О втором решении краевой задачи

А.Я. Лепин

Аннотация. Рассматриваются условия, обеспечивающие существование второго неотрицательного решения краевой задачи.

УДК 517.927

Рассмотрим краевую задачу

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(0) = x(1) = 0, \tag{1}$$

где f удовлетворяет условиям Каратеодори и $f(t, 0, 0) = 0$ для $t \in [0, 1]$. Ясно, что 0 является решением краевой задачи (1). Исследуем вопрос о существовании второго неотрицательного решения краевой задачи (1). Будем предполагать, что все решения задачи

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(0) = 0 \tag{2}$$

продолжимы на $[0, 1]$.

Теорема 1 *Если верхняя функция $\beta : [0, 1] \to [0, \infty)$ удовлетворяет условиям $\beta(0) = 0$, $\beta'(0) > 0$, $\beta(t) > 0$ для $t \in (0, 1)$ и если $\beta(1) = 0$, то $\beta'(1) < 0$, существуют $a \in (0, 1)$, $b \in (a, 1]$ и решение $z : [0, 1] \to R$ задачи (2) такое, что $z(a) > 0$, $z(b) = 0$ и $z(t) \geq 0$ для $t \in [0, b]$, то существует решение $x : [0, 1] \to [0, \infty)$ краевой задачи (1), отличное от тождественного.*

Доказательство. Пусть $M = \max\{z'(0), \beta'(0)\}$. Из продолжимости на $[0, 1]$ решений задачи Коши

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) \in [0, M] \tag{3}$$

следует существование $N > 1$ такого, что для любого решения x задачи Коши (3) справедливо неравенство $\mid x'(t) \mid < N$ для $t \in [0, 1]$. Из условий Каратеодори следует существование $g \in L([0, 1], [0, \infty))$ такого, что для любого $x \in AC^1([0, 1], R)$ из $\mid x(t) \mid < N + 1$ и $\mid x'(t) \mid < N + 1$ для $t \in [0, 1]$ следует $\mid f(t, x(t), x'(t)) \mid \leq g(t)$, $t \in [0, 1]$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $\mid \int_{t_1}^{t_2} g(t)\, dt \mid < 1$ для любых $t_1, t_2 \in [0, 1]$ при $\mid t_1 - t_2 \mid < \varepsilon$.

Переопределим функцию $f(t, x, x')$ при $x < 0$. Это не изменит множества неотрицательных решений краевой задачи (1). Пусть $f_1(t, 0, x') = f(t, 0, x')$ при $t \in [0, 1]$, $x' \in R$, $f_1(t, x, x') = 0$ при $x \leq - \mid \varepsilon \operatorname{th} x' \mid$, линейна по x для $x \in [-\varepsilon \mid \operatorname{th} x' \mid, 0]$ при фиксированных t, x' и f равна f_1 для $x < 0$.

Покажем, что любое решение задачи Коши (3) при $x < 0$ строго убывает. Для этого достаточно показать, что для любого решения $x : [0,1] \to R$ из $x(t_0) < 0$ и $x'(t_0) = 0$ для некоторого $t_0 \in (0,1]$ следует противоречие. Действительно, из $x(t_0) < 0$ и $x'(t_0) = 0$ для некоторой окрестности точки t_0 имеем $x''(t) = 0$. Следовательно, $x'(t) = 0$ и $x(t) = x(t_0)$ для $t \in [0, t_0]$, что противоречит (3). Из монотонности следует, что любое решение x краевой задачи (1) удовлетворяет неравенству $x \geq 0$.

Предположим, что второго решения нет. Через Z обозначим множество решений x задачи Коши (3), для которых найдутся $a \in (0,1)$ и $b \in (a,1]$ такие, что $x(a) > 0$ и $x(b) = 0$. Ясно, что $b < 1$ и $x'(b) < 0$. Если $z_1 \in Z$ такое, что $z_1 \leq \beta$, то пусть $\alpha = \max\{z_1, 0\}$. Тогда α – нижняя функция и между α и β существует обобщенное решение x краевой задачи (1) (см.[1]). Из продолжимости решений следует, что x -– обычное решение. Это противоречит нашему предположению. Обозначим через Z_0 множество тех $x \in Z$, для которых $x'(0) = 0$. Если Z_0 не пусто, то оно открыто и замкнуто, что противоречит связности интегральной воронки для задачи Коши

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

Следовательно, Z_0 пусто и $z'(0) > 0$. Обозначим через Z_1 множество решений x задачи Коши (3), для которых справедливо неравенство $0 < x'(0) \leq z'(0)$. Если найдется $y \in Z_1$ такое, что $y \geq 0$, то из связности интегральной воронки для задач Коши

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(0) = 0, \quad y'(0) \leq x'(0) \leq z'(0)$$

следует существование решения краевой задачи (1), что противоречит нашему предположению. Следовательно, $Z_1 \subset Z$. Но в Z_1 существует последовательность x_i, $i = 1, 2, ...$, сходящаяся к $z_0 \in Z_0$, что противоречит нашему предположению и доказывает теорему.

Пример 1. Пусть $f(t, x, x') = -2x'^3$ при $t \in [0, 1/2]$, $x \leq 1$, $x' \in R$, $f(t, x, x') = -64x$ при $t \in (1/2, 1]$, $x \leq 1$, $f(t, x, x') = 0$ при $t \in [0,1]$, $x \geq 2$ и $f(t, x, x')$ линейна по x при фиксированных t и x' для $x \in [1,2]$. Этот пример показывает, что условие $\beta(0) = 0$ существенно.

Пример 2. Пусть $f(t, x, x') = -16x$ при $t \in [0, \pi/4]$ и $f(t, x, x') = 12 \mid x \mid^{1/2}$ при $t \in (\pi/4, 1]$. Этот пример показывает, что условие $\beta'(0) > 0$ существенно.

Список литературы

[1] Лепин Л.А. Обобщенные решения и разрешимость краевых задач для дифференциального уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т. 18, N. 8 – С. 1323 – 1330.

A. Ja. Lepin. On a second solution of the boundary value problem.

Annotation. The conditions are given for the existence of a second nonnegative solution of the boundary value problem.

1991 MSC 34B15

A. Ja. Lepins. Par otru robežproblēmas atrisinājumu.

Anotācija. Aplukoti nosacījumi, kuri nodrošina robežproblēmas otra nenegativa atrisinājuma eksistenci.

Institute of Mathematics
and Computer Science,
University of Latvia
Riga, Rainis blvd 29

Received 21.11.02