Этим инвариантом определяются два действительных инварианта пары ориентированных прямых. При этом одну из прямых (в силу однородности пространства $\mathcal{X}$) можно фиксировать, положив $y=\varepsilon_0=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, и в этом случае

$$f(x,y)=\operatorname{tr}(X\varepsilon_0)=\operatorname{tr}\left\{\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&-x_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right\}=2x_1\ ;\ x_1\in C.$$

Отметим случай, когда прямые лежат в плоскости Лобачевского, отличающийся тем, что матрица X -действительная. В этом и только в этом случае $\operatorname{tr}(xy)\in\mathbb{R}$. Это и будет необходимым и достаточным условием принадлежности двух ориентированных прямых одной плоскости пространства Лобачевского.

Оказывается, полученный нами инвариант, вообще говоря, точный. Однако точность имеет место только при ограничении этого инварианта на множестве пар непараллельных прямых (для параллельных прямых он равен единице). Доказательство точности основано на биективности отображения $\tilde{f}: X/_H \to \mathbb{R}$,т.е. два элемента x и x_1 ,имеющие одинаковые значения инварианта $(x,y_0)=(x_1,y_0)$ (y_0 фиксируется) , могут быть совмещены с помощью преобразования группы.

Библиографический список

1. Г е л ь ф а н д И.М., Граев М.И., Виленкин Н.Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. М.: Наука ,1962.

2. В е д е р н и к о в С.В. Специальные морфизмы G-пространств. Проблемы геометрии / ВИНИТИ АН СССР.- М.,1975.Т.7.С.49-68.

3. В е д е р н и к о в В.И., Ведерников С.В. Области симметрических пространств, порожденных группой $SL(2,C)$ // Тез.докл.Всесоюзн.конф. по неевклидовой геометрии "150 лет геометрии Лобачевского".-Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1976. С.41.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.17 1986

УДК 514.75

О СЕМЕЙСТВЕ СРЕДНИХ НОРМАЛЕЙ ПОВЕРХНОСТИ $V_2\subset E_5$.

А.С.Г р и ц а н с

В работе изучаются свойства двухпараметрического семейства средних нормалей поверхности $V_2\subset E_5$.

1. Отнесем поверхность $V_2\subset E_5$ к подвижному реперу $\{x,\vec{e}_i,\vec{e}_\alpha\}$ $(i,j,k=1,2;\ \alpha,\beta=3,4,5)$, где орты $\vec{e}_i$ принадлежат касательному пространству $T_2(x)$ к поверхности V_2 в точке $x\in V_2$,а векторы $\vec{e}_\alpha$ образуют ортонормированный базис нормальной плоскости $N_3(x)$ поверхности V_2.

Деривационные формулы репера имеют вид

$$d\vec{x}=\omega^i\vec{e}_i\ ,\ d\vec{e}_i=\omega_i^j\vec{e}_j+\omega_i^\alpha\vec{e}_\alpha\ ,\ d\vec{e}_\alpha=\omega_\alpha^i\vec{e}_i+\omega_\alpha^\beta\vec{e}_\beta\ .$$

Продолжая систему уравнений $\omega^\alpha=0$ нашей поверхности, получим:

$$\omega_i^\alpha=b_{ij}^\alpha\omega^j,\ \ b_{ij}^\alpha=b_{ji}^\alpha\ . \qquad (1)$$

Произведем канонизацию репера: векторы $\vec{e}_i$ направим по касательным к линиям кривизны относительно средней нормали, $\vec{e}_5,\vec{e}_3$ -параллельно средней нормали $[x,\vec{M}]$ и нормали $[x,\vec{b}_{12}]$ соответственно, где $\vec{b}_{12}=b_{12}^\alpha\vec{e}_\alpha$, а вектор $\vec{e}_4$-ортогонально ко всем предыдущим векторам [1]. В дальнейшем будем предполагать, что V_2 не минимальна и главная нормаль поверхности V_2 имеет максимально возможную размерность 3.

Канонизация репера налагает следующие условия на компоненты вторых тензоров:

$$b_{12}^3\neq0,\ b_{11}^4\neq0,\ b_{12}^4=b_{12}^5=0;\ b_{11}^3+b_{22}^3=b_{11}^4+b_{22}^4=0,\ b_{11}^5+b_{22}^5\neq0. \qquad (2)$$

Дифференцируя тождество $\vec{e}_J\vec{e}_{\mathcal{J}}=\delta_{J\mathcal{J}}\ (J,\mathcal{J}=\overline{1,5})$,получим

$$\omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}} + \omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}} = 0. \qquad (3)$$

Продолжая систему (1), имеем

$$\Delta b^{\alpha}_{ij} = b^{\alpha}_{ijk}\,\omega^{k}, \qquad (4)$$

где $\Delta b^{\alpha}_{ij} = db^{\alpha}_{ij} - b^{\alpha}_{ik}\,\omega^{k}_{j} - b^{\alpha}_{kj}\,\omega^{k}_{i} + b^{\beta}_{ij}\,\omega^{\alpha}_{\beta}$ и b^{α}_{ijk} симметричны по всем нижним индексам.

Предположим, что $b^{5}_{11} \neq b^{5}_{22}$ (относительно случая $b^{5}_{11} = b^{5}_{22}$ см. теорему 2), тогда формы $\omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}}\ (\mathcal{J} \neq \mathcal{J})$ главные [1], и из (1), (2), (4) находим

$$\omega^{i}_{j} = b^{i}_{jk}\,\omega^{k}, \quad \omega^{\alpha}_{i} = b^{\alpha}_{ij}\,\omega^{j}, \quad \omega^{\alpha}_{\beta} = \xi^{\alpha}_{\beta i}\,\omega^{i}.$$

Уравнение присоединенной (фокусной) поверхности $\widetilde{V}_2$ [1] имеет вид

$$[(b^{3}_{11})^2 + (b^{3}_{12})^2](y^3)^2 + (b^{4}_{11})^2 (y^4)^2 - b^{5}_{11} b^{5}_{22} (y^5)^2 + 2 b^{3}_{11} b^{4}_{11} y^3 y^4 +$$
$$+ b^{3}_{11}(b^{5}_{11} - b^{5}_{22}) y^3 y^5 + b^{4}_{11}(b^{5}_{11} - b^{5}_{22}) y^4 y^5 + (b^{5}_{11} + b^{5}_{22}) y^5 - 1 = 0.$$

Поверхность $\widetilde{V}_2$ является конусом второго порядка с вершиной

$$\mathcal{O}\left(0, \frac{b^{5}_{22} - b^{5}_{11}}{b^{4}_{11}(b^{5}_{22} + b^{5}_{11})}, \frac{2}{b^{5}_{22} + b^{5}_{11}}\right).$$

Т е о р е м а 1. Для того чтобы одномерная нормаль поверхности $V_2 \subset E_5$ была средней, необходимо и достаточно, чтобы перпендикулярная этой нормали двумерная плоскость пересекала присоединенный конус $\widetilde{V}_2$ по эллипсу, центр которого находится в точке x.

Т е о р е м а 2. Следующие утверждения равносильны: 1) $b^{5}_{11} = b^{5}_{22}$. 2) Средняя нормаль проходит через центр конуса $\widetilde{V}_2$. 3) Сеть линий кривизны относительно средней нормали Σ_2 определяется неоднозначно. 4) Средняя нормаль является особой [2].

2. Поверхность, образованная средними нормалями поверхности V_2, есть трехмерная линейчатая поверхность $V_3 \subset E_5$, уравнение которой есть

$$\vec{R} = \vec{x} + t\vec{e}_5, \qquad (5)$$

где t -параметр. Дифференцируя (5), находим $d\vec{R} = \Omega^{\hat{i}}\vec{E}_{\hat{i}}$, где $\Omega^{0} = dt$, $\Omega^{i} = \omega^{i}$, $\vec{E}_0 = \vec{e}_5$, $\vec{E}_i = \vec{e}_i + t\vec{a}_i$, $d\vec{e}_5 = \vec{a}_i\,\omega^{i}$, $\vec{a}_i = -b^{5}_{ii}\vec{e}_i + t\xi^{a}_{5i}\vec{e}_a$ $(\hat{i}, \hat{j} = 0, 1, 2;\ a, b = 3, 4)$.

Пространство $\mathcal{N} = [\vec{a}_i]$ является касательным пространством гиперсферического изображения $\vec{V}_2$ линейчатой поверхности V_3 и называется предельным касательным направлением.

Впредь будем предполагать, что $\dim \mathcal{N} = 2$. Пространство $\mathcal{M} = [R, \vec{E}_0, \vec{E}_i, \vec{a}_j]$ называется касательным пространством вдоль образующей и является наименьшим подпространством, содержащим все касательные плоскости к V_3 в точках одной образующей [3].

Т е о р е м а 3.
1. $\dim \mathcal{M} = 5 \Leftrightarrow \xi = \det \|\xi^{a}_{5i}\| \neq 0$.
2. $\dim \mathcal{M} = 4 \Leftrightarrow \xi = 0,\ \|\xi^{a}_{5i}\| \neq 0$.
3. $\dim \mathcal{M} = 3 \Leftrightarrow \|\xi^{a}_{5i}\| = 0$

Т е о р е м а 4. Если $\dim \mathcal{M} = 3$, то имеют место следующие утверждения: 1) Средняя нормаль проходит через центр конуса $\widetilde{V}_2$. 2) Поверхность V_2 лежит на гиперсфере. 3) Средние нормали описывают торсы вдоль любого направления $\{\omega^{i}\}$ на поверхности V_2. 4) Сети Σ_2 соответствует ортогональная сеть на гиперсферическом изображении $\overline{V}_2$, которая является сетью линий кривизны относительно средней нормали поверхности $\overline{V}_2$. 5) Средние нормали поверхности V_2 проходят через неподвижную точку. 6) Поверхность V_3 является тангенциально вырожденной поверхностью ранга 2.

Т е о р е м а 5. Следующие утверждения равносильны: 1) $\dim \mathcal{M} = 3$. 2) Касательные векторы к линиям сети Σ_2 параллельны соответствующим их гиперсферическим изображениям. 3) V_2 лежит на гиперсфере, и средняя нормаль проходит через центр конуса $\widetilde{V}_2$.

3. Псевдоторсами называются линейчатые подповерхности V^{*}_2 поверхности V_3, для которых внутренний параметр распределения $\widetilde{p} = 0$; подповерхностями нулево-

го внешнего параметра распределения называются такие линейчатые подповерхности, у которых внешний параметр распределения $\hat{p} = 0$; торсами называются такие подповерхности, у которых $\tilde{p} = \hat{p} = 0$.

Т е о р е м а 6. Средние нормали описывают псевдоторсы вдоль семейства ω^i сети Σ_2 тогда и только тогда, когда сети Σ_2 соответствует ортогональная сеть на гиперсферическом изображении $\tilde{V}_2$ ($\gamma_{12} = \vec{a}_1 \vec{a}_2 = 0$) или средняя нормаль имеет асимптотическое направление относительно конуса $\tilde{V}_2$, причем $b^5_{11} = 0$, $b^5_{22} \neq 0$.

С л е д с т в и е. Средние нормали описывают псевдоторсы вдоль сети Σ_2 тогда и только тогда, когда $\gamma_{12} = 0$.

Т е о р е м а 7. Средние нормали описывают подповерхность нулевого внешнего параметра распределения вдоль семейства ω^1 сети Σ_2 тогда и только тогда, когда выполняется только одно из условий: 1) $\dim \mathfrak{M} = 3$ 2) I. $\dim \mathfrak{M} = 4$; 2. средняя нормаль имеет неасимптотическое направление относительно конуса $\tilde{V}_2$ ($b^5_{11} b^5_{22} \neq 0$); 3. матрица $\| \xi^a_{5i} \|$ имеет нулевую первую строку, т.е. $\xi^3_{51} = \xi^4_{51} = 0$. 3) I. $\dim \mathfrak{M} = 4$, 2. средняя нормаль имеет асимптотическое направление относительно конуса $\tilde{V}_2$, причем $b^5_{11} \neq 0$, $b^5_{22} = 0$.

С л е д с т в и е 1. Средние нормали описывают подповерхности нулевого внешнего параметра распределения вдоль сети Σ_2 тогда и только тогда, когда $\dim \mathfrak{M} = 3$.

С л е д с т в и е 2. Средние нормали описывают подповерхности нулевого внешнего параметра распределения вдоль любого направления $\{\omega^i\}$ на поверхности V_2 тогда и только тогда, когда $\dim \mathfrak{M} = 3$.

Т е о р е м а 8. Средние нормали описывают торсы вдоль семейства ω^1 сети Σ_2 тогда и только тогда, когда выполняется только одно из условий 1), 2), 3) теоремы 7, причем к условию 3) добавлен п.3 : $\gamma_{12} = 0$.

С л е д с т в и е 1. Средние нормали описывают торсы вдоль сети Σ_2 тогда и только тогда, когда $\dim \mathfrak{M} = 3$.

С л е д с т в и е 2. Средние нормали описывают торсы вдоль любого направления $\{\omega^i\}$ на V_2 тогда и только тогда, когда $\dim \mathfrak{M} = 3$.

4. Пусть $\dim \mathfrak{M} = 3$. Найдем асимптотические формы поверхности V_3: $\Phi^a = B^a_{\hat{i}\hat{j}} \Omega^{\hat{i}} \Omega^{\hat{j}}$, где $B^a_{0\hat{i}} = 0$, $B^a_{11} = h b^a_{11}$, $B^a_{22} = -h b^a_{11}$, $B^3_{12} = h b^3_{12}$, $B^4_{12} = 0$, $h = 1 - t b^5_{11}$, $t \neq \frac{1}{b^5_{11}}$. Контравариантные компоненты метрического тензора $G_{\hat{i}\hat{j}}$ поверхности V_3 есть $G^{\hat{i}\hat{j}} = 0$ ($\hat{i} \neq \hat{j}$), $G^{00} = 1$, $G^{11} = G^{22} = 1/h^2$. Вектор средней нормали поверхности V_3: $\vec{M}_1 = \frac{1}{3} G^{\hat{i}\hat{j}} B^a_{\hat{i}\hat{j}} \vec{E}_a = \vec{0}$.

Т е о р е м а 9. Если $\dim \mathfrak{M} = 3$, то линейчатая поверхность из средних нормалей V_3 минимальна.

Т е о р е м а 10. Если $\dim \mathfrak{M} = 3$, то в точках поверхности V_2 ($t = 0$) поверхность V_3 имеет двумерную главную нормаль, которая совпадает с двумерной плоскостью $N_2(x)$, ортогональной к средней нормали поверхности V_2 в плоскости $N_3(x)$. Присоединенная кривая $\tilde{V}_1$ поверхности V_3 есть кривая третьего порядка, распадающаяся на бесконечно удаленную прямую и эллипс, который является пересечением конуса $\tilde{V}_2$ с плоскостью $N_2(x)$.

Библиографический список

1. Б а з ы л е в В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве: Литовский матем. сб. | АН Лит. ССР. - Вильнюс, 1966. Т.6. № 4. С.15-31.

2. Б а з ы л е в В.Т. Об одном аддитивном представлении тензора Риччи p-поверхности евклидова пространства || Сибирский матем. журнал. 1966. № 3. С.499-511.

3. Л у м и с т е Ю.Г. Многомерные линейчатые поверхности евклидова пространства: Матем. сб. 1961. 55(97): 4. С.411-420.