ная геометрия многообразий фигур:Межвуз.темат.сб.науч .тр./ Калинингр.ун-т.Калининград,1987.Вып.18.С.21-24.

2.Гребенюк М.Ф. Фокальные многообразия,ассоциированные с $H(M(\Lambda))$ -распределением аффинного пространства//Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Межвуз. темат.сб.науч . тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1988.Вып.19.С.25-30.

3.Норден А.П.,Тимофеев Г.Н. Инвариантные признаки специальных композиций многомерных пространств//Изв.вузов. Математика.1972.№8.С.81-89.

4.Широков А.П. Структуры на дифференцируемых многообразиях//Алгебра.Топология.Геометрия,1967/ ВИНИТИ.М.,1969. С.127-188.

УДК 514.75

К ГЕОМЕТРИИ СЕМЕЙСТВА СРЕДНИХ НОРМАЛЕЙ ПОВЕРХНОСТИ $V_p \subset E_n$

А.С.Грицанс
(МГПИ им.В.И.Ленина)

В работе изучаются двумерные линейчатые поверхности V_2, образованные средними нормалями поверхности $V_p \subset E_n$. Данная работа является обобщением работы [3].

1.Рассмотрим поверхность $V_p \subset E_n$ и отнесем ее к подвижному реперу $R = \{x, \vec{e}_i, \vec{e}_\alpha\}$ $(i,j,k = \overline{1,p};\ \alpha,\beta = \overline{p+1,n})$, где x – точка на поверхности V_p, орты $\vec{e}_i$ лежат в касательной плоскости $T_p(x)$ к V_p, а векторы $\vec{e}_\alpha$ образуют ортонормированный базис нормального пространства $N_{n-p}(x)$ поверхности V_p. Вектор $\vec{e}_0 = \vec{e}_{p+s+1}$ $(0 \le s \le p$, s -фиксировано) направим параллельно вектору средней кривизны поверхности V_p [1]: $\vec{M} = \frac{1}{p}\gamma^{ij} b^\alpha_{ij}\vec{e}_\alpha$, который в силу неминимальности V_p ненулевой.

Деривационные формулы репера R имеют вид $d\vec{x} = \omega^i\vec{e}_i$, $d\vec{e}_i = \omega^j_i\vec{e}_j + \omega^\alpha_i\vec{e}_\alpha$, $d\vec{e}_\alpha = \omega^i_\alpha\vec{e}_i + \omega^\beta_\alpha\vec{e}_\beta$. Продолжая систему уравнений $\omega^\alpha = 0$ поверхности V_p, получим $\omega^\alpha_i = b^\alpha_{ij}\omega^j$, $b^\alpha_{ij} = b^\alpha_{ji}$. Встречающиеся в дальнейшем индексы будут принимать следующие значения: $\hat{i},\hat{j} = \overline{0,p}$; $\hat{\alpha},\hat{\beta} = p+1,\dots,p+s,p+s+2,\dots,n$. Впредь во всех формулах вместо индекса $p+s+1$ будем писать 0.

Средние нормали поверхности V_p образуют $(p+1)$-мерную

линейчатую поверхность V_{p+1}, уравнение которой

$$\vec{R} = \vec{x} + t\vec{e}_0 \qquad (1)$$

Дифференцируя (1), находим

$$d\vec{R} = \Omega^{\hat{i}}\vec{E}_{\hat{i}},\ \Omega^0 = dt,\ \Omega^i = \omega^i,\ \vec{E}_0 = \vec{e}_0,\ \vec{E}_i = \vec{e}_i + t\vec{a}_i,$$
$$d\vec{e}_0 = \vec{a}_i\omega^i,\ \ \vec{a}_i = -\gamma^{jk} b^0_{ki}\vec{e}_j + \varepsilon^{\hat{\alpha}}_i\vec{e}_{\hat{\alpha}},\ \ \bar{\gamma}_{ij} = \vec{a}_i\vec{a}_j, \qquad (2)$$
$$\gamma_{ij} = \vec{e}_i\vec{e}_j,\ \ \gamma^{jk}\gamma_{ki} = \delta^j_i,\ \ \omega^{\hat{\alpha}}_0 = \varepsilon^{\hat{\alpha}}_k\omega^k,\ \ \varepsilon^{\hat{\alpha}}_k = \frac{\gamma^{ij} b^{\hat{\alpha}}_{ijk}}{\gamma^{ij} b^0_{ij}}$$

В дальнейшем будем предполагать, что $\dim \mathcal{N} = p$, где $\mathcal{N} = [\vec{a}_i]$ – касательное направление гиперсферического изображения $\overline{V}_p: \vec{x} = \vec{e}_0$ поверхности V_{p+1} [2].

Пространство $\mathcal{M} = [R, \vec{e}_0, \vec{E}_i, \vec{a}_j]$ называется касательным пространством вдоль образующей поверхности V_{p+1} и является наименьшим пространством, содержащим все касательные плоскости поверхности V_{p+1} в точках одной образующей [2].

Площадка $\widetilde{\Delta}_r(x)$, порождающая распределение $\widetilde{\Delta}_r$, вдоль которого переносится параллельно в нормальной связности направление вектора средней кривизны, определяется системой $\varepsilon^{\hat{\alpha}}_k\omega^k = 0$. Легко доказать следующее утверждение.

Теорема 1. Касательное пространство $\mathcal{M}$ вдоль образующей поверхности V_{p+1} имеет размерность $p+s+1$ $(0 \le s \le p)$ тогда и только тогда, когда $\dim \widetilde{\Delta}_r = p-s$

2.Линейчатая подповерхность $V_2 \subset V_{p+1}$ называется псевдоторсом (подповерхностью нулевого внешнего параметра распределения, торсом), если параметр распределения $\tilde{p}$ (соответственно $\hat{p}, p$) равен нулю [2]. В нашем случае

$$\tilde{p}^2 = \frac{\bar{\varphi}\theta - (\varphi^0)^2}{\bar{\varphi}^2},\quad \hat{p}^2 = \frac{\varphi - \theta}{\bar{\varphi}},\quad p^2 = \frac{\varphi\bar{\varphi} - (\varphi^0)^2}{\bar{\varphi}^2},$$
$$p^2 = \tilde{p}^2 + \hat{p}^2,\quad \varphi = \gamma_{ij}\omega^i\omega^j,\quad \bar{\varphi} = \bar{\gamma}_{ij}\omega^i\omega^j,$$
$$\varphi^0 = b^0_{ij}\omega^i\omega^j,\quad \theta = b^0_{ik} b^0_{jr}\bar{\gamma}^{kr}\omega^i\omega^j,\quad \bar{\gamma}^{jk}\bar{\gamma}_{ki} = \delta^j_i.$$

Рассмотрим некоторую линию ℓ на поверхности V_p и вектор $\vec{e}_{i_0}$ направим по касательной к линии ℓ. Тогда уравнение линии ℓ: $\omega^{i_0} \ne 0$, $\omega^j = 0$ $(j \ne i_0)$.

Теорема 2. Следующие утверждения равносильны:
1) Средние нормали описывают псевдоторсы вдоль линии ℓ;
2) $\vec{e}_{i_0}\vec{A}^j = 0$ $(j \ne i_0)$, где $\vec{A}^j = \bar{\gamma}^{jk}\vec{a}_k$;

3) $\bar{\gamma}_{i_0 i_0} b^{0}_{i_0 k} b^{0}_{i_0 r} \bar{\gamma}^{kr} - (b^{0}_{i_0 i_0})^2 = 0$.

Т е о р е м а 3. Следующие утверждения равносильны: I) Средние нормали описывают подповерхности нулевого внешнего параметра распределения вдоль линии ℓ ; 2) $\vec{e}_{i_0} \in \mathcal{N}$; 3) $b^{0}_{i_0 k} b^{0}_{i_0 r} \bar{\gamma}^{kr} = 1$.

Т е о р е м а 4. Следующие утверждения равносильны: I) Средние нормали описывают торсы вдоль линии ℓ ; 2) $\vec{e}_{i_0}$ является нормальным вектором гиперплоскости $\Pi^{i_0} = [\vec{A}^1, \ldots, \vec{A}^{i_0-1}, \vec{A}^{i_0+1}, \ldots, \vec{A}^p]$ в пространстве $\mathcal{N}$; 3)Касательный вектор $\vec{e}_{i_0}$ к линии ℓ параллелен своему гиперсферическому изображению $\vec{a}_{i_0}$,т.е.$\vec{e}_{i_0} \parallel \vec{a}_{i_0}$; 4) $\bar{\gamma}_{i_0 i_0} - (b^{0}_{i_0 i_0})^2 = 0$.

3.Пусть средние нормали описывают торсы вдоль линии ℓ : $\omega^{i_0} \neq 0, \omega^{j} = 0 \ (j \neq i_0)$. Тогда $\vec{e}_{i_0} \parallel \vec{a}_{i_0}$,откуда и из (2) получим

$$\lambda = -\gamma^{i_0 k} b^{0}_{k i_0} \neq 0, \ \gamma^{jk} b^{0}_{k i_0} = 0 \ (j \neq i_0), \ \xi^{\hat{\alpha}}_{i_0} = 0, \ \vec{a}_{i_0} = \lambda \vec{e}_{i_0}. \qquad (3)$$

Рассмотрим проекцию вектора

$$d\vec{M} = m^0 \omega^i_0 \vec{e}_i + m^0 \xi^{\hat{\alpha}}_k \omega^k \vec{e}_{\hat{\alpha}} + \frac{1}{p} \gamma^{ij} b^{0}_{ijk} \omega^k \vec{e}_0,$$

где $m^0 = \frac{1}{p} \gamma^{ij} b^{0}_{ij} \neq 0 \quad \omega^i_0 = -\gamma^{ik} b^{0}_{kj} \omega^j$,на касательную плоскость $T_{p(x)}$ в направлении линии ℓ :

$$\overrightarrow{\Pi p}_{T_{p(x)}} d\vec{M} = -m^0 \gamma^{ik} b^{0}_{kj} \omega^j \vec{e}_i = \mu \omega^{i_0} \vec{e}_{i_0},$$

где $\mu = m^0 \lambda \neq 0$.Значит [1], ℓ-линия кривизны относительно средней нормали.

Обратно,если линия ℓ кривизны относительно средней нормали принадлежит распределению $\widetilde{\Delta}_r$,то имеют место формулы (3) . Из теоремы 4 заключаем,что средние нормали описывают торсы вдоль линии ℓ .Доказано следующее

С л е д с т в и е.Средние нормали описывают торсы вдоль линии ℓ на поверхности V_p тогда и только тогда ,когда ℓ - линия кривизны относительно средней нормали и $\ell \subset \widetilde{\Delta}_r$.

Заметим,что средние нормали могут описывать торсы только в случае $p - s > 0$ [2].

Библиографический список

I.Б а з ы л е в В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве//Лит.матем.сб./АН Лит.ССР.Вильнюс,1966.Т.6.№4. С.15-31.

2.Л у м и с т е Ю.Г.Многомерные линейчатые поверхности евклидова пространства//Матем.сб.М.,1961.Т.55.Вып.4.С.411-420.

3.Г р и ц а н с А.С. О семействе средних нормалей поверхности $V_2 \subset E_5$ // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз.темат.сб.науч .тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1986. Вып.17.С.21-25.

УДК 514.76

О РАССЛОЕНИИ $A_{n,m}$ $(n>m)$

Е.Т.И в л е в
(Томский политех. ин-т)

В статье изучаются некоторые поля инвариантных геометрических образов в аффинных слоях A_m расслоения $A_{n,m}$ $(n>m)$ с n-мерной базой M_n с заданным сечением и с заданной аффинной связностью C .Приводится пример аффинного расслоения $Q_{n,m}$ $(n>m)$ с аффинной связностью C ,который дает возможность изучить специальный вид геометрических образов,изученных в случае расслоения $A_{n,m}$ $(n>m)$.

Все построения в данной статье носят локальный характер, а функции,встречающиеся в статье,предполагаются аналитическими.

1.Рассматривается n-мерное гладкое многообразие M_n(класса C^∞ или C^ω) с базисными формами θ^i $(i,j,k,\ell = \overline{1,n})$,удовлетворяющими структурным уравнениям :

$$\mathcal{D}\theta^i = \theta^j \wedge \theta^i_j, \quad \mathcal{D}\theta^i_j = \theta^k_j \wedge \theta^i_k + \theta^\ell \wedge \theta^i_{\ell j}, \quad \theta^i_{[\ell j]} = 0. \qquad (1)$$

Обозначим $L^1_n = (M_n, L_n)$ -присоединенное расслоенное пространство с базой M_n и n-мерными центроаффинными слоями L_n. Здесь слой отнесен к аффинному реперу $E = \{\bar{A}, \bar{e}_i\}$ с деривационными формулами и структурными уравнениями:

$$d\bar{e}_i = \bar{\theta}^j_i \bar{e}_j, \quad \bar{\theta}^j_i = \theta^j_i \Big|_{\theta^\ell = 0}, \quad \mathcal{D}\bar{\theta}^j_i = \bar{\theta}^k_i \wedge \bar{\theta}^j_k$$

и изоморфен касательному пространству $T_n(u)$ к M_n в точке (u) , причем первые интегралы линейно независимых форм θ^i соответствуют главным параметрам $u^1, u^2, \ldots, u^n$ точки $(u) \in M_n$. Заметим, что L_n является представлением дифференциальной группы $\mathcal{D}^1_n$ первого порядка в смысле [1 , с.162-165].