индексам b и c, а затем – по индексам a и d, получаем $\alpha_a^a = -Rm$ и $\alpha_d^a = -R\delta_d^a$. С учетом (4) справедлива

ТЕОРЕМА 4. Паракелерово локально конформно келерово многообразие постоянной кривизны плоско.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кириченко В.Ф. K-пространства постоянного типа // Сиб. мат. журн. 1976. Т.17. № 2. С.282-289.
2. Кириченко В.Ф. Дифференциальная геометрия К-пространства // Итоги науки и техники. Сер. Проблемы геометрии / ВИНИТИ АН СССР. М., 1977. Т.8. С.139-161.
3. Лихнерович А. Теория связностей в целом и группы голономий. М., 1960.
4. Gray A. Curvature identities for Hermitian and almost Hermitian manifolds // Tohoku Math. J. 1976. V. 28. P. 601-612.
5. Vaisman I. Holomorphic vector fields on locally conformal Kähler manifolds // Ann. Sti. Univ. Iasi. Sec. 1, 1978. V. 24, N2. P. 357-362.
6. Vaisman I. A theorem on compact locally conformal Kähler manifolds // Proc. Amer. Math. Soc. 1979. V. 75, N2. P. 279-283.
7. Vaisman I. On locally and globally conformal Kähler manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1980. V. 262, N2. P. 533-542.
8. Vaisman I. Some curvature properties of locally conformal Kähler manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1980. V. 259, N2. P. 439-447.

УДК 513.73

А.С.ГРИЦАНС

Московский госпединститут им. В.И.Ленина

О НЕКОТОРЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ НА КИЛЛИНГОВЫХ f-МНОГООБРАЗИЯХ

Сформулирован ряд результатов об интегрируемости фундаментальных распределений метрической f-структуры, структурный оператор которой является тензором Киллинга.

The integrability problem of the fundamental distributions of metric f-structure whose structure operator is Killing tensor is considered.

В статье показано, что первое фундаментальное распределение киллингова f-многообразия вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда оно вполне геодезическое, а второе фундаментальное распределение этого многообразия является вполне интегрируемым и вполне геодезическим.

Рассмотрим гладкое многообразие M и пусть $\mathfrak{X}(M)$ - модуль гладких векторных полей на M. Все многообразия, тензорные поля и другие объекты будем предполагать гладкими класса C^{∞}.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. f-структурой на M называется тензорное поле типа (I.I) на M, такое, что $f^3+f=0$ [I]. Многообразие, снабженное f-структурой, называется f-многообразием, а оператор f-оператором структуры.

Пусть M - f-многообразие. Положим $l=-f^2$, $m=f^2+id$, где id - тождественный оператор на M. Ясно, что $l^2=l$, $m^2=m$, $l+m=id$, т.е. l и m - взаимно дополнительные проекторы. Легко показать, что $\operatorname{Im} m=\operatorname{Ker} f$. Значит, $\mathfrak{X}(M)=\mathcal{L}\oplus\mathfrak{M}$, где $\mathcal{L}=\operatorname{Im} l=\operatorname{Ker} m$, $\mathfrak{M}=\operatorname{Im} m=\operatorname{Ker} l=\operatorname{Ker} f$. Распределения $\mathcal{L}$ и $\mathfrak{M}$ называются первым и вторым фундаментальными распределениями f-многообразия соответственно [2]. Так как $fl=lf$, то можно рассмотреть ограничение $\mathfrak{I}$ оператора f на $\mathcal{L}$. Имеем $f^2l=-l$, т.е. $\mathfrak{I}$ - оператор почти комплексной структуры на $\mathcal{L}$. Пусть $\dim\mathcal{L}=2n$, $\dim\mathfrak{M}=r$. Число r называется рангом f-структуры.

Понятие f-структуры ранга 0 совпадает с понятием почти комплексной структуры, а понятие f-структуры ранга 1 с фиксированным базисным элементом $\xi\in\mathfrak{M}$ - с понятием почти контактной структуры [3].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. f-структура на M называется метрической, если на M задана риманова метрика $g=\langle\, ,\,\rangle$, такая, что выполнено условие $-\langle fX,Y\rangle=\langle X,fY\rangle$ $\forall X,Y\in\mathfrak{X}(M)$.

Очевидно, что распределения $\mathcal{L}$ и $\mathfrak{M}$ взаимно ортогональны. Многообразие с фиксированной метрической f-структурой называется метрическим f-многообразием.

Так как $\langle\mathfrak{I}X,\mathfrak{I}Y\rangle=\langle X,Y\rangle$ $\forall X,Y\in\mathcal{L}$, то $\{\mathfrak{I},\langle\, ,\,\rangle|_{\mathcal{L}}\}$ - почти эрмитова структура на $\mathcal{L}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Фундаментальной формой метрической f-структуры называется тензор

$$\Omega(X,Y)=\langle X,fY\rangle \quad (X,Y\in\mathfrak{X}(M)).$$

Легко проверить, что Ω есть 2-форма на M.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Метрическая f-структура называется Nkf-структурой (приближенно келеровой f-структурой или киллинговой

f-структурой) [2], если фундаментальная форма метрической f-структуры является формой Киллинга, т.е. $\nabla\Omega = d\Omega$, где ∇ – оператор ковариантного дифференцирования относительно римановой связности на M; d – оператор внешнего дифференцирования. Понятие киллинговой f-структуры ранга 0 совпадает с понятием приближенно келеровой структуры [4], а понятие киллинговой f-структуры ранга I с фиксированным базисным элементом $\xi \in \mathfrak{M}$ – с понятием слабо косимплектической структуры [5].

Известно [I], что задание метрической f-структуры на многообразии M равносильно заданию G-структуры на M со структурной группой $U(n,\mathbb{C})\times O(r,\mathbb{R})$. Элементами этой G-структуры являются реперы, первые $2n$ векторов которых образуют А-базис [4] пространства $\mathcal{L}_p$ ($p\in M$), а остальные r векторов – ортонормированный базис пространства $\mathfrak{M}_p$. Будем говорить, что элементы этой G-структуры адаптированы метрической f-структуре соответствующего касательного пространства, и называть их А-реперами [2].

Пусть $\{\omega^i_j\}$ – составляющие формы римановой связности на M, а $\{\omega^i\}$ – составляющие формы смещения; индексы пробегают следующие значения: $a,b,c,d=\overline{1,n}$; $\hat{a}=a+n$; $\alpha,\beta,\gamma=\overline{2n+1,2n+r}$; $i,j,k=\overline{1,2n+r}$. Можно проверить, что первая группа структурных уравнений Картана киллинговой f-структуры имеет вид

$$\begin{aligned} d\omega^a &= \omega^a_b\wedge\omega^b + B^{abc}\omega_b\wedge\omega_c + B^{ab}{}_{\alpha}\,\omega_b\wedge\omega^\alpha,\\ d\omega_a &= -\omega^b_a\wedge\omega_b + B_{abc}\,\omega^b\wedge\omega^c + B_{ab\alpha}\,\omega^b\wedge\omega^\alpha,\\ d\omega^\alpha &= \omega^\alpha_\beta\wedge\omega^\beta + B^{\alpha ab}\omega_a\wedge\omega_b + B^{\alpha}{}_{ab}\,\omega^a\wedge\omega^b, \end{aligned} \tag{I}$$

где

$$\omega_a=\bar{\omega}^a,\quad \omega^\alpha=\bar{\omega}^\alpha,\quad \omega^a_b=-\bar{\omega}^b_a,\quad \omega^\alpha_\beta=\bar{\omega}^\alpha_\beta, \tag{2}$$

$$B_{abc}=\bar{B}^{abc},\quad B_{ab\alpha}=\bar{B}^{ab}{}_{\alpha},\quad B^{\alpha ab}=\frac{2}{3}B^{ab}{}_{\alpha},\quad B^{\alpha}{}_{ab}=\frac{2}{3}B_{ab\alpha};$$

$\{B^{abc}\}$, $\{B_{abc}\}$ – системы функций на пространстве расслоения А-реперов над M, кососимметрические по всем индексам; $\{B^{ab}{}_{\alpha}\}$, $\{B_{ab\alpha}\}$, $\{B^{\alpha ab}\}$, $\{B^{\alpha}{}_{ab}\}$ – системы функций на пространстве расслоения А-реперов над M, кососимметрические по индексам a и b.

Продолжая внешним образом (I), получим вторую группу структурных уравнений Картана киллинговой f-структуры:

$$d\omega^a_b = \omega^a_c \wedge \omega^c_b + (2B^{ach}B_{hbd} + B^{ac}{}_\alpha B^\alpha{}_{bd} + A^{ac}_{bd})\omega^d \wedge \omega_c + B^{ah}{}_\alpha B_{hb\beta}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta, \tag{3}$$

$$d\omega^\alpha_\beta = \omega^\alpha_\gamma \wedge \omega^\gamma_\beta - 2(B^{ch}{}_\beta B^\alpha{}_{hb} - B^{\alpha ch}B_{hb\beta})\omega_c \wedge \omega^b + \frac{1}{2}R^\alpha_{\beta\gamma\delta}\omega^\gamma \wedge \omega^\delta,$$

где $\{A^{ac}_{bd}\}$, $\{R^\alpha_{\beta\gamma\delta}\}$ - системы функций на пространстве G-структуры, причем

$$A^{[ac]}_{bd} = A^{ac}_{[bd]} = 0, \quad \bar{A}^{bd}_{ac} = A^{ac}_{bd}, \tag{4}$$

$$\bar{R}^\alpha_{\beta\gamma\delta} = R^\alpha_{\beta\gamma\delta}, \quad R^\alpha_{[\beta\gamma\delta]} = 0, \quad R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = -R^\beta_{\alpha\gamma\delta}, \quad R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = -R^\alpha_{\beta\delta\gamma}.$$

Система Пфаффа первого фундаментального распределения $\mathcal{L}$ имеет вид

$$\omega^\alpha = 0. \tag{5}$$

Дифференцируя внешним образом (5), с учетом (I), находим, что функции $-B^\alpha{}_{ab}$, $-B^{\alpha ab}$ определяют вторые тензоры распределения $\mathcal{L}$. Из (2) следует, что $\mathcal{L}$ будет вполне интегрируемым тогда и только тогда, когда эти функции обращаются в ноль, т.е. когда распределение $\mathcal{L}$ - вполне геодезическое. В этом случае из (I)-(5) получим структурные уравнения слоев распределения $\mathcal{L}$:

$$d\omega^a = \omega^a_b \wedge \omega^b + B^{abc}\omega_b \wedge \omega_c,$$

$$d\omega_a = -\omega^b_a \wedge \omega_b + B_{abc}\omega^b \wedge \omega^c,$$

$$d\omega^a_b = \omega^a_c \wedge \omega^c_b + (2B^{ach}B_{hbd} + A^{ac}_{bd})\omega^d \wedge \omega_c.$$

Значит слои распределения $\mathcal{L}$ несут естественным образом индуцированную приближенно келерову структуру. Доказана

ТЕОРЕМА I. Первое фундаментальное распределение киллингова f-многообразия вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда оно является вполне геодезическим. В этом случае его интегральные многообразия являются вполне геодезическими подмногообразиями исходного многообразия и несут естественно индуцированную приближенно келерову структуру.

ЗАМЕЧАНИЕ. В 2 доказано, что в случае, когда M является строго приближенно келеровым f-многообразием максимального ранга, первое фундаментальное распределение всегда инволютивно.

Система Пфаффа второго фундаментального распределения имеет вид

$$\omega^a = 0, \quad \omega_a = 0. \tag{6}$$

Дифференцируя внешним образом (6), с учетом (I), находим, что вторые тензоры распределения $\mathfrak{M}$ равны нулю и, следовательно, $\mathfrak{M}$ определяет вполне геодезическое слоение на M. Из (I)-(4), (6) следует, что слои распределения $\mathfrak{M}$ имеют структурные уравнения

$$d\omega^\alpha = \omega^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta, \qquad d\omega^\alpha_\beta = \omega^\alpha_\gamma \wedge \omega^\gamma_\beta + \frac{1}{2} R^\alpha_{\beta\gamma\delta}\, \omega^\gamma \wedge \omega^\delta.$$

Значит слои распределения $\mathfrak{M}$ являются римановыми многообразиями с тензором кривизны $R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$. Доказана

ТЕОРЕМА 2. Второе фундаментальное распределение киллингова f-многообразия является вполне интегрируемым и вполне геодезическим.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Yano K. On a structure defined by a tensor field f of type (1,1) satisfying $f^3+f=0$ // Tensor. 1963. V. 27. P. 99-109.

2. Кириченко В.Ф. Локальная структура строго приближенно келеровых f-многообразий // Дифференциальная геометрия. Саратов, 198I. С.43-48.

3. Yano K., Kon M. Structures on manifolds. Singapore, 1984.

4. Кириченко В.Ф. Дифференциальная геометрия К-пространств // Итоги науки и техники. Сер. Проблемы геометрии / ВИНИТИ АН СССР. М., 1977. Т.8. С.I39-I6I.

5. Кириченко В.Ф. Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий // Итоги науки и техники. Сер. Проблемы геометрии / ВИНИТИ АН СССР. М., 1986. Т.I8. С.25-7I.

СОДЕРЖАНИЕ