') \in S^{*4}(A')$, что по условию 2 противоречит определению интервала (A_0, A_1). Если $S^3_0(A) = \oslash$ для $A \in (A_0, A_1)$, то $A_2 = A_0$. Если $S^3_1(A) = \oslash$ для $A \in (A_0, A_1)$, то $A_3 = A_1$. Пусть $A' \in (A_0, A_1)$, $x(A') \in S^3_0(A')$ и $x(A')(1) \in (\alpha(1), \beta(1))$. Тогда для достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует $x(A) \in S^3_0(A)$ такое, что $x(A)(1) \in (\alpha(1), \beta(1))$ для $A \in (A' - \varepsilon, A' + \varepsilon)$. Действительно, для $A \in (A' - \varepsilon, A')$ и $B \in (\alpha(1), x(1))$ $D(A, B) = \oslash$. По лемме 3 отсюда следует существование $x(A)$ с нужными свойствами. Для $A \in (A', A' + \varepsilon)$ при уменьшении ε отсутствие $x(A)$ с искомыми свойствами по лемме 3 ведет к существованию последовательности $x_i \in S$, $i = 1, 2, ...$ со следующими свойствами: $x_i(0) \in (A', A_1)$, $\lim_{i\to\infty} x_i(0) = A'$ и $x_i(1) = \alpha(1)$, $i = 1, 2, ...$ Следовательно, найдется $x \in D(A', \alpha(1))$, что противоречит условию 2. Обозначим
$$A^0 = \{A \in (A_0, A_1) : (\exists x_0(A) \in S(A))(x_0(A) \in S^3_0 \wedge x_0(A)(1) \in (\alpha(1), \beta(1)))\}.$$
Из предыдущего следует, что A^0 – открытое множество, а из условий 1-2 – что функция $x_0(A)$ непрерывна по A и функция $x_0(A)(1)$ строго убывает. Пусть (A_{0*}, A_2) – максимальный интервал из A^0. Если $A_{0*} > A_0$, то $x_0(A_{0*}) = \lim_{A\to A_{0*}+} x_0(A) \in S^4_0(A_{0*})$, что по лемме 2 противоречит определению интервала (A_0, A_1). Следовательно, $A^0 = (A_0, A_2)$. Если $A_2 \in (A_0, A_1)$, то аналогично предыдущему $\lim_{A\to A_2} x_0(A)(1) = \alpha(1)$. Аналогично рассматривая
$$A^1 = \{A \in (A_0, A_1) : (\exists x_1(A) \in S(A))(x_1(A) \in S^3_1 \wedge x_1(A)(1) \in (\alpha(1), \beta(1)))\},$$
имеем $A^1 = (A_3, A_1)$ и если $A_3 \in (A_0, A_1)$, то $\lim_{A\to A_3} x_1(A)(1) = \beta(1)$. Покажем, что из $A_0 > \alpha(0)$ следует $A_2 > A_0$. Предполагая противное, из леммы 3 получим существование последовательности решений $x_i \in S$ таких, что $x_i(0) \to A_0$ при $i \to \infty$ и $x_i(1) = \alpha(1)$, $i = 1, 2, ...$ Следовательно, существует $x \in D(A_0, \alpha(1))$, что невозможно. Если дополнительно $x(A_0)(1) \in (\alpha(1), \beta(1))$, то, рассуждая аналогично, получим $A_3 = A_0$. Аналогично из $A_1 < \beta(1)$ следует $A_3 < A_1$, а если $x(A_1)(1) \in (\alpha(1), \beta(1))$, то $A_2 = A_1$.

Список литературы

[1] Лепин А.Я., Лепин Л.А. Необходимое и достаточное условие существования решения задачи Дирихле для дифференциального уравнения четвертого порядка // LU MII Zinātniskie raksti. – 2001, 2. – 32.-38.lpp.

[2] Jackson L.K. Subfunctions and second-order ordinary differential inequalities // Advances in Math. – 2 (1968). – P.307-363.

[3] Лепин Л.А. О понятиях нижней и верхней функций // Дифференц. уравнения. – 1980. – Т.16, N 10. – С.1750-1759.

A. Ja. Lepin and L.A. Lepin. Properties of solutions of the fourth order differential equation.

Annotation. For the Dirichlet boundary value problem

$$x^{(4)} = f(t, x, x', x'', x'''), \quad x(0) = A, \quad x(1) = B, \quad \alpha \le x \le \beta$$

the existence of a solution and properties of solutions are studied.

1991 MSC 34B15

A. Ja. Lepins, L. A. Lepins. Ceturtās kārtas diferenciālvienādojuma atrisinājuma īpašības.

Anotācija. Aplukoti nosacījumi, kuri nodrošina robežproblēmas

$$x^{(4)} = f(t, x, x', x'', x'''), \quad x(0) = A, \quad x(1) = B, \quad \alpha \le x \le \beta$$

atrisinājuma eksistenci un pētītas atrisinājumu īpašības.

Institute of Mathematics
and Computer Science,
University of Latvia
Riga, Rainis blvd 29

Received 21.11.02