Непрерывные функции на топологических пространствах.
Рига. 1986.

УДК 517.91; 517.98

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ $\frac{dx}{dt}=Ax$ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А.С.Грицанс
Даугавпилсский педагогический институт
им.Я.Калнберзина

В статье рассматривается задача Коши для дифференциального уравнения $\frac{dx}{dt}=Ax$ в банаховом пространстве, если A - плоский или k-плоский оператор. Случай конечномерного пространства, когда A - линейный оператор, хорошо изучен (см., например, [1] , [2] , [3]). Если A - непрерывный оператор в банаховом пространстве, то решение уравнения $\frac{dx}{dt}=Ax$ выражается через ряд экспоненты (см., например, [3] , [4]), практическое нахождение которого может оказаться очень сложным. Поэтому возникает вопрос, когда решение уравнения $\frac{dx}{dt}=Ax$ можно получить как результат конечного числа операций над оператором A. Оказывается, что в случае плоского и k-плоского операторов решение уравнения получается с помощью некоторого многочлена от оператора A т.е. с помощью конечного числа операций над A. В статье также показывается, что функцию непрерывного k-плоского оператора, определенную как сумму степенного ряда, можно выразить в виде некоторого многочлена от оператора A.

Прежде чем непосредственно перейти к дифференциальному уравнению, кратко напомним понятия плоского и k-плоского операторов, которые введены в работе [5] .

Линейный оператор A, действующий в векторном пространстве X, называется плоским, если для каждого $x\in X$ последовательность векторов

$$x, Ax, \dots, A^k x \tag{1}$$

линейно зависима при некотором k (k, вообще говоря, зависит от x).

Линейный оператор A называется k-плоским, если существует k такое, что для каждого $x \in X$ система (I) линейно зависима и существует $y \in X$ такой, что последовательность $y, Ay, \ldots, A^{k-1}y$ линейно независима. В этом случае существует единственный, с точностью до числового множителя, многочлен $\varphi(\lambda)$ степени k такой, что

$$\varphi(A)x = 0 \quad \forall x \in X. \tag{2}$$

§I. Плоский оператор в банаховом пространстве

Пусть E – банахово пространство и A – плоский оператор в нем. Найдем решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{3}$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0. \tag{4}$$

По условию существует такое k, что векторы $x_0, Ax_0, \ldots, A^{k-1}x_0$ линейно независимы, а $x_0, Ax_0, \ldots, A^k x_0$ – линейно зависимы. Следовательно, существует такой многочлен $P(\lambda)$ степени k, что

$$P(A)x_0 = 0. \tag{5}$$

Рассмотрим случай, когда $P(\lambda)$ имеет простые корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Построим многочлены

$$\omega_i(\lambda) = \frac{(\lambda-\lambda_1)\ldots(\lambda-\lambda_{i-1})\widehat{(\lambda-\lambda_i)}(\lambda-\lambda_{i+1})\ldots(\lambda-\lambda_k)}{(\lambda_i-\lambda_1)\ldots(\lambda_i-\lambda_{i-1})\widehat{(\lambda_i-\lambda_i)}(\lambda_i-\lambda_{i+1})\ldots(\lambda_i-\lambda_k)} \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

где значок $\wedge$ обозначает то, что соответствующий множитель опущен. Если введем обозначения $x_i = \omega_i(A)x_0 \neq 0$, то в силу (5) имеем $(A - \lambda_i I)x_i = 0$ и, следовательно,

$$Ax_i = \lambda_i x_i. \tag{6}$$

Покажем теперь, что

$$\sum_{j=1}^{k} \omega_j(\lambda) \equiv 1. \tag{7}$$

Рассмотрим $\Delta(\lambda) = \sum_{j=1}^{k} \omega_j(\lambda) - 1$, $\deg \Delta(\lambda) \leq k-1$ и $\Delta(\lambda_i) = 0$ при $i = 1, 2, \ldots, k$. Следовательно, $\Delta(\lambda) \equiv 0$, т.е. имеет место (7). Покажем, что

$$x(t) = \sum_{i=1}^{k} \omega_i(A)\exp(\lambda_i t)x_0 = \sum_{i=1}^{k} x_i \exp(\lambda_i t)$$

является решением задачи (3)-(4). Действительно,

$$x'(t) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \exp(\lambda_i t)x_0 \quad \text{и} \quad Ax(t) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \exp(\lambda_i t)$$

в силу (6). Кроме того, $x(0)=\left(\sum_{i=1}^{k}\omega_i(A)\right)x_0$ в силу (7).

В общем случае, когда $P(\lambda)$ имеет кратные корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ с кратностями $m_1, m_2, \dots, m_s$ соответственно, решение задачи (3)-(4) имеет вид

$$x(t)=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_i}x_{ij}(A)t^{j-1}\exp(\lambda_i t)=H(A)x_0, \tag{8}$$

где

$$x_{ij}=\frac{(A-\lambda_i I)^{j-1}}{(j-1)!}\,\frac{(A-\lambda_1 I)^{m_1}\dots\widehat{(A-\lambda_i I)^{m_i}}\dots(A-\lambda_s I)^{m_s}}{(\lambda_i-\lambda_1)^{m_1}\dots\widehat{(\lambda_i-\lambda_i)^{m_i}}\dots(\lambda_i-\lambda_s)^{m_s}}\sum_{p=0}^{m_i-j}\alpha_{ij}^{p}(A-\lambda_i I)^{p}x_0=$$

$$=y_{ij}(A)x_0 \quad \text{и} \quad \alpha_{ij}^{p}=\frac{1}{p!}\left[\frac{(\lambda_i-\lambda_1)^{m_1}\dots\widehat{(\lambda_i-\lambda_i)^{m_i}}\dots(\lambda_i-\lambda_s)^{m_s}}{(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\dots\widehat{(\lambda-\lambda_i)^{m_i}}\dots(\lambda-\lambda_s)^{m_s}}\right]^{(p)}_{\lambda=\lambda_i}$$

Функция $H(A)$ в решении (8) задачи (3)-(4), вообще говоря, зависит от начального условия (4).

§2. k-плоский оператор в банаховом пространстве

Пусть E – банахово пространство и A – k-плоский оператор в E. Найдем решение уравнения

$$\frac{dx}{dt}=Ax \tag{9}$$

с начальным условием

$$x(0)=x_0. \tag{10}$$

В этом случае существует многочлен $\varphi(\lambda)$ степени k такой, что $\varphi(A)x=0$ для каждого $x\in E$. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ – корни многочлена $\varphi(\lambda)$. Аналогично случаю плоского оператора, если корни простые, то можно показать, что $x(t)=\sum_{i=1}^{k}x_i\exp(\lambda_i t)$ является решением задачи (9)-(10). Нельзя только утверждать, что для каждого $i=1,2,\dots,k$ имеет место $x_i=\omega_i(A)x_0\neq 0$.

В общем случае решение задачи (9)-(10) можно записать в виде

$$x(t)=H(A)x_0. \tag{11}$$

В отличие от случая плоского оператора, решение (11) справедливо для любых начальных условий (10).

§3. Экспонента непрерывного k-плоского оператора

Полученное решение задачи (9)-(10) позволяет найти выражение экспоненты непрерывного k-плоского оператора через конечное число операций над оператором. Пусть A - непрерывный k-плоский оператор в банаховом пространстве. Решение задачи (9)-(I0) в силу k-плоскости оператора A имеет вид $x(t)=H(A)x_0$. С другой стороны, в силу непрерывности оператора A имеет место равенство $x(t)=\exp(At)x_0$, где экспонента $\exp A$ определена как сумма сходящегося ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}$. В силу единственности решения задачи (9)-(I0) получаем, что $H(A)x_0=\exp(At)x_0$ при любом x_0. По определению два оператора отождествляются, если их образы при любых одинаковых прообразах совпадают. Следовательно, при $t=1$ имеем

$$\exp A=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_i}y_{ij}(A)\exp\lambda_i.$$

§4. Функции непрерывного k-плоского оператора

В случае непрерывного k-плоского оператора можно определить понятие функции оператора, следуя схеме, изложенной в [I]. Пусть A - непрерывный k-плоский оператор в банаховом пространстве и $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_s$ - корни характеристического многочлена $\varphi(\lambda)$ оператора A с кратностями $m_1,m_2,\ldots,m_s$ соответственно. k чисел $f(\lambda_i),\ldots,f^{(m_i-1)}(\lambda_i)$, $i=1,2,\ldots,s$ называются значениями функции $f(\lambda)$ на спектре оператора A. Пусть $f(\lambda)$ определена на спектре оператора A. Функцией оператора A называется следующий многочлен от A:

$$f(A)=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_i}y_{ij}(A)f^{(j-1)}(\lambda_i). \tag{I3}$$

Отсюда следует, что две функции оператора A совпадают, если они совпадают на спектре оператора A.

<u>Теорема I</u>. Если последовательность функций $f_k(\lambda)$ сходится на спектре оператора A к функции $f(\lambda)$, то сходится и последовательность $f_k(A)$. При этом из существования пределов

$$\lim_{k\to\infty}f_k(\lambda_i)=f(\lambda_i),\ldots,\lim_{k\to\infty}f_k^{(m_i-1)}(\lambda_i)=f^{(m_i-1)}(\lambda_i),\quad i=1,\ldots,s \tag{I4}$$

следует равенство

$$\lim_{k\to\infty} f_k(A)=f(A). \tag{I5}$$

Доказательство немедленно следует из формулы

$$f_k(A)=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_i} y_{ij}(A) f_k^{(j-1)}(\lambda_i). \tag{I6}$$

Из формул (I6) и (I3) из (I4) следует (I5).

Теорема 2. Если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(\lambda)$ сходится на спектре оператора A, то сходится и ряд $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(A)$. При этом из равенств $f(\lambda_i)=\sum_{k=0}^{\infty} u_k(\lambda_i),\ldots, f^{(m_i-1)}(\lambda_i)=\sum_{k=0}^{\infty} u_k^{(m_i-1)}(\lambda_i)$, $i=1,2,\ldots,s$

следует равенство $f(A)=\sum_{k=0}^{\infty} u_k(A)$.

Доказательство вытекает из теоремы I.

Пусть $f(\lambda)$ - аналитическая в круге $L: |\lambda-\lambda_0|<R$ функция, т.е. $f(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(\lambda-\lambda_0)^k$ для каждого $\lambda\in L$. Из теоремы 2 следует

Теорема 3. Если характеристические числа оператора A лежат в L, то имеет место следующее разложение $f(A)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(A-\lambda_0 I)^k$ (характеристические числа оператора A - это корни характеристического многочлена $\varphi(\lambda)$).

Используя (I4) и теорему 3, получаем, что функцию оператора A, определенную некоторым степенным рядом, можно выразить как многочлен от оператора A, т.е. $f(A)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(A-\lambda_0 I)^k=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_i} y_{ij}(A) f^{(j-1)}(\lambda_i)$ как только $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_s$ лежат в круге сходимости ряда L.

Список литературы

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц.- М., I97I.- С.I03-I26.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения.- М., I982.- С.93-I02.
3. Шварц Л. Анализ.- М., I972.- Т.2.- С.58-66.
4. Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы.- М., I967.- С.I34-I35, I50-I5I.
5. Лопшиц А.М., Секацкий В.В. О плоском операторе в безразмерном пространстве// Учен.зап. Ярославского ГПИ.- I969.- Вып.64: Геометрия, 4.2.

Поступила I0 октября I984 года.