$$\nabla_\delta p_{p,n+1} - \Lambda_{pi}\pi^i_{n+1} - \Lambda_{p\alpha}\pi^\alpha_{n+1} - a_{pq}\pi^q_{n+1} = 0,$$

$$\nabla_\delta p_{i,n+1} - \Lambda_{pi}\pi^p_{n+1} - a_{ij}\pi^j_{n+1} + \frac{1}{2}(M_{i\alpha} + H_{\alpha i})\pi^\alpha_{n+1} = 0,$$

$$\nabla_\delta p_{\alpha,n+1} - p_{i,n+1}\pi^i_\alpha - \Lambda_{p\alpha}\pi^p_{n+1} - a_{\alpha\beta}\pi^\beta_{n+1} - \frac{1}{2}(M_{i\alpha} + H_{\alpha i})\pi^i_{n+1} = 0,$$

$$\delta p_{n+1,n+1} - p_{n+1,n+1}\pi^{n+1}_{n+1} - 2p_{p,n+1}\pi^p_{n+1} - 2p_{i,n+1}\pi^i_{n+1} - 2p_{\alpha,n+1}\pi^\alpha_{n+1} = 0.$$

2. Уравнение соприкасающейся гиперквадрики Q_n относительно некоторого локального репера имеет вид:

$$A_{JK}x^J x^K + 2A_J x^J + A = 0, \quad A_{JK} = A_{KJ}.$$

С помощью построенных объектов получено два поля инвариантных соприкасающихся гиперквадрик распределения $\mathcal{H}(M(\Lambda))$, уравнения которых записываются в виде:

$$a_{pq}x^p x^q + 2\Lambda_{pi}x^p x^i + 2\Lambda_{p\alpha}x^p x^\alpha + 2d_{p,n+1}x^p x^{n+1} + (M_{i\alpha} + H_{\alpha i})x^i x^\alpha +$$
$$+ 2d_{i,n+1}x^i x^{n+1} + 2d_{\alpha,n+1}x^\alpha x^{n+1} + a_{ij}x^i x^j + a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta + (d_{n+1,n+1} + \sigma\hat{B})x^{n+1}x^{n+1} - 2x^{n+1} = 0,$$

$$a_{pq}x^p x^q + 2\Lambda_{pi}x^p x^i + 2\Lambda_{p\alpha}x^p x^\alpha + 2p_{p,n+1}x^p x^{n+1} + (M_{i\alpha} + H_{\alpha i})x^i x^\alpha + 2p_{i,n+1}x^i x^{n+1} +$$
$$+ 2p_{\alpha,n+1}x^\alpha x^{n+1} + a_{ij}x^i x^j + a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta + (p_{n+1,n+1} + \sigma\hat{B})x^{n+1}x^{n+1} - 2x^{n+1} = 0,$$

где σ – некоторый инвариантный параметр.

Библиографический список

1. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Моск. математ. о-ва. М., 1953. Т. 2. С. 275-382.

2. Ю ш к е в и ч Т.Н. К геометрии аффинного трехсоставного распределения $\mathcal{H}(M(\Lambda))$ // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1986. Вып. 17. С. 114-117.

УДК 514.75

О p-ПОВЕРХНОСТЯХ В E_n С ОБЩИМ СЕМЕЙСТВОМ СРЕДНИХ НОРМАЛЕЙ

А.С. Г р и ц а н с
(Даугавпилсский пединститут)

В работе изучаются свойства однопараметрического семейства p-мерных поверхностей в E_n с общим семейством средних нормалей.

Линейчатая поверхность V_{p+1} называется нормальной [2], если она обладает p-мерной подповерхностью V_p, ортогонально пересекающей все образующие. Если уравнение V_p есть $\vec{x} = \vec{x}(v^1, \dots, v^p)$, то и поверхности $\hat{V}_p$: $\vec{y} = \vec{x} + t\vec{e}_0$, $t = \mathrm{const}$, где $\vec{e}_0$ – направляющий орт образующей, будут ортогональны образующим. Отнесем поверхность $V_p \subset E_n$ к подвижному реперу $\{x, \vec{e}_i, \vec{e}_\alpha\}$ ($i,j = \overline{1,p}$; $\alpha,\beta = \overline{p+1,n}$), где орты $\vec{e}_i$ принадлежат касательной плоскости $T_p(x)$ к V_p, а векторы $\vec{e}_\alpha$ образуют ортонормированный базис нормального пространства $N_{n-p}(x)$ поверхности V_p. Следовательно, $\vec{e}_0$ можно включить в репер поверхности V_p. Деривационные формулы репера имеют вид: $d\vec{x} = \omega^i\vec{e}_i$, $d\vec{e}_i = \omega^j_i\vec{e}_j + \omega^\alpha_i\vec{e}_\alpha$, $d\vec{e}_\alpha = \omega^i_\alpha\vec{e}_i + \omega^\beta_\alpha\vec{e}_\beta$. Продолжая систему уравнений $\omega^\alpha = 0$ поверхности V_p, получим $\omega^\alpha_i = b^\alpha_{ij}\omega^j$, $b^\alpha_{ij} = b^\alpha_{ji}$. Уравнение поверхности V_{p+1} можно записать в виде

$$\vec{R} = \vec{x} + t\vec{e}_0. \tag{1}$$

Дифференцируя (1), находим $d\vec{R} = \Omega^{\hat{i}}\vec{E}_{\hat{i}}$, $\Omega^0 = dt$, $\Omega^i = \omega^i$, $\vec{E}_0 = \vec{e}_0$, $\vec{E}_i = \vec{e}_i + t\vec{a}_i$, $d\vec{e}_0 = \vec{a}_i\omega^i$ ($\hat{i},\hat{j} = 0,1,\dots,p$). В дальнейшем предполагается, что $\vec{a}_i$ – линейно независимы. Компоненты метрического тензора $G_{\hat{i}\hat{j}} = \vec{E}_{\hat{i}}\vec{E}_{\hat{j}}$ поверхности V_{p+1} имеют вид:

$$G_{00} = 1, \quad G_{0i} = G_{i0} = 0, \quad G_{ij} = \gamma_{ij} - 2tb^0_{ij} + t^2\bar{\gamma}_{ij}, \quad G^{00} = \frac{1}{G}, \quad G^{0i} = G^{i0} = 0,$$

$$G^{ij} = \frac{1}{G}A^{ij}_v t^v \quad (u,v = 0,1,\dots,2p-2), \quad A^{ij}_0 = \gamma\gamma^{ij}, \dots, A^{ij}_{2p-2} = \bar{\gamma}\bar{\gamma}^{ij},$$

и $\gamma, \bar\gamma, G$ являются дискриминантами метрических тензоров $\gamma_{ij}, \bar\gamma_{ij}, G_{\hat i\hat j}$ поверхностей V_p, $\bar V_p$, V_{p+1} соответственно, где $\bar V_p$ -гиперсферический образ поверхности V_{p+1} [2].

Пусть $\vec\varepsilon_{\hat\alpha}$ $(\hat\alpha,\hat\beta=\overline{p+2,n})$ есть взаимно ортогональные нормальные орты поверхности V_{p+1}, тогда асимптотические формы поверхности V_{p+1} имеют вид:

$$\Phi^{\hat\alpha} = d^2\vec R\,\vec\varepsilon_{\hat\alpha} = B^{\hat\alpha}_{ij}\omega^i\omega^j + 2B^{\hat\alpha}_{0i}\,dt\,\omega^i.$$

Находим вектор средней кривизны поверхности V_{p+1} [1]:

$$\vec M(V_{p+1}) = \frac{1}{p+1}G^{\hat i\hat j}B^{\hat\alpha}_{\hat i\hat j}\vec\varepsilon_{\hat\alpha} = \frac{1}{p+1}G^{ij}B^{\hat\alpha}_{ij}\vec\varepsilon_{\hat\alpha}.$$

Так как

$$d\vec y = d\vec R\big|_{t=c} = \vec F_i\omega^i,\quad \vec F_i = \vec E_i\big|_{t=c},$$

то

$$\vec f = \vec e_0,\quad \vec f_{\hat\alpha} = \vec\varepsilon_{\hat\alpha}\big|_{t=c}$$

являются нормальными ортами поверхности $\hat V_p$.

Компоненты метрического тензора $F_{ij}=\vec F_i\vec F_j$ и асимптотические формы поверхности V_p определяются формулами:

$$F_{ij} = G_{ij}\big|_{t=c},\quad F^{ij}=G^{ij}\big|_{t=c},$$

$$\hat\Phi^{\hat\alpha} = \Phi^{\hat\alpha}\big|_{t=c} = \hat B^{\hat\alpha}_{ij}\omega^i\omega^j,\quad \hat B^{\hat\alpha}_{ij} = B^{\hat\alpha}_{ij}\big|_{t=c},$$

$$\hat\Phi^0 = d^2\vec y\,\vec e_0 = \hat B^0_{ij}\omega^i\omega^j,\quad \hat B^0_{ij} = (b^0_{ij}+t\bar b^0_{ij})\big|_{t=c},$$

$$d^2\vec x\,\vec e_0 = b^0_{ij}\omega^i\omega^j,\qquad d^2\vec e_0\vec e_0 = \bar b^0_{ij}\omega^i\omega^j.$$

Вектор средней кривизны поверхности $\hat V_p$:

$$\vec M(\hat V_p) = \frac1p F^{ij}\hat B^0_{ij}\vec f_0 + \frac1p F^{ij}\hat B^{\hat\alpha}_{ij}\vec f_{\hat\alpha} = \hat M^0\vec e_0 + \frac{p+1}{p}\vec M(V_{p+1})\big|_{t=c},$$

$$\hat M^0 = \frac1G(\gamma m^0+\ldots+\bar\gamma\bar m^0 t^{2p-1})\big|_{t=c},\quad m^0=\frac1p\gamma^{ij}b^0_{ij},\quad \bar m^0 = \frac1p\bar\gamma^{ij}\bar b^0_{ij}.$$

Пусть $\vec M(V_{p+1})=\vec 0$, тогда $\vec M(V_p) = \hat M^0\vec e_0$.

Если $\hat M^0\ne 0$, то $\vec M(\hat V_p)\parallel\vec e_0$, т.е. средние нормали поверхностей $\hat V_p$ совпадают с образующими поверхности V_{p+1}.

Так как $\bar m^0\ne 0$, то уравнение $\gamma m^0+\ldots+\bar\gamma\bar m^0 t^{2p-1}=0$ имеет степень $2p-1$, и, следовательно, число минимальных поверхностей $\hat V_p$ в точках одной образующей не более чем $2p-1$.

Обратно, если $\vec M(\hat V_p)\parallel\vec e_0$ для различных параметров t, то $\vec M(V_{p+1})=\vec 0$, т.е. V_{p+1} -минимальная поверхность.

Т е о р е м а 1. Нормальная линейчатая поверхность V_{p+1} минимальна тогда и только тогда, когда она образована средними нормалями однопараметрического семейства поверхностей V_p, причем число минимальных поверхностей $\hat V_p$ в точках одной образующей не более чем $2p-1$.

Аналогично доказательству теоремы 1 можно доказать следующую теорему.

Т е о р е м а 2. Если $\vec M(V_{p+1})=\vec 0$ в точках подповерхности V_p, то либо V_p минимальна, либо V_{p+1} образована средними нормалями поверхности V_p. Обратно, если V_{p+1} образована средними нормалями подповерхности V_p, то $\vec M(V_{p+1})=\vec 0$ в точках подповерхности V_p.

Библиографический список

1. Б а з ы л е в В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве // Лит. мат.сб./ АН Лит.ССР.Вильнюс,1966.Т.6. № 4.С.15-31.

2. Л у м и с т е Ю.Г. Многомерные линейчатые поверхности евклидова пространства Матем.сб.М.,1961.Т.55 (97).Вып.4. С. 411-420.