DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE

Matemātikas katedra

**Vallija Gedroica**

# IEVADS MATEMĀTISKAJĀ ANALĪZĒ

2003

# ANOTĀCIJA

Mācību līdzeklī ir ietverti uzdevumi un īss teorijas izklāsts par šādām tēmām: reāla skaitļa modulis, funkcija, robeža, funkcijas nepārtrauktība. Darbā iekļauti uzdevumu atrisināšanas paraugi, auditorijā risināmie uzdevumi un mājas darbu uzdevumi. Pielikumā apkopoti uzdevumi individuālajam darbam.

# 1. Reālā skaitļa modulis

**1.1. definīcija.** Par reālā skaitļa $a$ **moduli** (absolūto vērtību) sauc $\max(a, -a)$ un apzīmē $|a|$.

Tādējādi
$$|a| = \begin{cases} a, & \text{ja} \quad a \geq 0, \\ -a & \text{ja} \quad a < 0. \end{cases}$$

**Moduļa īpašības**.

1. $|a+b| \leq |a| + |b|$;
2. $|-a| = |a|$;
3. $\big||a| - |b|\big| \leq |a-b|$;
4. $|a| < c$ tad un tikai tad, ja $-c < a < c$;
5. $|a| > c$ tad un tikai tad, ja $a < -c$ vai $a > c$;
6. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$;
7. $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$, ja $b \neq 0$.

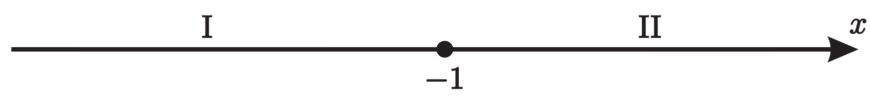
Risinot vienādojumus un nevienādības, kas satur moduli, ir izdevīgi lietot **intervālu metodi**, kuras pamatā ir nepārtrauktu funkciju īpašība: *ja funkcija $f$ intervālā $(a;b)$ ir nepārtraukta un nevienā šī intervāla punktā tās vērtība nav $0$, tad visos intervāla punktos funkcijas vērtības ir vai nu tikai pozitīvas, vai arī tikai negatīvas.* Ja pieņem, ka funkcija $f$ ir nepārtraukta intervālā $I$ un to intervāla punktu skaits, kuros šīs funkcijas vērtības vienādas ar nulli, ir galīgs, tad šie punkti sadala intervālu $I$ apakšintervālos, pie tam katra apakšintervāla visos punktos funkcijas $f$ vērtības ir vai nu pozitīvas, vai arī negatīvas. Lai noteiktu funkcijas vērtību zīmi kādā apakšintervālā, pietiek aprēķināt funkcijas vērtību brīvi izraudzītā dotā apakšintervāla punktā.

**1.1. piemērs.** Konstruēt funkcijas $f(x) = |x+1|$ grafiku.

Šo uzdevumu var atrisināt ar vairākiem paņēmieniem.

**1. paņēmiens**.

Pārveido šīs funkcijas analītisko izskatu, izmantojot moduļa definīciju. Punkts $x = -1$ sadala koordinātu taisni divos intervālos. Katrā no šiem intervāliem (1.1. zīm.) nosaka funkcijas izskatu.




**1.1. zīm.**

Intervālā $(-\infty; -1)$ ir spēkā $x + 1 < 0$, tāpēc

$$|x + 1| = -(x + 1)$$

un

$$f(x) = -(x + 1).$$

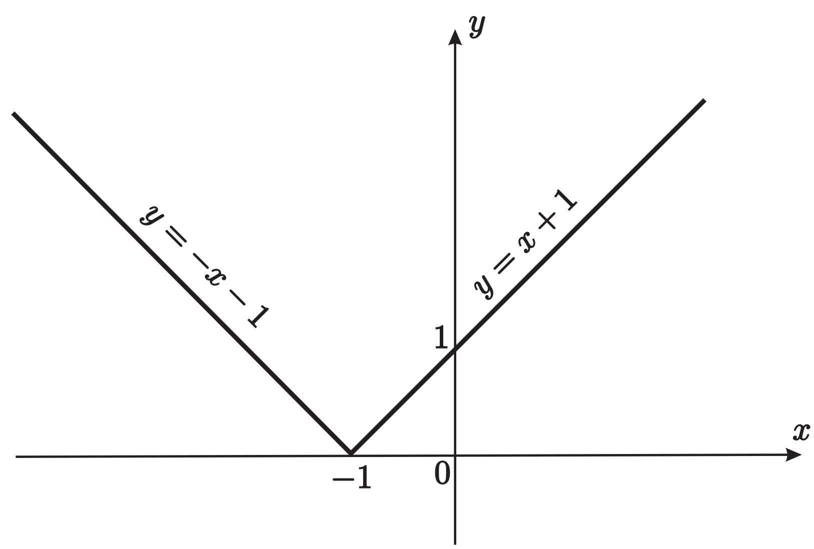
Intervālā $[-1; +\infty)$ ir spēkā $x + 1 \geq 0$, tāpēc

$$f(x) = x + 1.$$

Tātad doto funkciju var uzrakstīt šādi:

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1, & \text{ja} \quad x < -1, \\ x + 1, & \text{ja} \quad x \geq -1. \end{cases}$$

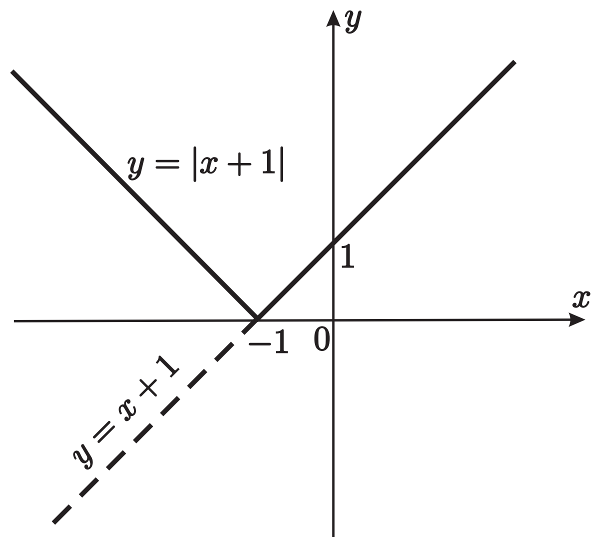
Konstruē šīs funkcijas grafiku (1.2. zīm).




**1.2. zīm.**

**2. paņēmiens.**

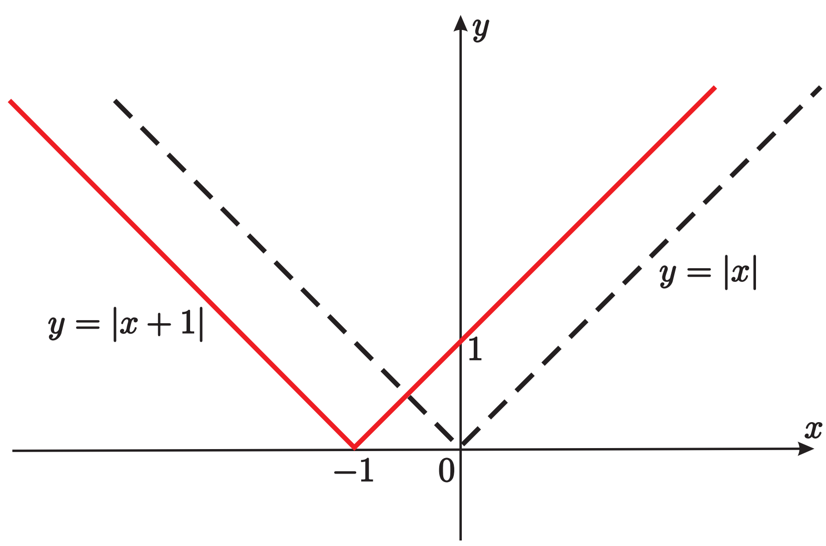
Konstruē funkcijas $f(x) = x+1$ grafiku un grafika to daļu, kas atrodas zem $Ox$ ass, attēlo simetriski attiecībā pret $Ox$ asi (1.3. zīm.).




**1.3. zīm.**

**3. paņēmiens.**

Funkcijas $f(x) = |x+1|$ grafiku var iegūt no funkcijas $f(x) = |x|$ grafika, veicot paralēlo pārnesi par vienu vienību pa kreisi (1.4. zīm.).




**1.4. zīm.**

**1.2. piemērs.** Konstruēt funkcijas $f(x) = |x+1| + |x-1|$ grafiku.

Lietojot intervālu metodi un moduļa definīciju, pārveido dotās funkcijas analītisko izskatu.


**1.5. zīm.**

1. Ja $x < -1$, tad $x+1 < 0$ un $x-1 < 0$, tāpēc $|x+1| = -(x+1)$ un $|x-1| = -(x-1)$.

   Tātad
   $$f(x) = -(x+1) - (x-1) = -2x.$$

2. Ja $-1 \le x < 1$, tad $x+1 \ge 0$ un $x-1 < 0$, tāpēc $|x+1| = x+1$ un $|x-1| = -(x-1)$.

   Tātad
   $$f(x) = x+1-(x-1) = 2.$$

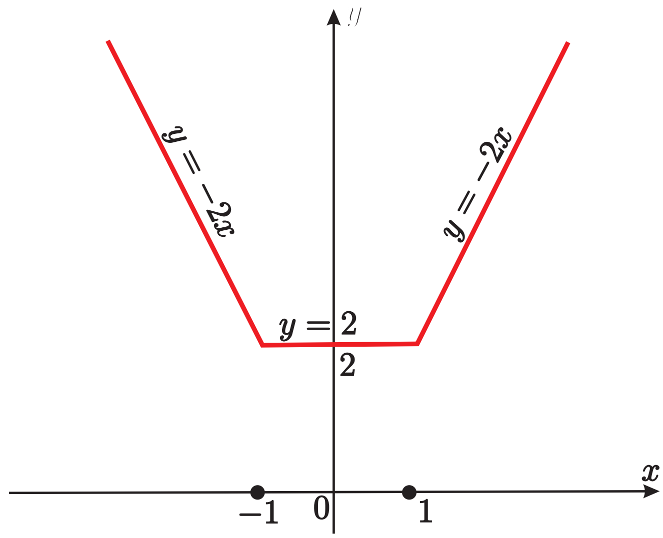
3. Ja $x \ge 1$, tad $x+1 > 0$ un $x-1 \ge 0$, tāpēc $|x+1| = x+1$ un $|x-1| = x-1$.

   Tātad
   $$f(x) = x+1+x-1 = 2x.$$

Ņemot vērā funkcijas analītisko izskatu katrā no minētajiem intervāliem, var rakstīt:

$$f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{ja} \quad x < -1, \\ 2, & \text{ja} \quad -1 \le x < 1, \\ 2x, & \text{ja} \quad x \ge 1. \end{cases}$$

Konstruē šīs funkcijas grafiku (1.6. zīm.).




**1.6. zīm.**

**1.3. piemērs.** Atrisināt vienādojumu $|x+1|-|x+2|+|x-3|=5$.

Punkti $x=-2$, $x=-1$ un $x=3$ koordinātu taisni sadala četros intervālos (1.7. zīm.). Katrā no šiem intervāliem katra no izteiksmēm, kas atrodas zem moduļa zīmes, saglabā savu zīmi.


**1.7. zīm.**

Lietojot moduļa definīciju, katrā no šiem intervāliem doto vienādojumu var pārrakstīt šādi:

1. $\begin{cases} x<-2, \\ -(x+1)+x+2-(x-3)=5, \end{cases}$

   $\begin{cases} x<-2, \\ x=-1. \end{cases}$

   $x\in\emptyset$, jo $x=-1$ nepieder šim intervālam.

2. $\begin{cases} -2\le x<-1, \\ -(x+1)-(x+2)-(x-3)=5 \end{cases}$

   $\begin{cases} -2\le x<-1, \\ x=-\frac{5}{3}, \end{cases}$

   $$x=-\frac{5}{3}.$$

3. $\begin{cases} -1 \le x < 3, \\ x + 1 - (x + 2) - (x - 3) = 5, \end{cases}$

$\begin{cases} -1 \le x < 3, \\ x = -3. \end{cases}$

$x \in \emptyset,$ jo $x = -3$ nepieder šim intervālam.

4. $\begin{cases} x \ge 3, \\ x + 1 - (x + 2) + x - 3 = 5, \end{cases}$

$\begin{cases} x \ge 3, \\ x = 9. \end{cases}$

$x = 9.$

*Atbilde.* $x \in \left\{ -\dfrac{5}{3}; 9 \right\}$.

**1.4. piemērs.** Atrisināt nevienādību $|3x - 5| - |2x + 3| > 0$.

Punkti $x = -\frac{3}{2}$ un $x = \frac{5}{3}$ sadala koordinātu taisni trīs intervālos (1.8. zīm.).


**1.8. zīm.**

Pārraksta doto nevienādību katrā no šiem intervāliem.

1. $\begin{cases} x < -\frac{3}{2}, \\ -(3x - 5) + (2x + 3) > 0, \end{cases}$

$\begin{cases} x < -\frac{3}{2}, \\ x < 8. \end{cases}$

$x < -\dfrac{3}{2}$, tātad $x \in \left( -\infty, -\dfrac{3}{2} \right)$.

2. $\begin{cases} -\frac{3}{2} \le x < \frac{5}{3}, \\ -(3x - 5) - (2x + 3) > 0, \end{cases}$

$\begin{cases} -\frac{3}{2} \le x < \frac{5}{3}, \\ x < \frac{2}{5}, \end{cases}$

$-\dfrac{3}{2} \le x < \dfrac{2}{5}.$

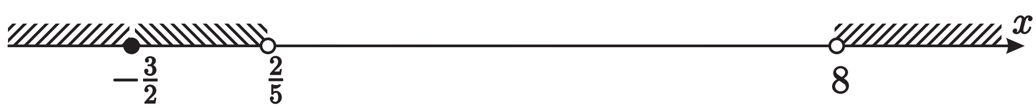
$x \in \left[ -\dfrac{3}{2}; \dfrac{2}{5} \right).$

3. $\begin{cases} x \geq \frac{5}{3}, \\ 3x - 5 - (2x+3) > 0, \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq \frac{5}{3}, \\ x > 8. \end{cases}$

$x > 8, \text{ tātad } x \in (8; +\infty).$

Lai uzrakstītu atbildi, apvieno iegūtos rezultātus uz koordinātu taisnes (1.9. zīm.).




**1.9. zīm.**

*Atbilde.* $x \in \left(-\infty; \frac{2}{5}\right) \cup (8; +\infty)$.

**1.5. piemērs.** Atrisināt nevienādību $|1 - 2x| < 3$.

Doto nevienādību var atrisināt, izmantojot moduļa 4. īpašību.

$$-3 < 1 - 2x < 3,$$
$$-4 < -2x < 2,$$
$$-1 < x < 2.$$

*Atbilde.* $x \in (-1; 2)$.

**1.6. piemērs.** Atrisināt nevienādību $|3x - 8| \geq 4$.

Doto nevienādību var atrisināt, izmantojot moduļa 5. īpašību.

$$\begin{array}{ll} 3x - 8 \geq 4 \text{ vai} & 3x - 8 \leq -4, \\ 3x \geq 12 & 3x \leq 4, \\ x \geq 4 & x \leq \dfrac{4}{3}, \\ x \in [4; +\infty) & x \in \left(-\infty; \dfrac{4}{3}\right]. \end{array}$$

*Atbilde.* $x \in \left(-\infty; \frac{4}{3}\right] \cup [4; +\infty)$.

**1.7. piemērs.** Atrisināt vienādojumu $|\sin x| - \sin x = 2$.

1. Ja $\sin x \geq 0$, tad $|\sin x| = \sin x$, tāpēc
   $\begin{cases} \sin x \geq 0, \\ \sin x - \sin x = 2, \end{cases}$
   $x \in \emptyset$.

2. Ja $\sin x < 0$, tad $|\sin x| = -\sin x$, tāpēc
   $\begin{cases} \sin x < 0, \\ -\sin x - \sin x = 2, \end{cases}$

   $\begin{cases} \sin x < 0, \\ \sin x = -1, \end{cases}$

   $\sin x = -1.$

   $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Atbilde. $x \in \left\{-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}\right\}.$

**Auditorijā risināmie uzdevumi**

1. Konstruēt grafikus funkcijām
   (a) $f(x) = x - |3x + 1| - 2,$
   (b) $f(x) = 5|x| - |1 - x|,$
   (c) $f(x) = |\cos x| + 1.$
2. Atrisināt vienādojumus
   (a) $|2x - 3| = 2x - 3,$
   (b) $|\cos x| = \cos x,$
   (c) $|x| = x + 3,$
   (d) $|x - 3| + |x + 1| = 4,$
   (e) $2|3 - 2x| - x - 2 = x.$
3. Atrisināt nevienādības
   (a) $|2x - 4| \geq 6,$
   (b) $|1 + x| \leq 2,$
   (c) $|x - 1| - |x + 4| > 0,$
   (d) $|x + 3| - |x + 1| < 2,$
   (e) $\left|\frac{x}{x+1}\right| > \frac{x}{x+1},$
   (f) $\left|\frac{x+2}{x-1}\right| > 3,$
   (g) $2\sqrt{x^2} \geq (x - 1)^2 + 2,$
   (h) $\left|\frac{2-3|x|}{1+|x|}\right| < 1.$

**Mājas darba uzdevumi**

1. Konstruēt grafikus funkcijām

   (a) $f(x) = |2x - 1| + 3|x|$,

   (b) $f(x) = |4 - x| - 2|1 - x| + 3$,

   (c) $f(x) = |\sin x| - 2$.

2. Atrisināt vienādojumus

   (a) $x - |3x - 1| = 3$,

   (b) $|2x - 5| - |3x + 6| = 6$,

   (c) $|\sin x| = \sin x$,

   (d) $4\big(\sin^2 x - |\cos x|\big) = 1$.

3. Atrisināt nevienādības

   (a) $|3x - 4| \leq 5$,

   (b) $|x^2 + 3x - 4| > x^2 + 3x - 4$,

   (c) $|3x - 5| - |2x + 3| > 0$,

   (d) $2x^2 - 7\left(\sqrt{x}\right)^2 \leq 4$,

   (e) $\left|\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right| < 1$.

## 2. Funkcijas jēdziens. Vienādas funkcijas. Funkcijas, kas uzdota ar formulu, definīcijas apgabala noteikšana

Par **atbilstību** sauc sakārtotu pāru $(x; y)$ patvaļīgu kopu $S$.

Pirmo elementu $x$ kopu sauc par atbilstības **definīcijas apgabalu** $D(S)$, bet otro elementu $y$ kopu - par atbilstības **vērtību apgabalu** $E(S)$.

Atbilstību $S$ sauc par **viennozīmīgu**, ja katram $x \in D(S)$ eksistē vienīgs $y \in E(S)$, ka $(x; y) \in S$.

**2.1. definīcija.** Par **funkciju** sauc katru viennozīmīgu atbilstību.

Ja $f$ ir funkcija un $x \in D(f)$, tad $y = f(x)$ sauc par funkcijas $f$ vērtību punktā $x$ (skat.[1]).

Divas funkcijas $f$ un $g$ uzskata par **vienādām**, ja

1. tām ir vienādi definīcijas apgabali,
2. katram $x \in D(f) = D(g)$ izpildās $f(x) = g(x)$.

Par funkcijas $f$ **grafiku** sauc kopu

$$\Gamma_f = \big\{(x;y) \big|\; x \in D(f),\; y = f(x)\big\}.$$

**2.1. piemērs.** $f(x) = x^2 + 2x - 1$.

Atrast $f(0)$, $f(a+1)$, $f(a)+1$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{f(x)}$, $f\big(f(x)\big)$.

Ievietojot argumenta $x$ vietā 0, iegūst

$$f(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 - 1 = -1.$$

Analogi

$$\begin{aligned}
&f(a+1) = (a+1)^2 + 2(a+1) - 1 = a^2 + 4a + 2,\\
&f(a) + 1 = a^2 + 2a - 1 + 1 = a^2 + 2a,\\
&f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{x} - 1 = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} - 1,\\
&\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^2 + 2x - 1}.
\end{aligned}$$

Lai atrastu $f\big(f(x)\big)$, argumenta $x$ vietā ievieto $x^2 + 2x - 1$.

$$f\big(f(x)\big) = (x^2+2x-1)^2 + 2(x^2+2x-1) - 1 = x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1.$$

**2.2. piemērs.**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{ja} \quad x < -2,\\ \sin x, & \text{ja} \quad -2 < x < 2,\\ \lg x, & \text{ja} \quad x \geq 2. \end{cases}$$

Atrast $f(-5)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(10)$.

Funkcija ir definēta ar 3 formulām visiem $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

[1] Tā bieži apzīmē arī pašu funkciju $f$.

Tā kā $-5 \in (-\infty; -2)$, tad $f(-5) = (-5)^2 + 1 = 26$.

Skaitlis $-2 \notin D(f)$, t.i., funkcija šajā punktā nav definēta, un funkcijas vērtība punktā $-2$ neeksistē.

Skaitlis $0 \in (-2; 2)$, tāpēc $f(0) = \sin 0 = 0$.

Skaitlis $10 \in [2, +\infty)$, tāpēc $f(10) = \lg 10 = 1$.

**2.3. piemērs.** Noskaidrot, vai dotās funkcijas ir vienādas.

1. $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$, $\varphi(x) = x - 1$,
2. $f(x) = x + 1$, $\varphi(x) = \sqrt{(x+1)^2}$,
3. $f(x) = \lg(1 - x^2)$, $\varphi(x) = \lg(1 + x) + \lg(1 - x)$.

1. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $D(\varphi) = \mathbb{R}$.

   Tā kā $D(f) \neq D(\varphi)$, tad dotās funkcijas nav vienādas.
2. $D(f) = D(\varphi) = \mathbb{R}$,

   $f(x) \neq \varphi(x)$ visiem $x \in (-\infty; -1)$, piemēram, $f(-2) = -1$, $\varphi(-2) = 1$. Tātad dotās funkcijas nav vienādas.
3. Nosaka funkciju definīcijas apgabalus.

$$\begin{aligned} D(f):\ & 1 - x^2 > 0, \\ & x^2 < 1, \\ & -1 < x < 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(\varphi):\ & \begin{cases} 1 + x > 0, \\ 1 - x > 0, \end{cases} \\ & \begin{cases} x > -1, \\ x < 1, \end{cases} \\ & -1 < x < 1. \end{aligned}$$

Tātad $D(f) = D(\varphi) = (-1; 1)$.

Visiem $x \in (-1; 1)$ ir spēkā

$$f(x) = \lg(1-x^2) = \lg\big((1-x)(1+x)\big) = \lg(1-x) + \lg(1+x) = \varphi(x).$$

Tātad dotās funkcijas ir vienādas.

## Auditorijā risināmie uzdevumi

1. $f(x) = \frac{x}{3} + \sin 2x$. Atrast $f(3x)$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{f(x)}$, $f(x+1)$, $f(x)+1$.

2. $f(x) = \begin{cases} 4+x, & \text{ja } -1 \le x \le 0, \\ 2^x & \text{ja } 0 < x < +\infty. \end{cases}$

   Atrast $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$.

3. $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2x - \frac{2}{x}$. Parādīt, ka $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$.

4. $\varphi(t) = \sqrt[3]{1-t^3}$. Parādīt, ka $\varphi\big(\varphi(t)\big) = t$.

5. Noteikt, kuras no dotajām funkcijām ir vienādas.

   (a) $f(x) = \sqrt{x}\sqrt{x-1}$, $\qquad \varphi(x) = \sqrt{x(x-1)}$,
   
   (b) $f(x) = x$, $\qquad \varphi(x) = |x|$,
   
   (c) $f(x) = \lg x^2$, $\qquad \varphi(x) = 2\lg x$,
   
   (d) $f(x) = \lg(x^2-4x)$, $\qquad \varphi(x) = \lg x + \lg(x-4)$,
   
   (e) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^3-1}$, $\qquad \varphi(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$,
   
   (f) $f(x) = 1$, $\qquad \varphi(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$.

## Mājas darba uzdevumi

1. $\varphi(x) = \lg x^2$. Aprēķināt $\varphi(-10)$, $\varphi(-0,001)$, $\varphi(100)$.

2. $F(y) = \sin\frac{\pi}{y} + \cos \pi y$. Aprēķināt $F(1)$, $F(2)$, $F(3)$, $F(6)$.

3. $u(x) = \begin{cases} x, & \text{ja } x < -2, \\ 1, & \text{ja } |x| \le 2, \\ 5-x^2 & \text{ja } x > 2. \end{cases}$

   Atrast $u(-3)$, $u(-2)$, $u(0)$, $u(2)$, $u(3)$.

4. $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Atrisināt vienādojumus.

   (a) $f(x) = f(-1)$,
   
   (b) $f(x) = f(0)$,
   
   (c) $f(x+1) = f(1)$.

5. Noteikt, kuras no dotajām funkcijām ir vienādas.

(a) $f(x) = x$, $\quad \varphi(x) = \sqrt{x^2}$;

(b) $f(x) = \lg(2x - x^2)$, $\quad \varphi(x) = \lg(2 - x) + \lg x$;

(c) $f(x) = \lg 10^{1-x}$, $\quad \varphi(x) = 1 - x$;

(d) $f(x) = 3^{\log_3 x^2}$, $\quad \varphi(x) = x^2$;

(e) $f(x) = \lg \dfrac{1 - x}{1 + x}$, $\quad \varphi(x) = \lg(1 - x) - \lg(1 + x)$.

## Definīcijas apgabala noteikšana analītiski definētām funkcijām

Visbiežāk funkciju uzdod analītiski, t.i., ar formulu. Tādā gadījumā funkcijas definīcijas apgabalu īpaši nenorāda. Ar definīcijas apgabalu saprot tās argumenta vērtības, ar kurām formulai ir jēga. Piemēram,

1. $f(x) = \frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$, tad $x \neq 0$ jeb $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
2. $f(x) = \sqrt[m]{x}$, $m$ ir pāra skaitlis, tad $x \geq 0$ jeb $x \in [0; +\infty)$;
3. $f(x) = \log_a x$, tad $x > 0$ jeb $x \in (0; +\infty)$;
4. $f(x) = \operatorname{tg} x$, tad $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ jeb $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$;
5. $f(x) = \operatorname{ctg} x$, tad $x \neq \pi k$ jeb $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\}$;
6. $f(x) = \arcsin x$, tad $|x| \leq 1$ jeb $x \in [-1; 1]$;
7. $f(x) = \arccos x$, tad $|x| \leq 1$ jeb $x \in [-1; 1]$.

**2.4. piemērs.** Noteikt funkcijas

$$f(x) = \sqrt{\lg \frac{5x - 1}{2}} + \arcsin \frac{3x - 2}{5}$$

definīcijas apgabalu.

Dotās funkcijas definīcijas apgabals ir abu saskaitāmo definīcijas apgabalu kopējā daļa.

$$\begin{cases} \lg \frac{5x-1}{2} \geq 0, \\ \frac{5x-1}{2} > 0, \\ \left|\frac{3x-2}{5}\right| \leq 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x \geq 3, \\ -3 \leq 3x \leq 7, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{5x-1}{2} \geq 1, \\ |3x-2| \leq 5, \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq \frac{3}{5}, \\ -1 \leq x \leq \frac{7}{3}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x-1 \geq 2, \\ -5 < 3x-2 \leq 5, \end{cases}$$

*Atbilde.* $x \in \left[\frac{3}{5}; \frac{7}{3}\right]$.

**2.5. piemērs.** Noteikt funkcijas

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin 2x}}$$

definīcijas apgabalu.

Šoreiz

$$\begin{aligned} &\sin 2x > 0, \\ &2\pi k < 2x < \pi + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z}), \\ &\pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

*Atbilde.* $x \in \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$.

**2.6. piemērs.** Noteikt funkcijas

$$f(x) = \operatorname{arcctg} \frac{6-7x}{5x^2+3} + \sqrt{\log_{0,3}(2x-1)}$$

definīcijas apgabalu.

Šoreiz jāatrisina nevienādību sistēma:

$$\begin{cases} 5x^2+3 \neq 0, \\ \log_{0,3}(2x-1) \geq 0, \\ 2x-1 > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-1 \leq 1, \\ 2x > 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 1, \\ x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Atbilde. $x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right]$.

### Auditorijā risināmie uzdevumi

Noteikt funkciju definīcijas apgabalus.

1. $f(x) = x^3 - 3x + 2$;
2. $f(x) = \frac{x-3}{x+1}$;
3. $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$;
4. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$;
5. $f(x) = \sqrt{6x - 8 - x^2}$;
6. $f(x) = \lg \frac{5+3x}{2-5x}$;
7. $f(x) = \arccos \frac{2x}{1+x}$;
8. $f(x) = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{2+x}}$;
9. $f(x) = \arcsin \left(\lg \frac{x}{10}\right) - \sin x$;
10. $f(x) = \frac{5x+7}{\lg(7-x)} - \frac{7}{(x+3)^2}$;
11. $f(x) = \frac{x-1}{\log_2(7x+4)} - \arccos \frac{x}{3}$;
12. $f(x) = \sqrt[3]{\lg \frac{3x-7}{5}} + 3^{\frac{x}{5-x}}$;
13. $f(x) = \arcsin \frac{x^2-1}{5} - \frac{x}{x^3-2x^2}$;
14. $f(x) = \frac{3x}{\arcsin \frac{5}{x}} + \lg(x^2 - 36)$;
15. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2x-7}{7x-x^2} + 5 \arccos \frac{5}{3x-1}$.

### Mājas darba uzdevumi

Noteikt funkciju definīcijas apgabalus.

1. $f(x) = 2x^2 + x - 3$;
2. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$;
3. $f(x) = \arcsin(1 - x) + \lg(\lg x)$;
4. $f(x) = \frac{\sqrt{2x+9}}{\lg(5-x)} + \sqrt{\frac{7}{2x-3}}$;
5. $f(x) = \sqrt{\lg \frac{5x-8}{3}} - \operatorname{arcctg} \frac{3x}{6-x}$;

6. $f(x) = \arccos\frac{7}{x} - 3\lg(81 - x^2)$;
7. $f(x) = \sqrt{\log_{0,5}(7 - 2x)} - 3^{\frac{\sin x}{5x-15}}$.

# 3. Reālā mainīgā reālu funkciju klasifikācija

## 3.1. Pāra un nepāra funkcijas

Apskata funkcijas, kuru definīcijas apgabali ir simetriski attiecībā pret koordinātu sākuma punktu, t.i., funkcijas, kurām reizē ar $x$ definīcijas apgabalam pieder arī $-x$.

**3.1. definīcija.** Funkciju $f$ sauc par **pāra** funkciju, ja $f(-x) = f(x)$ visiem $x \in D(f)$.

**3.2. definīcija.** Funkciju $f$ sauc par **nepāra** funkciju, ja $f(-x) = -f(x)$ visiem $x \in D(f)$.

No šīm definīcijām seko, ka pāra funkcijas grafiks ir simetrisks attiecībā pret ordinātu asi, bet nepāra funkcijas grafiks ir simetrisks attiecībā pret koordinātu sākuma punktu.

**3.1. piemērs.** Noteikt, vai dotās funkcijas ir pāra vai nepāra funkcijas.

1. $f(x) = x^3 \cos 5x$,
2. $\varphi(t) = \frac{2^t + 2^{-t}}{3t^2} + t^4 2^{-t^2}$,
3. $f(x) = \lg(2 - x)$.

1. $D(f) = \mathbb{R}$, tātad simetrisks attiecībā pret koordinātu sākuma punktu.

   Atrod
$$f(-x) = (-x)^3 \cos(-5x) = -x^3 \cos 5x = -f(x).$$
   *Atbilde.* Dotā funkcija ir nepāra funkcija.

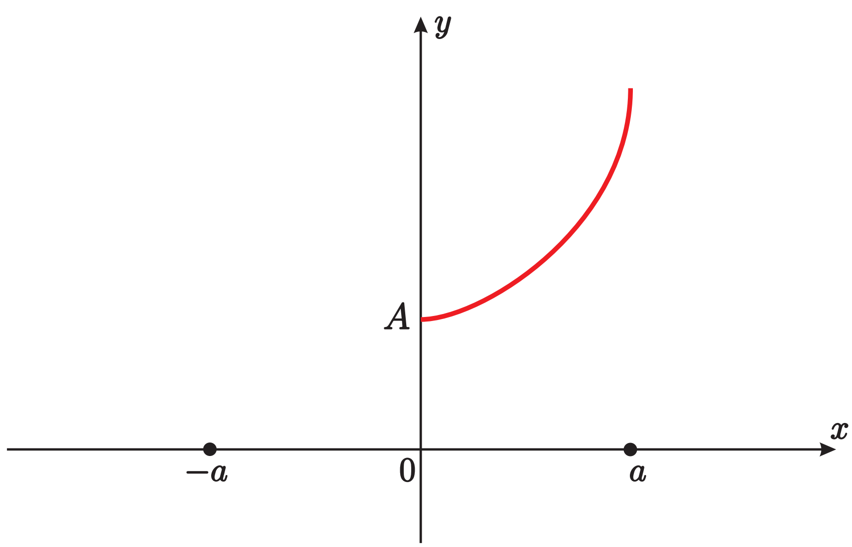
2. $D(\varphi) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ - simetriska attiecībā pret koordinātu sākuma punktu kopa.
$$\varphi(-t) = \frac{2^{-t} + 2^t}{3t^2} + t^4 2^{-t^2} = \varphi(t).$$
   *Atbilde.* Dotā funkcija ir pāra funkcija.

3. $D(f) = (-\infty; 2)$ - nav simetrisks attiecībā pret koordinātu sākuma punktu, tāpēc dotā funkcija nevar būt ne pāra, ne nepāra funkcija.

### Auditorijā risināmie uzdevumi

Noteikt, vai dotās funkcijas ir pāra vai nepāra funkcijas.

1. $f(x) = 4 - 2x^4 + 6x^6$.
2. $f(x) = \frac{x-2}{x^2+4}$.
3. $f(x) = \frac{1+2^x}{1-2^x}$.
4. $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x$;
5. $f(x) = \frac{|x|}{x}$.
6. $f(x) = \lg\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.
7. Funkcija $y = f(x)$ ir definēta slēgtā intervālā $[-a; a]$. 3.1. zīmējumā attēlots šīs funkcijas grafiks intervālā $[0; a]$. Turpināt funkcijas grafiku intervālā $[-a; 0)$, ja zināms, ka
   (a) $f$ - pāra funkcija,
   (b) $f$ - nepāra funkcija.




**3.1. zīm.**

8. Pierādīt, ka divu pāra funkciju reizinājums ir pāra funkcija.

**Mājas darba uzdevumi**

1. Noteikt, vai dotās funkcijas ir pāra vai nepāra funkcijas.
   (a) $f(x) = |x| + 3^{x^2}$;
   (b) $f(x) = x^3 \sin^2 x + \frac{\cos x}{x}$;
   (c) $f(x) = \sin 2x + x^2\sqrt{x}$;
   (d) $\varphi(x) = \lg \frac{3-x}{3+x}$;
   (e) $f(t) = 2e^t + t \operatorname{tg} t$.
2. Pierādīt, ka divu pāra funkciju summa ir pāra funkcija.

## 3.2. Periodiskas funkcijas

Apskata funkcijas, kuru definīcijas apgabali apmierina šādu nosacījumu: visiem $x \in D(f)$ arī $(x + nT) \in D(f)$ $(n \in \mathbb{Z},\ T \neq 0)$.

**3.3. definīcija.** Funkciju $f$ sauc par **periodisku** funkciju ar periodu $T \neq 0$, ja katram $x \in D(f)$ ir pareiza vienādība

$$f(x + T) = f(x).$$

Par funkcijas periodiem der arī skaitļi $nT$, kur $n \in \mathbb{Z}$. Vismazāko no šiem skaitļiem sauc par **mazāko pozitīvo periodu**[2].

**3.2. piemērs.** Pierādīt, ka $f(x) = \sin 2x + \operatorname{tg} x$ ir periodiska funkcija un atrast tās periodu.

$D(f) = \mathbb{R}$.

Tā kā sinusa periods ir $2\pi$ un tangensa periods ir $\pi$, tad

$$\begin{aligned} f(x) = \sin 2x + \operatorname{tg} x = \sin(2x + 2\pi) + \operatorname{tg}(x + \pi) = \\ = \sin 2(x + \pi) + \operatorname{tg}(x + \pi) = f(x + \pi), \end{aligned}$$

tātad dotā funkcija ir periodiska, un tās periods $T = \pi$.

**3.3. piemērs.** Pierādīt, ka funkcija $f(x) = \sin x^2$ nav periodiska.

Pieņem, ka eksistē tāds skaitlis $T > 0$, ka visiem $x \in \mathbb{R}$ ir spēkā vienādība

$$\sin x^2 = \sin(x + T)^2. \qquad (*)$$

[2]Parasti to sauc par **periodu**.

Izvēloties $x = 0$, iegūst: $0 = \sin T^2$. Izsakot $T$ un ievietojot šo $T$ vērtību vienādībā (*), nonāk pie pretrunas. Tās nozīmē, ka funkcija $f(x) = \sin x^2$ nav periodiska[3].

**Auditorijā risināmie uzdevumi**

Noteikt, vai funkcijas ir periodiskas, periodiskām funkcijām noteikt to periodus.

1. $f(x) = 4$;
2. $f(x) = \sin x + \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$;
3. $f(x) = 3\cos\lambda x,\quad \lambda\ -\text{const}$;
4. $f(x) = \sin\pi x$;
5. $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}$.

**Mājas darba uzdevumi**

1. $f(x) = \operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$;
2. $f(x) = \operatorname{tg}(x-3)$;
3. $f(x) = 1 + \sin\left(\dfrac{\pi x}{3}\right)$;
4. $\sin 2x + 2\sin 3x$;
5. $f(x) = 0{,}1\cos x + \cos 3x$;
6. $f(x) = \sin(wx + \varphi_0)$, kur $w, \varphi_0\ -\text{const}$.

# 4. Apvērstā (inversā) funkcija

**4.1. definīcija.** Funkciju $f$, kas iegūst katru savu vērtību tikai vienā definīcijas apgabala punktā, sauc par **apvēršamu** funkciju.

Piemēram, intervālā $I$ stingri monotona funkcija ir apvēršama šajā intervālā.

**4.2. definīcija.** Funkciju $g$, kas apvēršamās funkcijas $f$ vērtību apgabala katrā punktā $x$ iegūst tādu vērtību $y$, ka $f(y) = x$, sauc par funkcijas $f$ **apvērsto** (inverso) funkciju.

Tātad apvērsto funkciju $g$ var definēt tikai apvēršamai funkcijai $f$, pie tam $D(g) = E(f)$ un $E(g) = D(f)$.

Apvēršamai funkcijai $f$ eksistē vienīgā apvērstā funkcija $g$, un tās grafiks ir simetrisks funkcijas $f$ grafikam attiecībā pret taisni $y = x$.

Lai funkcijai $y = f(x)$, $x \in D(f)$, atrastu apvērsto funkciju,

[3]Skat.[12, 36. lpp.].

1. pārliecinās par to, ka funkcija $y = f(x)$ ir apvēršama tās definīcijas apgabalā[4],
2. atrisina vienādojumu $y = f(x)$ attiecībā pret $x: \ x = g(y)$,
3. argumentu apzīmē ar $x$ un funkcijas vērtību - ar $y: \ y = g(x)$.

**4.1. piemērs.** Atrast funkcijas $f(x) = 5^{\frac{x+1}{x}}$ apvērsto funkciju un noteikt tās definīcijas apgabalu.

Dotā funkcija ir apvēršama, tās definīcijas apgabals

$$D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$$

Lai atrastu funkcijas apvērsto funkciju, jāatrisina vienādojums $y = 5^{\frac{x+1}{x}}$ attiecībā pret $x$.

$$\frac{x+1}{x} = \log_5 y,$$

$$x = \frac{1}{\log_5 y - 1}.$$

Argumentu apzīmējot ar $x$, iegūst

$$g(x) = \frac{1}{\log_5 x - 1}.$$

Atrod $D(g)$:

$$\begin{cases} \log_5 x - 1 \neq 0, \\ x > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 5, \\ x > 0. \end{cases}$$

Tātad $x \in (0; 5) \cup (5; +\infty)$.

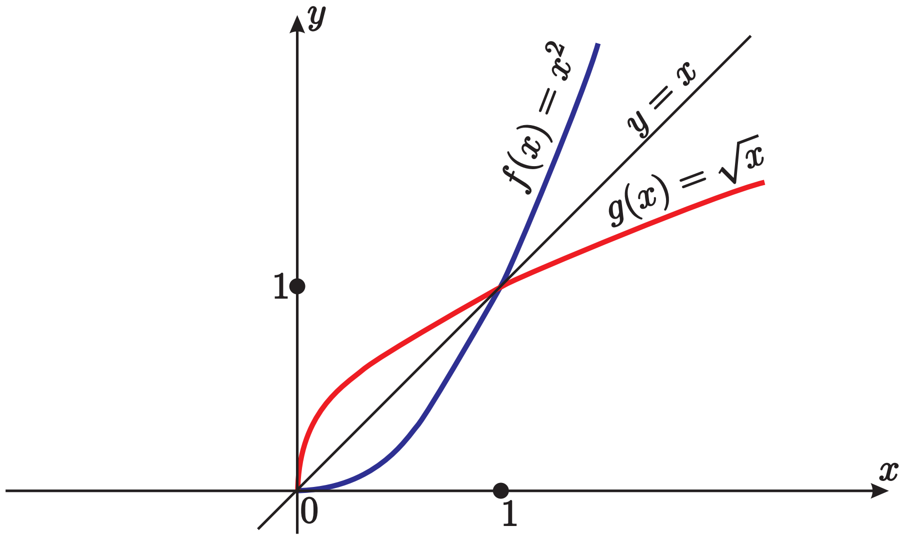
**4.2. piemērs.** Atrast funkcijas $f(x) = x^2$ apvērsto funkciju, noteikt tās definīcijas apgabalu un konstruēt dotās un apvērstās funkcijas grafiku.

$D(f) = \mathbb{R}$. Dotā funkcija nav apvēršama definīcijas apgabalā, tāpēc jāizvēlas funkcijas sašaurinājums, piemēram, uz intervālu $[0; +\infty)$.

Šajā intervālā funkcija ir augoša, tātad tā ir apvēršama.

No vienādojuma $y = x^2$ atrodam, ka $x = \sqrt{y}$ (pirms saknes jāņem "$+$" zīme, jo $x > 0$) ir dotās funkcijas apvērstā funkcija.

Visbeidzot, $g(x) = \sqrt{x}$, $D(g) = [0; +\infty)$.




**4.1. zīm.**

### Auditorijā risināmie uzdevumi

Atrast dotajām funkcijām apvērstās funkcijas un noteikt to definīcijas apgabalus. 1. un 4. piemērā konstruēt dotās un apvērstās funkcijas grafiku.

1. $f(x) = 3^x - 5$;
2. $f(x) = 2^{\frac{x}{x-2}}$;
3. $f(x) = \log_5 \frac{x-2}{3}$;
4. $f(x) = \sqrt{x+8}$;
5. $f(x) = \frac{5-x}{5+x}$;
6. $f(x) = \frac{8+x^3}{8-x^3}$;
7. $f(x) = \arccos \frac{4}{3x-1}$;
8. $f(x) = \sin(5x-1)$, ja $x \in \left[-\frac{\pi}{10} + \frac{1}{5}; \frac{\pi}{10} + \frac{1}{5}\right]$;
9. $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$, ja $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

[4] Ja $f$ nav apvēršama $D(f)$, tad izveido funkcijas sašaurinājumu uz kopu, kurā $f$ ir apvēršama.

**Mājas darba uzdevumi**

1. $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$;
2. $f(x) = (x+2)^2$;
3. $f(x) = \operatorname{arcctg} 3x$;
4. $f(x) = 1 + \ln(x+5)$;
5. $f(x) = \log_2 \dfrac{3}{x}$;
6. $f(x) = x^2 - 1$;
7. $f(x) = \sin 2x$.

## 5. Konverğentas skaitļu virknes

**5.1. definīcija.** Skaitli $a$ sauc par virknes $(a_n)$ **robežu**, ja jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds naturāls skaitlis $N$ (atkarīgs no $\varepsilon$), ka visiem $n > N$ izpildās nevienādība

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Raksta $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ un saka, ka **virkne** $(a_n)$ **konverğē uz skaitli** $a$.

Atrisinot nevienādību $|a_n - a| < \varepsilon$ attiecībā uz $a_n$, iegūst:

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon.$$

Tas nozīmē, ka visiem $n > N$ $a_n$ pieder punkta $a$ $\varepsilon$ - apkārtnei, t.i., $a_n \in (a-\varepsilon; a+\varepsilon)$. Ārpus šīs apkārtnes atrodas tikai galīgs skaits virknes locekļu.

Virknes locekļus var attēlot kā koordinātu taisnes punktus (5.1. zīm.), var arī konstruēt virknes (kā funkcijas atsevišķa gadījuma) grafiku koordinātu plaknē. Šoreiz koordinātu plaknē iegūst izolētus punktus (5.2. zīm.).

Piemēram, $a_n = \frac{1}{n^2}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Skaitlim $\varepsilon = 0,1$ $N = 3$, jo, sākot ar $a_4 = \frac{1}{16}$, visi virknes locekļi atradīsies intervālā (-0,1;0,1) (5.1. zīm.).


**5.1. zīm.**

**5.1. piemērs.** Lietojot virknes robežas definīciju, pierādīt, ka

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{4n-1} = \frac{1}{2}.$$

Skaitlim $\varepsilon = 0,1$ atrast atbilstošo $N$.

Pārveido starpību

$$\left|a_n - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2n+3}{4n-1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{4n+6-4n+1}{2(4n-1)}\right| = \frac{7}{2(4n-1)}.$$

Atrisina nevienādību

$$\frac{7}{2(4n-1)} < \varepsilon$$

attiecībā pret $n$:

$$n > \frac{7+2\varepsilon}{8\varepsilon}.$$

Ja izvēlas $N = \left[\frac{7+2\varepsilon}{8\varepsilon}\right]$, tad visiem $n > N$ izpildās nevienādība

$$\left|a_n - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon.$$

Tādējādi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

Piemēram, ja $\varepsilon = 0,1$, tad

$$N = \left[\frac{7+2\cdot 0,1}{8\cdot 0,1}\right] = \left[\frac{7,2}{0,8}\right] = 9.$$

Tas nozīmē, ka visi virknes locekļi, sākot ar 10., atrodas punkta $\frac{1}{2}\varepsilon$ - apkārtnē, t.i., intervālā $\left(\frac{2}{5}; \frac{3}{5}\right)$.

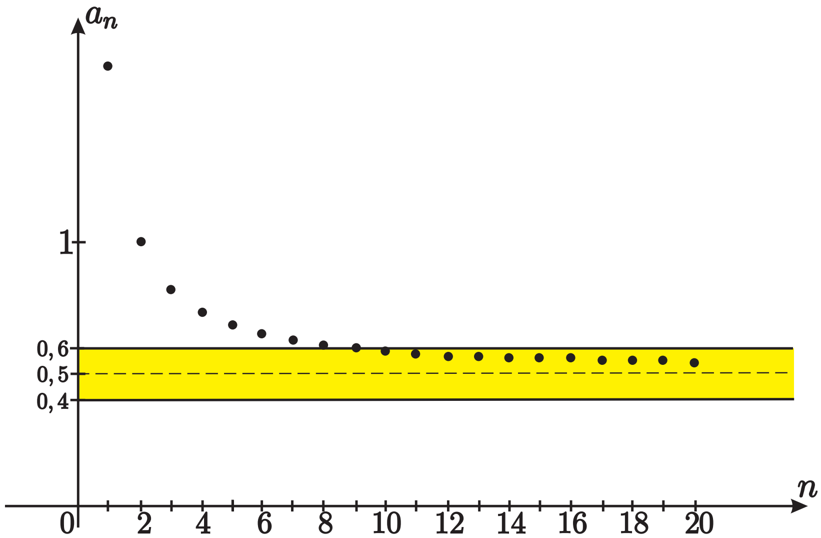
Dotās virknes robežas ģeometriskā interpretācija ir sniegta 5.2. zīm.

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 1,67 | 1 | 0,81 | 0,73 | 0,68 | 0,65 | 0,63 | 0,61 | 0,60 | 0,59 |

| $n$ | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 0,58 | 0,57 | 0,57 | 0,56 | 0,56 | 0,56 | 0,55 | 0,55 | 0,55 | 0,54 |

**5.2. piemērs.** Lietojot virknes robežas definīciju, pierādīt, ka

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n-2}-1}{\sqrt{n-2}-2} = 1.$$




**5.2. zīm.**

Pārveido starpību

$$|a_n - 1| = \left|\frac{\sqrt{n-2}-1}{\sqrt{n-2}-2} - 1\right| = \left|\frac{\sqrt{n-2}-1-\sqrt{n-2}+2}{\sqrt{n-2}-2}\right| =$$

$$= \frac{1}{\left|\sqrt{n-2}-2\right|} = \frac{1}{\sqrt{n-2}-2},$$

$n > 6$.

Atrisina nevienādību

$$\frac{1}{\sqrt{n-2}-2} < \varepsilon,$$

$$\sqrt{n-2} - 2 > \frac{1}{\varepsilon},$$

$$\sqrt{n-2} > \frac{1}{\varepsilon} + 2,$$

$$n - 2 > \left(\frac{1}{\varepsilon} + 2\right)^2,$$

$$n > \left(\frac{1}{\varepsilon} + 2\right)^2 + 2.$$

Ja izvēlas

$$N = \max\left\{\left[\left(\frac{1}{\varepsilon} + 2\right)^2 + 2\right]; 6\right\},$$

tad visiem $n > N$ izpildās nevienādība $|a_n - 1| < \varepsilon$. Tādējādi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

**5.3. piemērs.** Lietojot virknes robežas definīciju, pierādīt, ka

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{1-5^n} = -1.$$

Pārveido starpību

$$\left|a_n - (-1)\right| = \left|\frac{5^n + 1 - 5^n}{1-5^n}\right| = \frac{1}{5^n - 1}.$$

Atrisina nevienādību

$$\begin{aligned} \frac{1}{5^n-1} &< \varepsilon, \\ 5^n - 1 &> \frac{1}{\varepsilon}, \\ 5^n &> \frac{1}{\varepsilon} + 1, \\ n &> \log_5\left(\frac{1}{\varepsilon}+1\right). \end{aligned}$$

Ja izvēlas $N = \left[\log_5\left(\frac{1}{\varepsilon}+1\right)\right]$, tad visiem $n > N$ izpildās nevienādība $|a_n + 1| < \varepsilon$, tādējādi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -1$.

## Auditorijā risināmie uzdevumi

Lietojot virknes robežas definīciju, pierādīt dotās vienādības. Skaitlim $\varepsilon = 0,1$ atrast atbilstošo $N$.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{3n+1} = \dfrac{1}{3}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-4}{n+1} = 3$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2-1}{4n^2+1} = \dfrac{3}{4}$;
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}-2}{\sqrt{n+1}+2} = 1$;
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n-2}{3^n} = 1$.

**Mājas darba uzdevumi**

Lietojot virknes robežas definīciju, pierādīt dotās vienādības. Skaitlim $\varepsilon = 0,1$ atrast atbilstošo $N$.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-7}{2n+13} = \dfrac{3}{2}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1} = 1$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{9-n^3}{1+2n^3} = -\dfrac{1}{2}$;
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{1-2^n} = -1$;
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2}{2-n^2} = -3$.

# 6. Funkcijas robeža

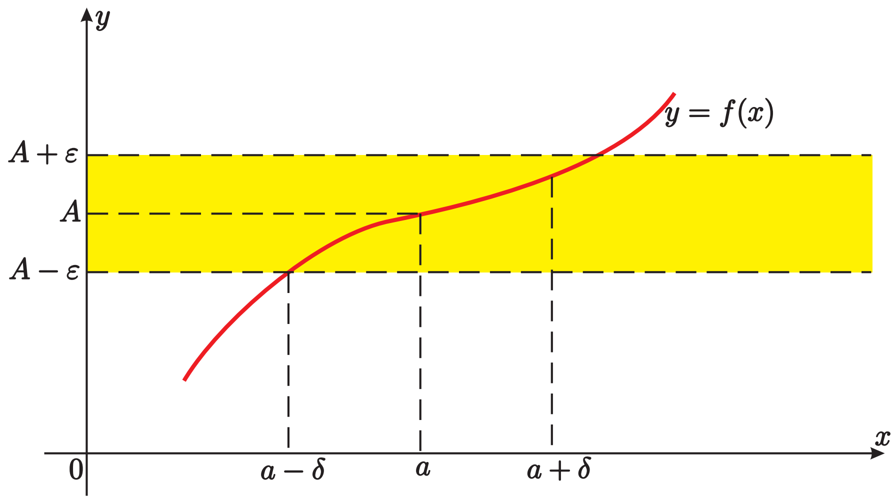
## 6.1. Funkcijas galīga robeža

**6.1. definīcija.** Skaitli $A$ sauc par **funkcijas $f$ robežu punktā $a$** ($a \in \mathbb{R}$), ja jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds $\delta > 0$ (atkarīgs no $\varepsilon$), ka visiem $x$, kuriem $0 < |x-a| < \delta$, izpildās nevienādība

$$\big|f(x) - A\big| < \varepsilon.$$

No ģeometriskā viedokļa tas nozīmē: lai cik šaura arī nebūtu horizontālā josla starp taisnēm $y = A - \varepsilon$ un $y = A + \varepsilon$, funkcijas grafiks, izņemot varbūt punktu $\big(a; f(a)\big)$, visiem $x \in (a-\delta; a+\delta)$ atrodas šajā joslā (6.1. zīm.).

Raksta: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.




**6.1. zīm.**

**6.1. piemērs.** Lietojot funkcijas robežas definīciju, pierādīt, ka

$$\lim_{x\to 1}(5x-4) = 1.$$

Skaitlim $\varepsilon = 0,5$ atrast atbilstošo $\delta$. Sniegt ģeometrisko interpretāciju.

Pārveido starpību

$$|f(x) - A| = |5x - 4 - 1| = 5|x - 1|.$$

Atrisina nevienādību $5|x-1| < \varepsilon$ attiecībā pret $|x-1|$:

$$|x - 1| < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Tādējādi var ņemt $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$.

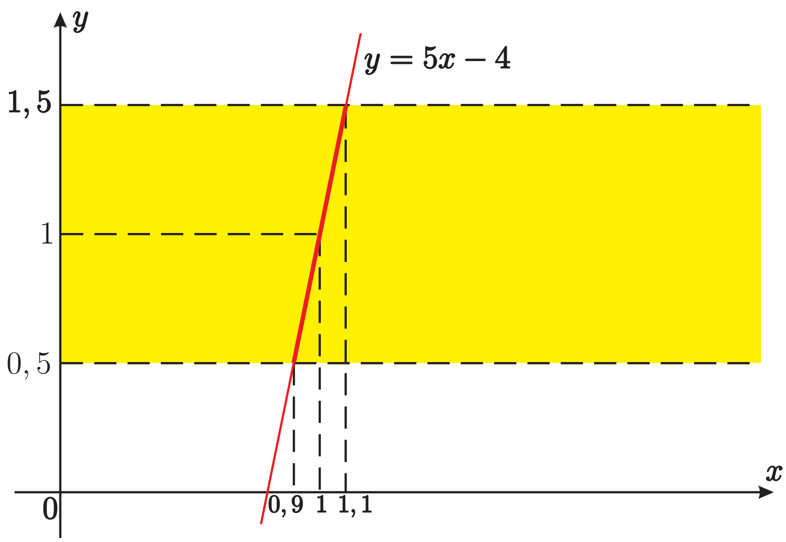
Tātad jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tam atbilstošais $\delta = \frac{\varepsilon}{5} > 0$, ka visiem $x$, kuriem $0 < |x-1| < \delta$, t.i., $0 < |x-1| < \frac{\varepsilon}{5}$, izpildās nevienādība

$$|f(x) - A| = |5x - 4 - 1| = 5|x - 1| < 5\,\frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon.$$

Saskaņā ar funkcijas robežas definīciju $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$

$$\lim_{x\to 1}(5x-4) = 1.$$

Ja $\varepsilon = 0,5$, tad $\delta = \frac{0{,}5}{5} = 0,1$.




**6.2. zīm.**

**6.2. piemērs.** Lietojot funkcijas robežas definīciju, pierādīt, ka

$$\lim_{x\to 3}(x^2-2)=7.$$

Skaitlim $\varepsilon = 0,001$ atrast atbilstošo $\delta$.

Pārveido starpību

$$\begin{aligned}\big|f(x)-A\big| &= |x^2-2-7| = |x^2-9| = |x-3|\cdot|x+3| = \\ &= |x-3|\cdot\big|(x-3)+6\big| \le |x-3|\cdot\big(|x-3|+6\big) = \\ &= |x-3|^2+6|x-3|.\end{aligned}$$

Atrisina nevienādību

$$|x-3|^2+6|x-3|<\varepsilon$$

attiecībā pret $|x-3|$.

Ja $|x-3|$ apzīmē ar $k$, tad iegūst nevienādību

$$k^2+6k-\varepsilon<0.$$

Atbilstošā kvadrātvienādojuma

$$k^2+6k-\varepsilon=0$$

saknes ir $k_1=-3-\sqrt{9+\varepsilon}$ un $k_2=-3+\sqrt{9+\varepsilon}$.

Nevienādības

$$k^2+6x-\varepsilon<0$$

atrisinājums ir

$$-3-\sqrt{9+\varepsilon}<k<-3+\sqrt{9+\varepsilon}.$$

Tādējādi

$$-3-\sqrt{9+\varepsilon}<|x-3|<-3+\sqrt{9+\varepsilon}.$$

Tā kā

$$-3-\sqrt{9+\varepsilon}<0,$$

tad

$$0<|x-3|<-3+\sqrt{9+\varepsilon}.$$

Tātad var ņemt $\delta=-3+\sqrt{9+\varepsilon}$.

Kādu arī neizvēlētos $\varepsilon>0$, eksistē tam atbilstošais $\delta=-3+\sqrt{9+\varepsilon}$, ka visiem $x$, kuriem

$$0<|x-3|<-3+\sqrt{9+\varepsilon},$$

izpildās nevienādība

$$|f(x)-A|=|x^2-2-7|<\varepsilon.$$

Saskaņā ar funkcijas robežas definīciju

$$\lim_{x\to 3}(x^2-2)=7.$$

**Auditorijā risināmie uzdevumi**

Lietojot funkcijas robežas definīciju, pierādīt dotās vienādības. Skaitlim $\varepsilon=0,1$ atrast atbilstošo $\delta$.

1.

$(a)$ $\lim\limits_{x\to 2}(2x-1)=3$; $(b)$ $\lim\limits_{x\to 4}\left(5-\dfrac{x}{4}\right)=4$;

$(c)$ $\lim\limits_{x\to 1}(5-3x^2)=2$; $(d)$ $\lim\limits_{x\to 4}(x^2-4x+5)=5$.

2. Lietojot funkcijas robežas definīciju, pārbaudīt, vai ir pareiza vienādība $\lim\limits_{x\to 1}(3x+2)=-1$.

**Mājas darba uzdevumi**

Lietojot funkcijas robežas definīciju, pierādīt dotās vienādības. Skaitlim $\varepsilon=0,5$ atrast atbilstošo $\delta$.

1. $\lim\limits_{x\to -1}(3x+5)=2$; 2. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x}{3}+4\right)=5$;

3. $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2-3)=-1$; 4. $\lim\limits_{x\to 5}(x^2-5x+6)=6$.

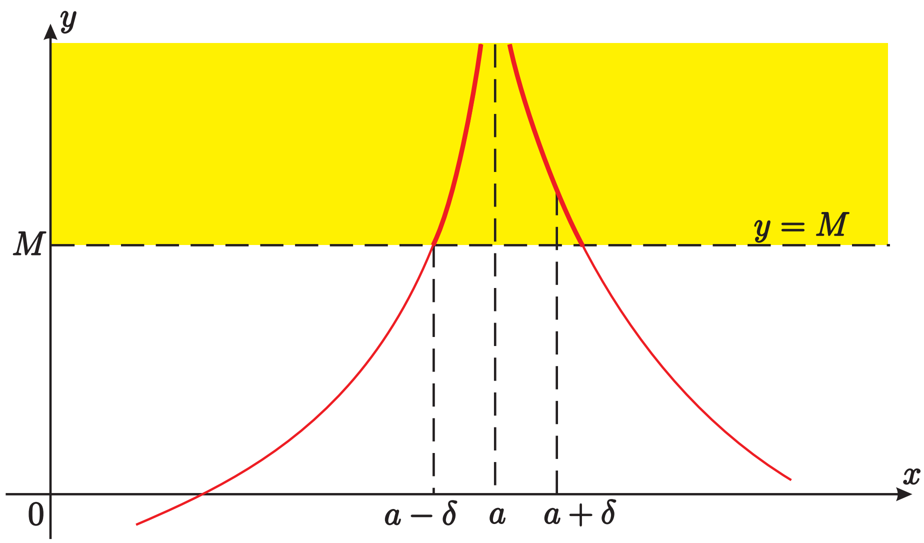
## 6.2. Funkcijas bezgalīga robeža

Apskata gadījumu, kad $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ir bezgalība. Atkarībā no tā, vai $a$ ir skaitlis vai viens no simboliem "bezgalība" (plus bezgalība, mīnus bezgalība, bezgalība bez zīmes), ir iespējami 12 gadījumi.

Piemēram, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, $a \in \mathbb{R}$.

Šoreiz simbolu $+\infty$ sauc par **funkcijas** $f(x)$ **robežu punktā** $a$, ja jebkuram skaitlim $M > 0$ eksistē tāds $\delta > 0$, ka visiem $x$, kuriem $0 < |x - a| < \delta$, izpildās nevienādība $f(x) > M$.

Ģeometriski tas nozīmē: lai cik liels arī nebūtu skaitlis $M > 0$, eksistē tāds intervāls $(a - \delta; a + \delta)$, ka visiem $x$ no šī intervāla funkcijas grafiks atrodas virs taisnes $y = M$ (6.3. zīm.).




**6.3. zīm.**

Piemēram, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$.

Šoreiz simbolu $\infty$ sauc par **funkcijas** $f(x)$ **robežu punktā** $-\infty$, ja jebkuram skaitlim $M > 0$ eksistē tāds skaitlis $N > 0$, ka visiem $x$, kuriem $x < -N$, izpildās nevienādība $\left|f(x)\right| > M$.

Ģeometriski tas nozīmē: lai cik liels arī nebūtu $M > 0$, eksistē tāds intervāls $(-\infty; -N)$, ka visiem $x$, kas pieder šim intervālam, funkcijas grafiks atrodas zem taisnes $y = -M$ vai virs taisnes $y = M$.

**6.3. piemērs.** Lietojot funkcijas robežas definīciju, pierādīt, ka

$$\lim_{x \to -2} \frac{1}{2 + x} = \infty.$$

Skaitlim $M = 5$ atrast atbilstošo $\delta$.

Izvēlas patvaļīgu skaitli $M > 0$, apskata nevienādību

$$\left|\frac{1}{2+x}\right| > M$$

un atrisina to attiecībā pret $|x+2|$:

$$|x+2| < \frac{1}{M}.$$

Tādējādi $\delta = \frac{1}{M}$.

Kādu arī neizvēlētos $M > 0$, eksistē $\delta = \frac{1}{M} > 0$, ka visiem $x$, kuriem $0 < |x+2| < \delta$, izpildās nevienādība

$$\big|f(x)\big| = \frac{1}{|x+2|} > \frac{1}{\delta} = M.$$

Tādējādi

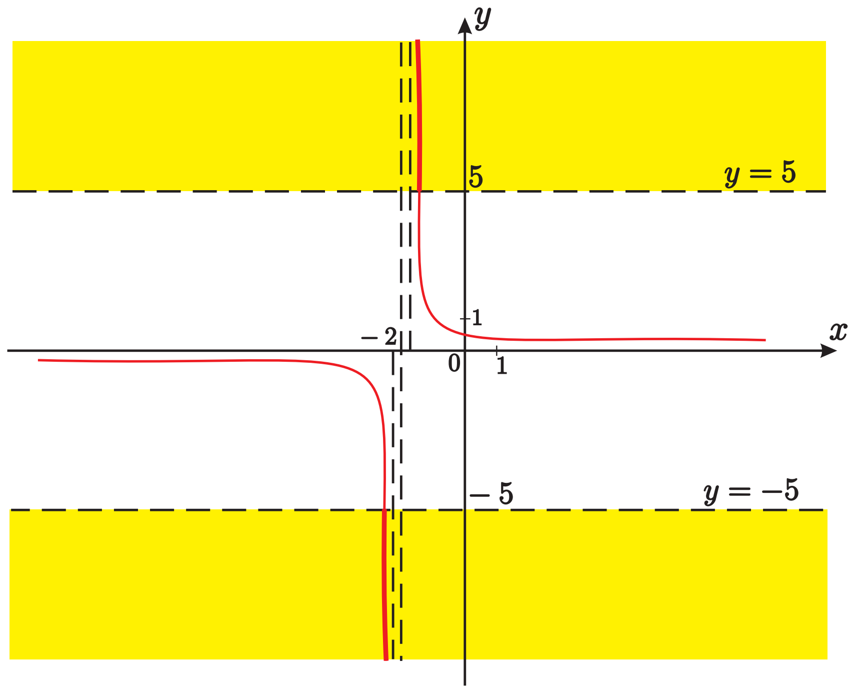
$$\lim_{x \to -2} f(x) = \infty.$$

Ja $M = 5$, tad $\delta = \frac{1}{5}$.

Ģeometriski tas nozīmē, ka visiem $x$, kas pieder intervālam

$$\left(-2 - \frac{1}{5}; -2 + \frac{1}{5}\right) = (-2,2; -1,8),$$

funkcijas grafiks atrodas zem taisnes $y = -5$ vai virs taisnes $y = 5$ (6.4. zīm.).




**6.4. zīm.**

**6.4. piemērs.** Lietojot funkcijas robežas definīciju, pierādīt, ka

$$\lim_{x\to\infty}(x^2-1)=+\infty.$$

Izvēlas patvaļīgu skaitli $M>0$, apskata nevienādību

$$x^2-1>M$$

un atrisina to attiecībā pret $|x|$:

$$x^2>M+1,$$

$$|x|>\sqrt{M+1},$$

tādējādi

$$N=\sqrt{M+1}.$$

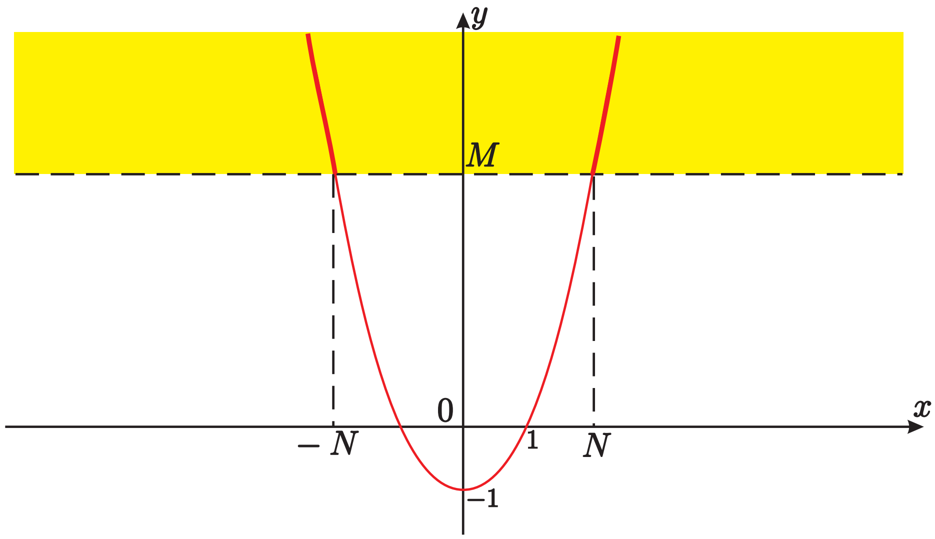
Kādu arī neizvēlētos $M>0$, eksistē tāds $N=\sqrt{M+1}>0$, ka visiem $x$, kuriem $|x|>\sqrt{M+1}$, izpildās nevienādība:

$$f(x)=x^2-1>\left(\sqrt{M+1}\right)^2-1=M.$$

Tādējādi

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=+\infty.$$

(6.5. zīm.).




**6.5. zīm.**

## Auditorijā risināmie uzdevumi

Lietojot funkcijas robežas definīciju, pierādīt:

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2}{x+1}=\infty$;
2. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{5}{2x-1}=\infty$;
3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{(x-2)^2}=+\infty$;
4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{(x-1)^3}=-\infty$;
5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x^2-1}=\infty$;
6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}=+\infty$;
7. $\lim\limits_{x\to -\infty}(x^2+1)=+\infty$;
8. $\lim\limits_{x\to \infty}(x^3-1)=\infty$;
9. $\lim\limits_{x\to 0}2^{\frac{1}{x^2}}=+\infty$.

## Mājas darba uzdevumi

Lietojot funkcijas robežas definīciju, pierādīt:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3}{2-x}=\infty$;
2. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\dfrac{2}{1+3x}=\infty$;
3. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{(4-x)^2}=+\infty$;
4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5}{(2-x)^5}=\infty$;
5. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2}{x^2-4}=\infty$;
6. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}}=+\infty$;
7. $\lim\limits_{x\to +\infty}(1-x^2)=-\infty$;
8. $\lim\limits_{x\to \infty}(1-x^4)=-\infty$;
9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-e^{\frac{1}{x^2}}\right)=-\infty$.

# 7. Robežu izskaitļošana

Robežu izskaitļošanai izmanto šādas galīgu robežu īpašības.

1. Ja eksistē galīga robeža $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ $(A \in \mathbb{R})$, tad $f$ ir ierobežota funkcija punkta $x = a$ apkārtnē.

2. Ja funkcija $f$ ir konstanta punkta $x = a$ apkārtnē, t.i., visiem $x \in U(a)$ $f(x) = k$ – const, tad $\lim\limits_{x\to a} f(x) = k$.

3. Ja funkcijai $f$ eksistē galīga robeža $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, tad eksistē arī robeža šīs funkcijas modulim $|f|$, pie tam $\lim\limits_{x\to a}\big|f(x)\big| = |A|$.

4. Ja $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ $(a \in \mathbb{R})$, tad $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x) - A\big) = 0$.

5. Ja eksistē galīgas robežas $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A_1$ un $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A_2$, tad eksistē galīga robeža šo funkciju summai, pie tam
$$\lim_{x\to a}\big(f(x) + g(x)\big) = A_1 + A_2.$$

6. Ja eksistē galīga robeža $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, tad eksistē galīga robeža šīs funkcijas reizinājumam ar konstanti $k$, pie tam $\lim\limits_{x\to a}\big(kf(x)\big) = kA$.

7. Ja funkcija $f$ definēta un ierobežota punkta $x = a$ kādā apkārtnē un funkcijai $g$ eksistē robeža $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, tad eksistē robeža šo funkciju reizinājumam, pie tam
$$\lim_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = 0.$$

8. Ja eksistē galīgas robežas $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A_1$ un $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A_2$, tad eksistē galīga robeža šo funkciju reizinājumam, pie tam
$$\lim_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = A_1 \cdot A_2.$$

9. Ja eksistē galīgas robežas $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A_1$ un $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A_2$, pie tam $A_2 \neq 0$, tad eksistē galīga robeža funkcijai $\frac{f}{g}$, pie tam
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{A_2}.$$

10. Ja eksistē robežas $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = b$, $\lim\limits_{u\to b} f(u) = B$ un salikta funkcija $f\big(\varphi(x)\big)$ ir definēta punkta $x = a$ pārdurtā apkārtnē, pie tam šajā apkārtnē $\varphi(x) \neq b$, tad punktā $x = a$ eksistē robeža saliktai funkcijai $f\big(\varphi(x)\big)$, un šī robeža ir $B$, t.i.,

$$\lim_{x\to a} f\big(\varphi(x)\big) = B.$$

Tā kā virkne ir funkcijas īpašs gadījums, tad visas šīs īpašības ir spēkā arī virknēm.

Var būt gadījumi, kad robežu izskaitļošana, izmantojot iepriekš uzskaitītās īpašības, nav iespējama.

1. Ja
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\varphi(x) = 0,$$
tad robežas
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$$
gadījumā 9. īpašību pielietot nedrīkst un runā par "$\frac{0}{0}$" veida nenoteiktību.

2. Ja
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\varphi(x) = \infty,$$
tad robežas
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$$
gadījumā sastopas ar "$\frac{\infty}{\infty}$" veida nenoteiktību.

3. Skaitļojot robežu $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x) - \varphi(x)\big)$, kur $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ un $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$ ir bezgalības ar vienādām zīmēm, sastopas ar "$\infty - \infty$" veida nenoteiktību.

4. Eksistē nenoteiktības, kas ir sastītas ar $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\big)^{\varphi(x)}$ atrašanu $(1^\infty, 0^0, \infty^0)$.

Nenoteiktības var novērst,

1. veicot algebriskus vai trigonometriskus pārveidojumus (funkciju sadalot reizinātājos vai saskaitāmajos, vienādojot daļu saucējus, atņemot vai pieskaitot kādu izteiksmi, dalot un reizinot ar kādu funkciju, iznesot kopīgo reizinātāju pirms iekavām, utt.),

2. atsevišķas funkcijas aizstājot ar ekvivalentām bezgalīgi mazām funkcijām,

3. izmantojot tā saucamās "ievērojamās robežas":

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$,

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$,

   $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$,

   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$,

   $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$,

   (d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a \quad (a > 0)$,

   $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$,

   (e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha$.

Nenoteiktību "$0 \cdot \infty$" viegli var pārveidot par vienu no nenoteiktībām "$\frac{0}{0}$" vai "$\frac{\infty}{\infty}$". Piemēram, ja $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ un $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \infty$, tad reizinājumu $f \cdot \varphi$ pārveido šādi:

$$f \cdot \varphi = \frac{f}{\frac{1}{\varphi}}.$$

Tādā veidā nenoteiktība "$0 \cdot \infty$" tiek pārveidota par nenoteiktību "$\frac{0}{0}$".

Nenoteiktību "$\infty - \infty$" var pārveidot par nenoteiktību "$\frac{0}{0}$" šādi:

$$f - \varphi = \frac{\frac{1}{\varphi} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{f\cdot\varphi}}.$$

Lietojot logaritmēšanu, nenoteiktības "$1^\infty$", "$0^0$", "$\infty^0$" var pārveidot par nenoteiktību "$0\cdot\infty$". Par šāda veida nenoteiktību tās var arī pārveidot, uzrakstot funkciju $f^\varphi$ šādi:

$$f^\varphi = e^{\varphi \ln f}.$$

**7.1. piemērs.** Atrast

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x^2 - 4}.$$

Tā kā

$$\lim_{x\to 2} (x^3 - 4x^2 + x + 6) = 0$$

un

$$\lim_{x\to 2}(x^2-4)=0,$$

tad šajā piemērā sastopas ar nenoteiktību "$\frac{0}{0}$". Lai to novērstu, sadala skaitītāju un saucēju reizinātājos, saīsina daļu ar $(x-2)$ (kas šoreiz tiecas uz 0), un nenoteiktība tiek novērsta:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-4x^2+x+6}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2-2x-3)}{(x-2)(x+2)}=$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x-3}{x+2}=-\frac{3}{4}.$$

**7.2. piemērs.** Atrast

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+5x}-\sqrt{1+3x}}{x}.$$

Šis piemērs satur nenoteiktību "$\frac{0}{0}$". Lai to novērstu, "pārnes" iracionalitāti no daļas skaitītāja uz saucēju, reizinot skaitītāju un saucēju ar skaitītājam saistīto izteiksmi, t.i., ar $\left(\sqrt{1+5x}+\sqrt{1+3x}\right)$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+5x}-\sqrt{1+3x}}{x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+5x}-\sqrt{1+3x}\right)\left(\sqrt{1+5x}+\sqrt{1+3x}\right)}{x\left(\sqrt{1+5x}+\sqrt{1+3x}\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+5x-1-3x}{x\left(\sqrt{1+5x}+\sqrt{1+3x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x\left(\sqrt{1+5x}+\sqrt{1+3x}\right)}=$$
$$=2\cdot\frac{1}{2}=1.$$

**7.3. piemērs.** Atrast

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{10-x}-2}{x-2}.$$

Šis piemērs satur nenoteiktību "$\frac{0}{0}$". Lai to novērstu, skaitītāju papildina līdz divu skaitļu kubu starpībai, reizinot daļas skaitītāju un saucēju ar $\left(\sqrt[3]{(10-x)^2}+2\sqrt[3]{10-x}+4\right)$ (skat.[5]; tādā veidā iracionalitāte no

[5]Tiek izmantota formula $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$.

skaitītāja tiek “pārnesta” uz saucēju):

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{10-x}-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt[3]{10-x}\right)\left(\left(\sqrt[3]{10-x}\right)^2+2\sqrt[3]{10-x}+4\right)}{(x-2)\left(\left(\sqrt[3]{10-x}\right)^2+2\sqrt[3]{10-x}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{10-x-8}{(x-2)\left(\left(\sqrt[3]{10-x}\right)^2+2\sqrt[3]{10-x}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)}{(x-2)\left(\left(\sqrt[3]{10-x}\right)^2+2\sqrt[3]{10-x}+4\right)}=-\frac{1}{12}.$$

**7.4. piemērs.** Atrast

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x+5}{3x^3-x^2+3}.$$

Šis piemērs satur nenoteiktību “$\frac{\infty}{\infty}$”. Lai to novērstu, skaitītāja un saucēja polinomus jādala ar $x$ augstāko pakāpi (šoreiz ar $x^3$):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x+5}{3x^3-x^2+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x^3}}{3-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^3}}=\frac{2+0+0}{3-0+0}=\frac{2}{3}.$$

**7.5. piemērs.** Atrast $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-3}\right)$.

Šis piemērs satur nenoteiktību “$\infty-\infty$”. Lai to novērstu, doto funkciju reizina un dala ar tās saistīto izteiksmi, t.i., ar $\left(x+\sqrt{x^2-3}\right)$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-3}\right)\left(x+\sqrt{x^2-3}\right)}{x+\sqrt{x^2-3}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x^2+3}{x+\sqrt{x^2-3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x+\sqrt{x^2-3}}=0.$$

**7.6. piemērs.** Atrast $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

Šis piemērs satur nenoteiktību “$\frac{0}{0}$”. Lai to novērstu, iepriekš izsakot $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$, izmanto pirmo ievērojamo robežu, t.i.,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\,.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2\cdot 4}=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}.$$

**7.7. piemērs.** Atrast $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^x$.

Šis piemērs satur nenoteiktību "$1^\infty$". Lai to novērstu, izmanto otro ievērojamo robežu, t.i.,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{-x^2}\right)^{-x^2}\right)^{\frac{x}{-x^2}}=e^{-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=e^0=1$$

(skat. [6]).

**7.8. piemērs.** Atrast $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.

Šis piemērs satur nenoteiktību "$1^\infty$". lai to novērstu, izmanto otro ievērojamo robežu. Uzdevumu var atrisināt ar diviem paņēmieniem.

**1. paņēmiens.**

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^x\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{2x+1}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{3}{2x}}{1+\frac{1}{2x}}\right)^x\cdot 1=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{\frac{2x}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{e^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}}=e.$$

**2. paņēmiens.**

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^x\cdot 1=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}}\right)^{\frac{2}{2x+1}\cdot x}=$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{2x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{2x}}}=e^1=e.$$

[6]Tiek izmantota eksponentfunkcijas nepārtrauktība.

**7.9. piemērs.** Atrast $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}$.

Šis piemērs satur nenoteiktību "$1^\infty$". Lai to novērstu, izmanto otro ievērojamo robežu, šoreiz

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

$$\lim_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left((1-3x)^{\frac{1}{-3x}}\right)^{-3x\cdot\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left((1-3x)^{-\frac{1}{3x}}\right)^{-3} = e^{-3}.$$

**7.10. piemērs.** Atrast $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$.

Šis piemērs satur nenoteiktību "$0\cdot\infty$".

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} = \left|\begin{array}{c}\text{Apzīmē } 1-x=t,\ \text{tad } x=1-t,\\ \operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}(1-t) = \\ = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}t\right) = \operatorname{ctg}\frac{\pi t}{2}.\\ \text{Ja } x\to 1,\ \text{tad } t\to 0.\end{array}\right| =$$

$$= \lim_{t\to 0}\left(t\operatorname{ctg}\frac{\pi t}{2}\right) = (0\cdot\infty) = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\operatorname{tg}\frac{\pi t}{2}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{t\to 0}\frac{t\frac{\pi}{2}}{\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}t\right)\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

(skat. [7])

**7.11. piemērs.** Atrast $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{\sin 3x}$.

Šis piemērs satur nenoteiktību "$\frac{0}{0}$". Lai to novērstu, lieto robežu $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ un pirmo ievērojamo robežu:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+2x)}{2x}2x}{\frac{\sin 3x}{3x}3x} = \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+2x)}{2x}}{\frac{\sin 3x}{3x}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1} = \frac{2}{3}.$$

[7] Tiek izmantota robeža $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\frac{\pi t}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\pi t}{2}} = 1$.

### Auditorijā risināmie uzdevumi

Atrast robežas

1. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+5x-3}{\log_2(x^2+1)}$;

2. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x}{\lg|x|} + 2\cos x\right)$;

3. $\lim\limits_{x\to +\infty} (\lg x - 2^{-x})$;

4. $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x + \sin x}{\cos 2x}$;

5. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$;

6. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3-x}{x^3-27}$;

7. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$;

8. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x^2+2x-1}{-x^2+x+2}$;

9. $\lim\limits_{x\to -2} \left(\dfrac{1}{2+x} - \dfrac{12}{8+x^3}\right)$;

10. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}$;

11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3-\sqrt{x+9}}{x}$;

12. $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x+5}{\sqrt{x+30}+x}$;

13. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{\sqrt{x+2}-2}$;

14. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{2+x}$;

15. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$;

16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$;

17. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^3+1}{3x^4+2x^2-1}$;

18. $\lim\limits_{n\to \infty} \dfrac{0,1n^5-n^3+1}{2n^3+3n^2}$;

19. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{(2x-3)(3x+5)(4x-6)}{3x^3+x-1}$;

20. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^3+10}}$;

21. $\lim\limits_{n\to \infty} \dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$;

22. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(x - \dfrac{x^3}{x^2+1}\right)$;

23. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x-3}-\sqrt{x}\right)$;

24. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(x-\sqrt{2x-3}\right)$;

25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 15x}{5x}$;

26. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x+2)}{x+2}$;

27. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{x}$;

28. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{x}$;

29. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 5x}$;

30. $\lim\limits_{x\to 0} (4x \operatorname{ctg} x)$;

31. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{1-\cos x}$;

32. $\lim\limits_{x\to \infty} \left((x-3)\sin\dfrac{2}{3x}\right)$;

33. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{ctg} x}{\frac{\pi}{2}-x}$;

34. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x}{\arcsin 12x}$;

35. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\operatorname{arctg}(x+2)}{4-x^2}$;

36. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\operatorname{tg}\pi x}{x+2}$;

37. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\operatorname{ctg} 2x \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\right)$;

38. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}$;

39. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$;

40. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{x}$;

41. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}$;

42. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x+7}{x+1}\right)^{x}$;

43. $\lim\limits_{n\to \infty} \left(\dfrac{n^2-9}{2+n^2}\right)^{n^2-3}$;

44. $\lim\limits_{x\to \infty} \sqrt[3]{\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{x}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)}$;

45. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{5x^3+2}{5x^3}\right)^{\sqrt{x}}$;

46. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^2+5x-3}{x^2-2}\right)^{\frac{x}{3}}$;

47. $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{2}{x}}$;

48. $\lim\limits_{x\to 0} (1-3x)^{\frac{1}{x}}$;

49. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{7x+3}{9x+3}\right)^{\frac{1}{x}}$;

50. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1-4x}{1+2x}\right)^{\frac{9}{4x}}$;

51. $\lim\limits_{x\to 0} (1+x+x^2)^{\frac{1}{\sin x}}$;

52. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$;

53. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos^2 x)^{\frac{1}{2x}}$;

54. $\lim\limits_{x\to 1} (7-6x)^{\frac{x}{3x-3}}$;

55. $\lim\limits_{n\to \infty} \Big(5n\big(\ln(n-9)-\ln(n+4)\big)\Big)$;

56. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5\big(\ln(3-7x)-\ln 3\big)}{3x}$;

57. $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{\ln x - 1}{x-e}$;

58. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x}-1}{4x}$;

59. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{8^x-6^x}{x}$.

## Mājas darba uzdevumi

Atrast robežas

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{x^3+5x-2}$;

2. $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(2+\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}-\dfrac{2}{x^3}\right)$;

3. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)}{\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)}$;

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3-x^2+2x}{x^2+x}$;

5. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} \dfrac{2x^2-7x-4}{-2x^2+5x+3}$;

6. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{3}{x^3-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$;

7. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+1}{x+\sqrt{x+2}}$;

8. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2-\sqrt{6+x}}{\sqrt{7-x}-3}$;

9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1-x^2}-1}{x^2-3x}$;

10. $\lim\limits_{x\to64}\dfrac{\sqrt{x}-8}{4-\sqrt[3]{x}}$;

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x+1}{3x+7}$;

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x+3}{x^3-8x+5}$;

13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$;

14. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{3\sin^2\frac{x}{2}}$;

15. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 3x}{\operatorname{tg}^2 6x}$;

16. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(1-x)}{x^2-1}$;

17. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x-\sin 2x}$;

18. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 7x-\sin 2x}{\sin x}$;

19. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos x}$;

20. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\arcsin 3x}$;

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-1}{8+3n}\right)^{\frac{n+3}{4}}$;

22. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{x-1}\right)^{x}$;

23. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2}$;

24. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+3}\right)$;

25. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{n}$;

26. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$;

27. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1}$;

28. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+4x}{1-11x}\right)^{\frac{4}{3x}}$;

29. $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$;

30. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{\sin x}{x}}$;

31. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(7x+2)-\ln 2}{5x}$;

32. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-e^{5x}}{x}$;

33. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-4^x}{1-e^x}$;

34. $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x^3-3}{x-e}$;

35. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{5^x-1}$.

## 8. Bezgalīgi mazas funkcijas un to salīdzināšana

**8.1. definīcija.** Funkciju $\alpha$ sauc par **bezgalīgi mazu funkciju punktā** $a$, ja $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$.

Pieņemsim, ka $\alpha$ un $\beta$ ir bezgalīgi mazas funkcijas punktā $a$.

Apzīmē

$$c = \lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}.$$

1. Ja $c = 0$, tad $\alpha$ sauc par **augstākas kārtas bezgalīgi mazu funkciju, salīdzinot ar $\beta$, kad $x \to a$**, un raksta: $\alpha = o(\beta)$ (skat. [8]).

2. Ja $c \neq 0$, un $c \in \mathbb{R}$, tad $\alpha$, $\beta$ sauc par **vienādas kārtas bezgalīgi mazām funkcijām, kad $x \to a$**.

   Pie tam, ja $c = 1$, t.i., ja

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1,$$

   tad $\alpha$ un $\beta$ sauc par **ekvivalentām bezgalīgi mazām funkcijām, kad $x \to a$**, un raksta: $\alpha \sim \beta$ $(x \to a)$.

**8.2. definīcija.** Funkciju $\alpha$ sauc par **$k$-tās kārtas bezgalīgi mazu funkciju, salīdzinot ar bezgalīgi mazu funkciju $\beta$, kad $x \to a$**, ja $\alpha$ un $\beta^k$ ir vienādas kārtas bezgalīgi mazas funkcijas, kad $x \to a$.

**8.1. piemērs.** Salīdzināt bezgalīgi mazas funkcijas:

1. $\alpha(x) = \sqrt{2+x} - \sqrt{2}$ un $\beta(x) = x$, kad $x \to 0$;
2. $\alpha(x) = \operatorname{tg} x$ un $\beta(x) = x$, kad $x \to 0$;
3. $\alpha(x) = \sin^3 x$ un $\beta(x) = x$, kad $x \to 0$.

1. Atrodam doto bezgalīgi mazo funkciju attiecības robežu, kad $x \to 0$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{2+x} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2+x} + \sqrt{2}\right)}{x\left(\sqrt{2+x} + \sqrt{2}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2+x-2}{x\left(\sqrt{2+x} + \sqrt{2}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{2+x} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

   Tātad dotās funkcijas ir vienādas kārtas bezgalīgi mazas funkcijas, kad $x \to 0$.

[8] Lasa: $\alpha$ ir omikrons no $\beta$.

2. Atrod
$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=1.$$
Dotās funkcijas ir ekvivalentas bezgalīgi mazas funkcijas, kad $x\to 0$, t.i., $\operatorname{tg}x\sim x$ $(x\to 0)$.

3. Atrod
$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\sin^2 x\right)=0.$$
Funkcija $\alpha(x)=\sin^3 x$ ir augstākas kārtas bezgalīgi maza funkcija, salīdzinot ar $\beta(x)=x$, kad $x\to 0$.

Tā kā
$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta^3(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{x^3}=1,$$
tad $\alpha$ ir 3. kārtas bezgalīgi maza funkcija, salīdzinot ar $\beta$, kad $x\to 0$.

Izskaitļojot robežas, dažkārt ir izdevīgi bezgalīgi mazās funkcijas aizstāt ar tām ekvivalentām funkcijām. Tāda pieeja vienkāršo robežu atrašanu.

**8.2. piemērs.** Atrast robežu $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{1-\cos 5x}$.

Piemērā ir dota divu bezgalīgi mazu funkciju $\sin^2 3x$ un $1-\cos 5x$, kad $x\to 0$, attiecība. Lai atrastu šo robežu, šīs bezgalīgi mazās funkcijas, kad $x\to 0$, aizstāj ar tām ekvivalentām bezgalīgi mazām funkcijām:
$$\sin^2 3x\sim(3x)^2\quad \text{un}\quad 1-\cos 5x\sim 2\left(\frac{5x}{2}\right)^2\quad(x\to 0),$$
jo
$$1-\cos 5x=2\sin^2\frac{5x}{2}.$$
Tādējādi
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{1-\cos 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{9x^2}{\frac{25x^2}{2}}=\frac{18}{25}.$$

## Auditorijā risināmie uzdevumi

1. Salīdzināt bezgalīgi mazo funkciju $\delta(x)=x^2$, kad $x\to 0$, ar šādām bezgalīgi mazām funkcijām:

(a) $\gamma(x) = \operatorname{tg}^3 3x$;

(b) $\gamma(x) = 2 - 2\cos x$;

(c) $\gamma(x) = \ln^2(1+3x)$.

2. Pierādīt, ka dotās bezgalīgi mazās funkcijas norādītajos punktos ir ekvivalentas:

   (a) $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{x}{2}$, kad $x \to 0$;

   (b) $\sin x + \operatorname{tg} x \sim 2x$, kad $x \to 0$;

   (c) $\frac{1-x}{1+x} \sim 1 - \sqrt{x}$, kad $x \to 1$.

3. Atrast robežas:

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 15x}{\operatorname{tg} 10x}$;

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$;

   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}^2 5x}{x \sin 2x}$;

   (d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin \sqrt[3]{x^4}}{x\sqrt{x}}$.

**Mājas darba uzdevumi**

Atrast robežas

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin \frac{x}{3}}{\operatorname{tg} 2x}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 + 2x^2}{\sin^2 \frac{x}{4}}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 5x}{2x - x^2}$;
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln^2(1+2x)}{\sin^2 6x}$.

# 9. Nepārtrauktas funkcijas

**9.1. definīcija.** Funkciju $f$ sauc par **nepārtrauktu punktā** $x_0 \in D(f)$, ja $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta f(x_0) = 0$, kur

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

ir funkcijas $f$ pieaugums punktā $x_0$.

**9.2. definīcija.** Funkciju $f$ sauc par **nepārtrauktu kopā** $E \subset D(f)$, ja tā ir nepārtraukta šīs kopas katrā punktā.

**9.3. definīcija.** Funkciju, kas ir nepārtraukta savā definīcijas apgabalā, sauc par **nepārtrauktu funkciju**.

**9.1. piemērs.** Pierādīt, ka funkcija $f(x) = 2 - x + x^2$ ir nepārtraukta punktā $x_0 = 1$.

$$\Delta f(1) = f(1+\Delta x) - f(1) = 2 - (1+\Delta x) + (1+\Delta x)^2 - (2-1+1) = \\ = \Delta x + \Delta x^2 = \Delta x(1 + \Delta x).$$

Atrod

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x(1 + \Delta x) = 0,$$

saskaņā ar definīciju funkcija $f(x) = 2-x+x^2$ ir nepārtraukta punktā $x_0 = 1$.

Ja ir jāpierāda funkcijas nepārtrauktība kādā kopā (vai definīcijas apgabalā), tad izvēlas patvaļīgu šīs kopas punktu $x_0$ un pierāda funkcijas nepārtrauktību šajā punktā.

**9.2. piemērs.** Pierādīt, ka $f(x) = \frac{1}{x+1}$ ir nepārtraukta funkcija.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Izvēlas patvaļīgu $x_0 \in D(f)$, atrod $\Delta f(x_0)$:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{1}{x_0 + \Delta x + 1} - \frac{1}{x_0 + 1} = \\ = \frac{-\Delta x}{(x_0 + 1)(x_0 + \Delta x + 1)}.$$

Tad

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{(x_0 + \Delta x + 1)(x_0 + 1)} = 0.$$

Tā kā $x_0$ ir patvaļīgs funkcijas definīcijas apgabala punkts, tad funkcija $f$ ir nepārtraukta funkcija.

**9.3. piemērs.** Pierādīt, ka $f(x) = \sin x$ ir nepārtraukta funkcija.

Pieņem, ka $x_0 \in D(f) = \mathbb{R}$.

$$\Delta f(x_0) = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left( x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right).$$

Atrod

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 2 \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) = 0,$$

jo

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \frac{\Delta x}{2} = 1 \cdot 0 = 0 \text{ un } \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

ir ierobežota funkcija.

Tātad $f(x) = \sin x$ ir nepārtraukta funkcija.

**Auditorijā risināmie uzdevumi**

Pierādīt, ka dotās funkcijas ir nepārtrauktas.

1. $f(x) = 2 - x^2$;
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$;
3. $f(x) = e^x$;
4. $f(x) = x - 1$.

**Mājas darba uzdevumi**

Pierādīt, ka dotās funkcijas ir nepārtrauktas.

1. $f(x) = 1 - x^3$;
2. $f(x) = \dfrac{1}{x + 3}$;
3. $f(x) = \sqrt[3]{2 + x}$;
4. $f(x) = \ln x$.

# 10. Vienpusējās robežas, to izskaitļošana. Funkcijas pārtraukuma punkti un to klasifikācija

## 10.1. Funkcijas vienpusējās robežas

**10.1. definīcija.** Punktu $A$ sauc par **funkcijas $f$ robežu punktā $x = a$ ($a \neq +\infty$) no labās puses**, ja punkta $A$ patvaļīgai apkārtnei $U(A)$ eksistē punkta $x = a$ tāda apkārtne $U(a)$, ka visiem $x > a$ un $x \in U(a)$ izpildās sakarība: $f(x) \in U(A)$.

Apzīmē:
$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x) = f(a+0).$$

Analogi definē arī funkcijas robežu punktā no kreisās puses. Acīmredzami, ja funkcijai $f$ punktā $a$ eksistē vienādas vienpusējās robežas, tad šajā punktā tai eksistē robeža, kas ir vienāda ar tās vienpusējām robežām. Ir spēkā arī apgrieztais apgalvojums.

**10.2. definīcija.** Funkciju $f$ sauc par **nepārtrauktu punktā** $a \in D(f)$ **no kreisās puses (no labās puses)**, ja
$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = f(a) \ \ \Big(\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = f(a)\Big).$$

**10.1. piemērs.**

1. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{4}{(x-2)^3} = +\infty,$

   jo $(x-2)^3$ ir pozitīva bezgalīgi maza funkcija, kad $x \to 2$;
$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{4}{(x-2)^3} = -\infty,$$
   jo $(x-2)^3$ ir negatīva bezgalīgi maza funkcija, kad $x \to 2$.

2. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \left(6^{\frac{1}{x}} + 5\right) = 5,$

   jo $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} 6^{\frac{1}{x}} = 0$ (ja $x \to 0$, bet $x < 0$, tad $\frac{1}{x}$ ir negatīva bezgalīgi liela funkcija);
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(6^{\frac{1}{x}} + 5\right) = +\infty,$$
   jo $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 6^{\frac{1}{x}} = +\infty$ (ja $x \to 0$, bet $x > 0$, tad $\frac{1}{x}$ ir pozitīva bezgalīgi liela funkcija).

3. $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x-1}, & \text{ja } x < 0, \\ 0, & \text{ja } x = 0, \\ x, & \text{ja } 0 < x < 1, \\ 2, & \text{ja } 1 \le x \le 2. \end{cases}$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \left(-\frac{1}{x-1}\right) = 1, \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x = 0,$$
$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x = 1, \qquad \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} 2 = 2.$$

**Auditorijā risināmie uzdevumi**

1. Atrast vienpusējās robežas funkcijām

   1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}-0} \operatorname{tg} 2x;$
   2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}+0} \operatorname{tg} 2x;$
   3. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \dfrac{\lg(2-x)}{2-x};$
   4. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \log_7 \log_4 x;$
   5. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}};$
   6. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}};$
   7. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\dfrac{1}{\log_3 x} + 2\arccos x\right).$

2. Atrast vienpusējās robežas punktos $x=0$ un $x=\frac{\pi}{2}$ funkcijai

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{ja } \ x<0, \\ \sin x, & \text{ja } \ 0<x<\frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{ja } \ x>\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

## 10.2. Funkcijas pārtraukuma punkti un to klasifikācija

No punktā nepārtrauktas funkcijas definīcijas seko, ka funkcija ir nepārtraukta punktā $x_0 \in D(f)$ tad un tikai tad, ja

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = f(x_0).$$

**10.3. definīcija.** Punktu $x_0 \in D(f)$ sauc par funkcijas **pārtraukuma punktu**, ja šajā punktā funkcija nav nepārtraukta.

Tātad visi funkcijas definīcijas apgabala punkti iedalās funkcijas pārtraukuma un nepārtrauktības punktos.

**10.4. definīcija.** Funkcijas pārtraukuma punktu $x_0$ sauc par tās **novēršama rakstura pārtraukuma punktu**, ja punktā $x_0$ eksistē galīgas un vienādas funkcijas vienpusējās robežas, bet tās nav vienādas ar funkcijas vērtību šinī punktā, t.i.,

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) \neq f(x_0).$$

**10.5. definīcija.** Funkcijas pārtraukuma punktu $x_0$ sauc par tās **1. veida pārtraukuma punktu**, ja punktā $x_0$ eksistē galīgas un dažādas funkcijas vienpusējās robežas, t.i.,

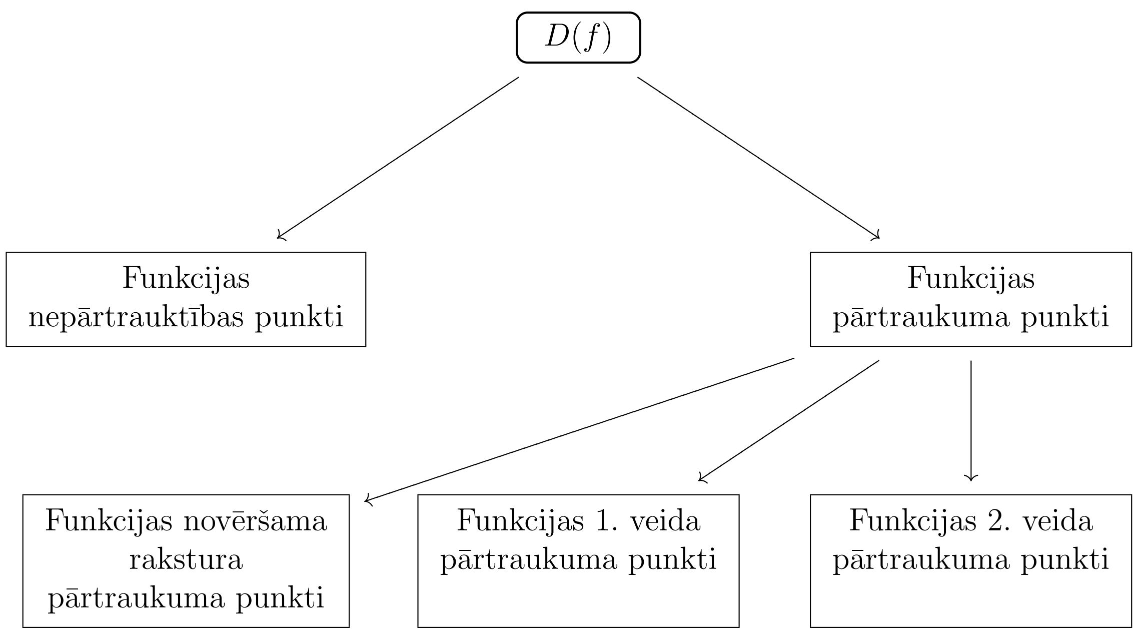
$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$$

(skat. [9]).

**10.6. definīcija.** Funkcijas pārtraukuma punktu, kas nav ne funkcijas novēršama rakstura pārtraukuma punkts, ne funkcijas 1. veida pārtraukuma punkts, sauc par funkcijas **2. veida pārtraukuma punktu**.

Tātad funkcijas II veida pārtraukuma punkti ir funkcijas tie pārtraukuma punkti, kuros vismaz viena no šīs funkcijas vienpusējām robežām ir bezgalīga vai neeksistē.

Uzskatāmības labad var izveidot šādu shēmu:




**10.1. zīm.**

**10.2. piemērs.** Atrast funkcijas

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & \text{ja } \ x \leq 0, \\ \cos x, & \text{ja } \ 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{ja } \ x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

[9]Šoreiz $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ neeksistē.

pārtraukuma punktus un noteikt to veidu. Konstruēt funkcijas shematisku grafiku.

Dotās funkcijas definīcijas apgabals $D(f) = \mathbb{R}$.

Katrā no intervāliem $(-\infty; 0)$, $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}; +\infty\right)$ funkcija ir nepārtraukta, jo ir uzdota ar nepārtrauktām funkcijām, atbilstoši $y = 2 - x$, $y = \cos x$, $y = 0$.

Atliek izpētīt funkcijas raksturu punktos $x = 0$ un $x = \frac{\pi}{2}$.

Atrod vienpusējās robežas funkcijai punktā $x = 0$.

Tā kā $f(x) = 2 - x$, kad $x < 0$, tad

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} (2 - x) = 2.$$

Tā kā $f(x) = \cos x$, kad $0 < x < \frac{\pi}{2}$, tad

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \cos x = 1.$$

Šoreiz

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x),$$

tāpēc $x = 0$ ir funkcijas I veida pārtraukuma punkts.

Atrod vienpusējās robežas funkcijai punktā $x = \frac{\pi}{2}$:

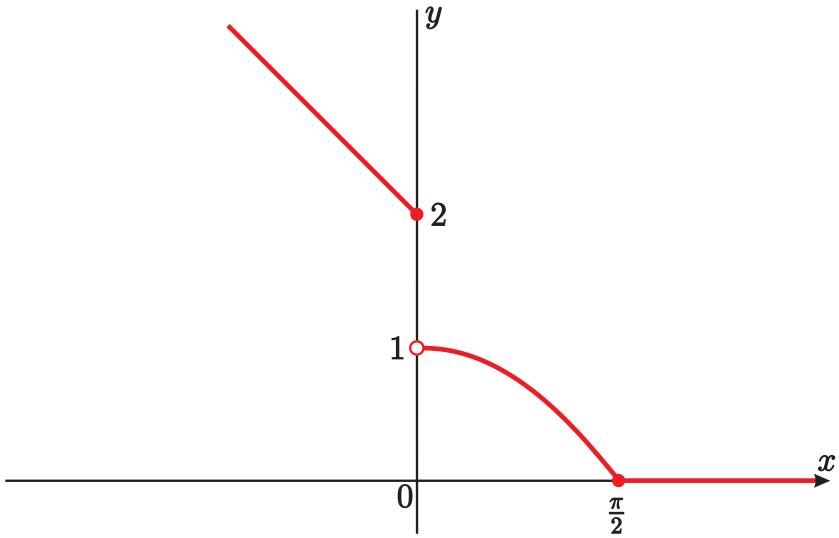
$$\lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} f(x) = \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \cos x = 0, \quad \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x > \frac{\pi}{2}}} f(x) = \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x > \frac{\pi}{2}}} 0 = 0.$$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

Funkcija ir nepārtraukta punktā $x = \frac{\pi}{2}$, jo

$$\lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} f(x) = \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x > \frac{\pi}{2}}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Atzīmēsim, ka punktā $x = 0$ funkcija ir nepārtraukta no kreisās puses (10.2. zīm.).




**10.2. zīm.**

**10.3. piemērs.** Atrast funkcijas

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ja} \quad x \le 0, \\ \frac{1}{x}, & \text{ja} \quad x > 0, \end{cases}$$

pārtraukuma punktus un noteikt to veidu. Konstruēt funkcijas shematisku grafiku.

10.3. piemērā dotās funkcijas definīcijas apgabals $D(f) = \mathbb{R}$. Katrā no intervāliem $(-\infty; 0)$ un $(0; +\infty)$ funkcija ir nepārtraukta.

Atrod vienpusējās robežas funkcijai punktā $x = 0$:

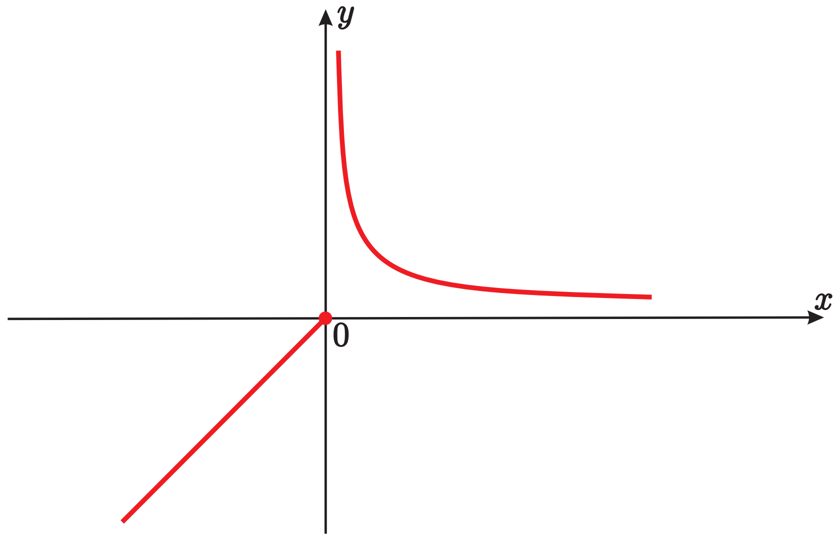
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} x = 0, \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Pie tam, $f(0) = 0$, tātad punkts $x = 0$ ir funkcijas $f(x)$ 2. veida pārtraukuma punkts.

Arī šoreiz punktā $x = 0$ funkcija ir nepārtraukta no kreisās puses, jo

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = f(0) = 0$$

(skat. 10.3. zīm.).




**10.3. zīm.**

**10.4. piemērs.** Atrast funkcijas

$$f(x) = \begin{cases} 2^x, & \text{ja} \quad x < 1, \\ -3, & \text{ja} \quad x = 1, \\ \frac{4}{3-x}, & \text{ja} \quad x > 1, \end{cases}$$

pārtraukuma punktus un noteikt to veidu. Konstruēt funkcijas shematisku grafiku.

10.4. piemērā dotās funkcijas $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Šoreiz atrod funkcijas vienpusējās robežas punktos $x = 1$ un $x = 3$.

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} 2^x = 2, \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{4}{3-x} = 2;$$

$f(1) = -3$.

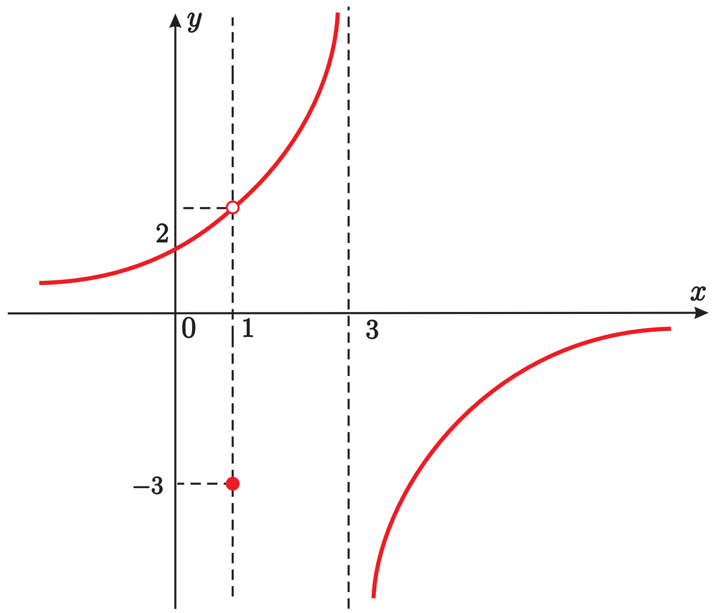
Tātad

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) \neq f(1).$$

Punkts $x = 1$ ir funkcijas novēršama rakstura pārtraukuma punkts.

$$\lim_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} \frac{4}{3-x} = +\infty, \quad \lim_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} \frac{4}{3-x} = -\infty.$$

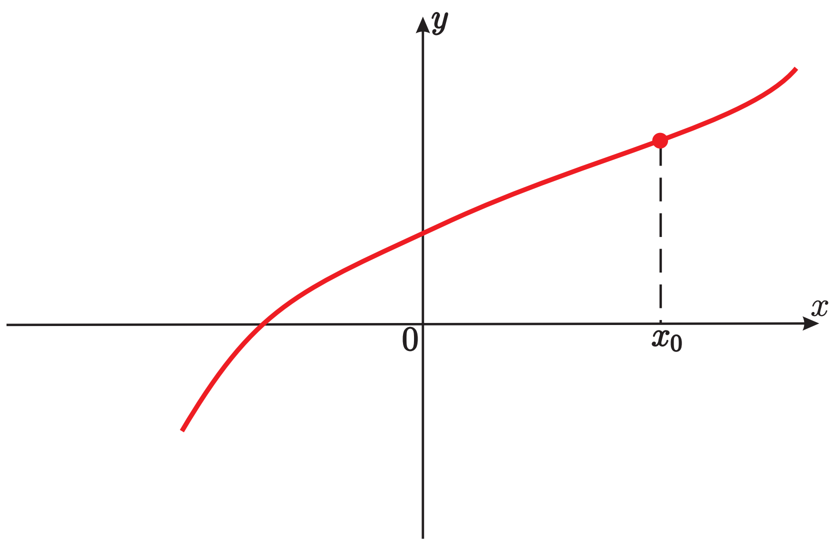
Punkts $x = 3$ nav funkcijas pārtraukuma punkts, jo tas nepieder tās definīcijas apgabalam. Dotās funkcijas shematisks grafiks ir attēlots 10.4. zīm.



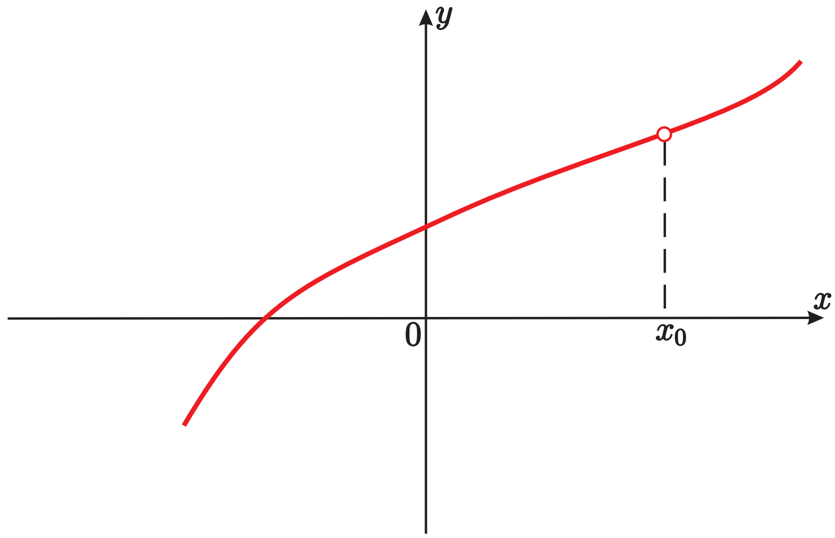

**10.4. zīm.**

## Auditorijā risināmie uzdevumi

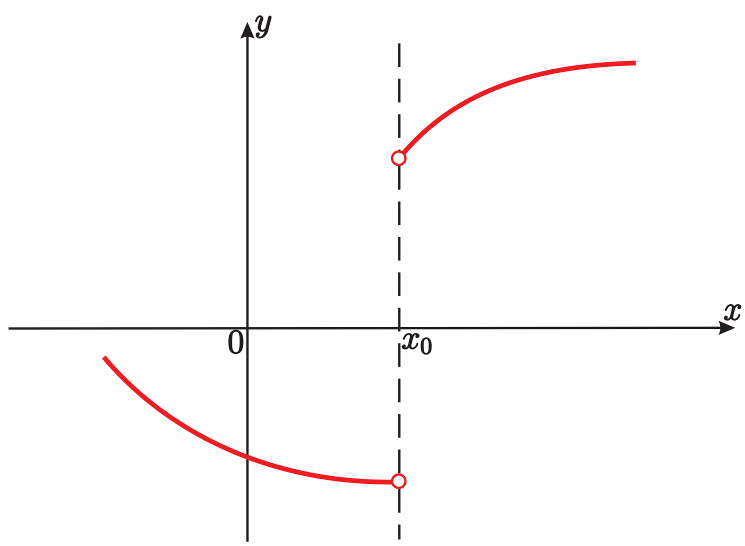
1. Lietojot funkciju shematiskus grafikus, izpētīt funkcijas raksturu punktā $x_0$.



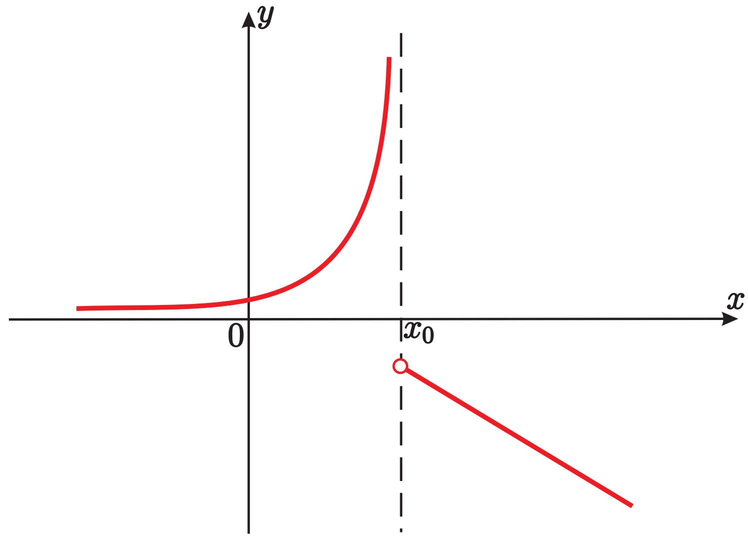

**10.5. zīm.**



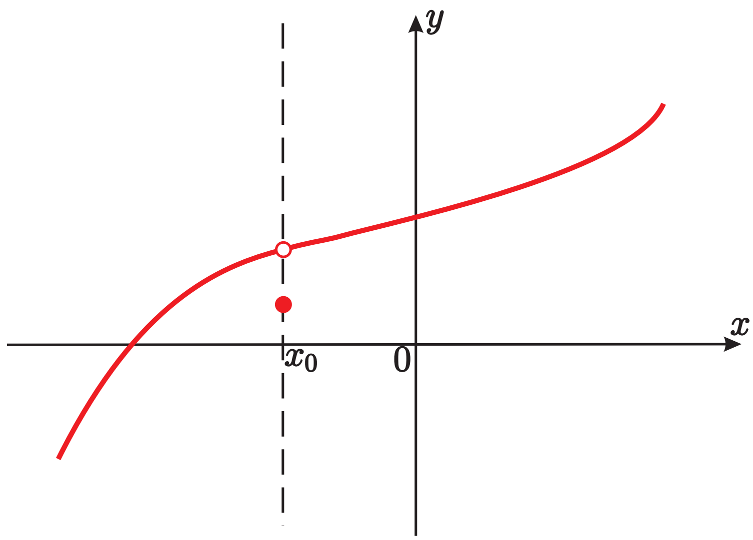

**10.6. zīm.**



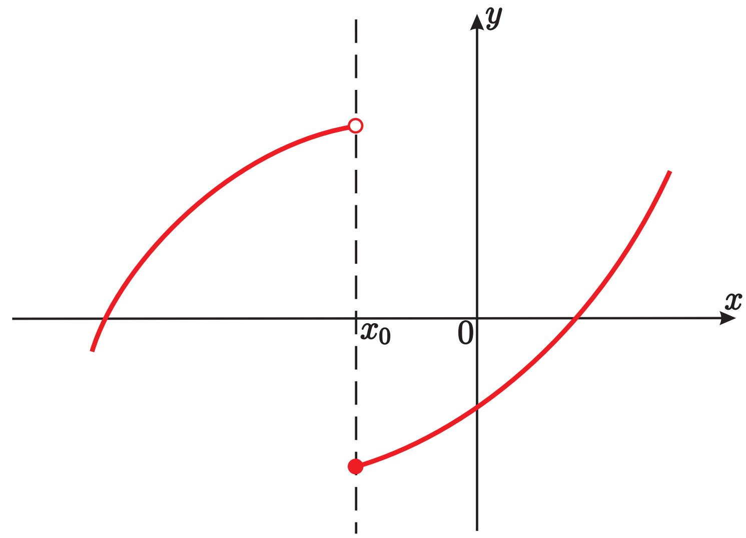

**10.7. zīm.**



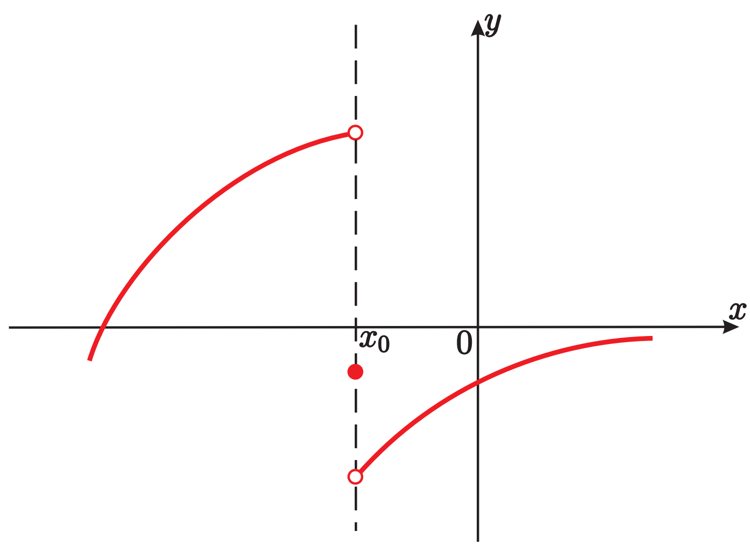

**10.8. zīm.**



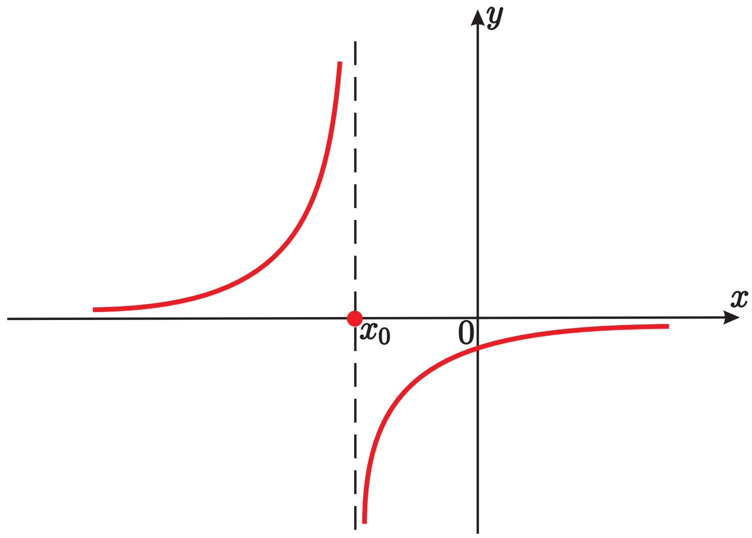

**10.9. zīm.**



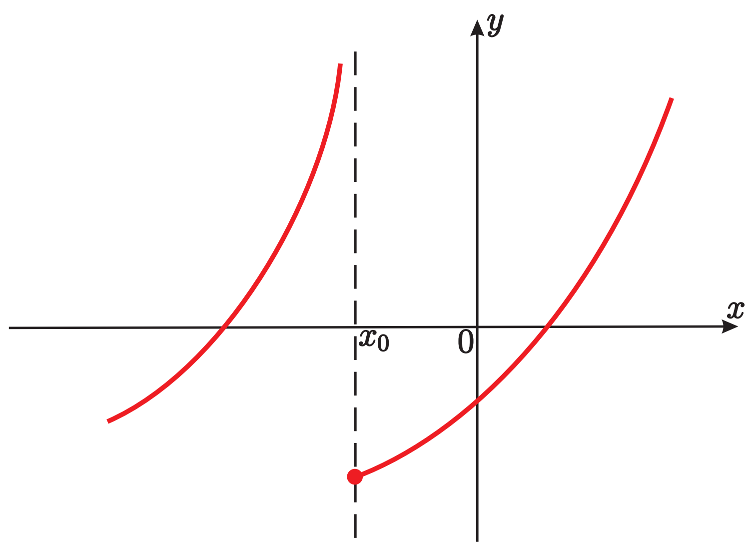

**10.10. zīm.**



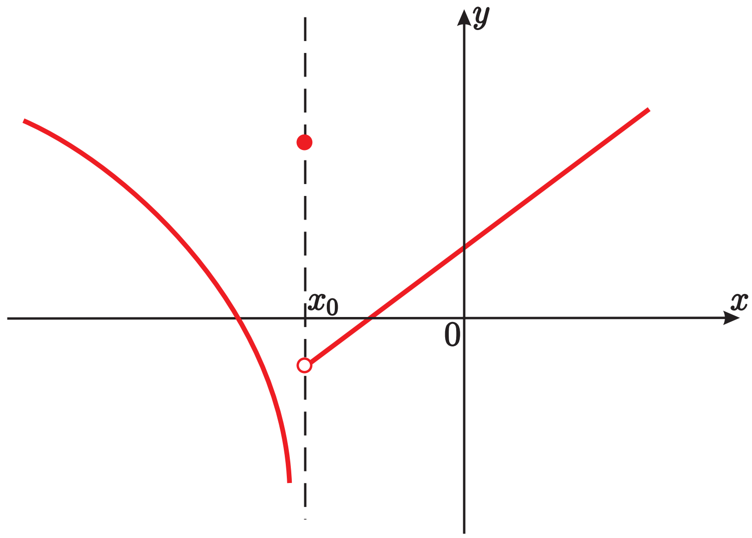

**10.11. zīm.**




**10.12. zīm.**




**10.13. zīm.**




**10.14. zīm.**

2. Atrast funkciju pārtraukuma punktus un noteikt to veidu; konstruēt funkciju shematiskus grafikus.

(a) $f(x) = \dfrac{x^2-25}{x-5}$;

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & \text{ja } x \neq 0, \\ 0, & \text{ja } x = 0; \end{cases}$

(c) $f(x) = \dfrac{3}{x^2+5x}$;

(d) $f(x) = \dfrac{5x}{2x^2+5x-3}$;

(e) $f(x) = 3^{\frac{1}{x-5}}$;

(f) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1}, & \text{ja } x \neq 1, \\ 5, & \text{ja } x = 1; \end{cases}$

(g) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & \text{ja } x \leq 3, \\ 2x - \frac{11}{2}, & \text{ja } x > 3; \end{cases}$

(h) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2-5x}, & \text{ja } x \neq 0, \\ 3, & \text{ja } x = 0; \end{cases}$

(i) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ja } x < 1, \\ 2x-1, & \text{ja } x \geq 1; \end{cases}$

(j) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x-1}, & \text{ja } x < 0, \\ 0, & \text{ja } x = 0, \\ x, & \text{ja } 0 < x < 1, \\ 2, & \text{ja } 1 \leq x \leq 2; \end{cases}$

(k) $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x}, & \text{ja } x \leq 2, \\ \ln(x-2), & \text{ja } x > 2; \end{cases}$

(l) $f(x) = \begin{cases} \cos\frac{\pi}{2}x, & \text{ja } x < 0, \\ x-1, & \text{ja } x \geq 0; \end{cases}$

(m) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{ja } |x| < 1, \\ 1, & \text{ja } |x| > 1, \\ -1, & \text{ja } x = 1; \end{cases}$

(n) $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & \text{ja } x < 0, \\ x+1, & \text{ja } x \geq 0; \end{cases}$

(0) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & \text{ja } |x| < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{x^2}, & \text{ja } |x| \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

**Mājas darba uzdevumi**

Atrast funkciju pārtraukuma punktus un noteikt to veidu. Konstruēt shematisku funkcijas grafiku.

1. $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$;
2. $f(x) = \frac{1-x}{x^2-5x+6}$;
3. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$;
4. $f(x) = \begin{cases} 2-x^2, & \text{ja } x \le 0, \\ \cos x, & \text{ja } 0 < x < \frac{3\pi}{2}, \\ 0, & \text{ja } x \ge \frac{3\pi}{2}; \end{cases}$
5. $f(x) = \begin{cases} x^3+1, & \text{ja } x \le 1, \\ x^2, & \text{ja } x > 1; \end{cases}$
6. $f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{ja } x < 0, \\ 3, & \text{ja } x = 0, \\ \frac{1}{x^2}, & \text{ja } x > 0; \end{cases}$
7. $f(x) = \begin{cases} -x^3+1, & \text{ja } x < -1, \\ 0, & \text{ja } -1 < x < 0, \\ \sqrt{x}, & \text{ja } x \ge 0; \end{cases}$
8. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2}, & \text{ja } -1 \le x < 1, \\ x^2+1, & \text{ja } x \ge 1; \end{cases}$
9. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{ja } x \le 0, \\ 1-x, & \text{ja } 0 < x \le 1, \\ \frac{1}{1-x}, & \text{ja } x > 1; \end{cases}$
10. $f(x) = \begin{cases} 5^x, & \text{ja } -1 \le x < 1, \\ x-1, & \text{ja } 1 < x \le 4, \\ 1, & \text{ja } x = 1. \end{cases}$

# 11. Pielikums

I.1. Konstruēt funkciju grafikus.

1. $f(x) = |1-x| - 3|x+2| + x$;
2. $f(x) = |x-3| - 2|x+1| - x + 1$;

3. $f(x) = 3|x+1| - |x-1| + 6$;
4. $f(x) = 2|x-1| - |2+x| + x$;
5. $f(x) = |2-4x| - |4+2x| - x$;
6. $f(x) = |2-x| + |3+x| + x$;
7. $f(x) = |x-5| + 3|x-1| - x + 1$;
8. $f(x) = |x-2| + |x-8| - 5 - x$;
9. $f(x) = |x-1| + |x-7| - 6$;
10. $f(x) = |2x-1| - |x+1| + x - 2$;
11. $f(x) = |x+2| - |x+3| + |4-x$;
12. $f(x) = |x| + 3x + 1 - |x-6|$;
13. $f(x) = x + 2|x+1| - |5-x|$;
14. $f(x) = |x-4| + |x+1| - x + 3$;
15. $f(x) = |x-7| - |5-x| + x + 3$;
16. $f(x) = |2x-1| + |x+2| - 4x + 2$;
17. $f(x) = |1-3x| - |2x+3| - 4$;
18. $f(x) = |x-1| + |2-x| - 3 + x$;
19. $f(x) = |x+2| - |8-x| + 2x - 2$;
20. $f(x) = x - |1-3x| + |2x| - 3$;
21. $f(x) = |x+1| + |2-x| - 5 - x$;
22. $f(x) = |x+3| + 2x - |1-x| + 4$;
23. $f(x) = 5x - |1-x| + |3x+5| - 4$;
24. $f(x) = 2|x-1| - |1-2x| + 3x + 5$;
25. $f(x) = x + 2 - 3|5-x| + |7+x|$.

I.2. Atrisināt vienādojumus.

1. $x^2 - 4x + |x-3| + 3 = 0$;

2. $x^2 - 6x + |x-4| + 8 = 0$;
3. $x^2 + 4x + |x+1| + 3 = 0$;
4. $(x+1)^2 - 2|x+1| + 1 = 0$;
5. $x^2 + 2x - 3|x+1| + 3 = 0$;
6. $x^2 + 6x + |x+2| + 8 = 0$;
7. $|2x+1| - |3-x| = |x-4|$;
8. $|x-1| + |1-2x| = 2|x|$;
9. $|x| - 2|x+1| + 3|x+2| = 0$;
10. $|x+1| - |x| + 3|x-1| = x+2$;
11. $|x| - 2|x+1| + 3|x+2| = 0$;
12. $|x| + 2|x+1| - 3|x-3| = 0$;
13. $|x^2-9| + |x-2| = 5$;
14. $|x^2-1| + x + 1 = 0$;
15. $|x^2-4| - |9-x^2| = 5$;
16. $|x^2-9| + |x^2-4| = 5$;
17. $x^2 + 4|x-3| - 7x + 11 = 0$;
18. $x^2 - 4|x+1| + 5x + 3 = 0$;
19. $|2x-1| = |x+1| + |x-2|$;
20. $|x+2| - |x+3| + |x-4| = 6$;
21. $|x| + 3|x+1| = |x-6|$;
22. $|x| + 2|x+1| = |x-5|$;
23. $|x-4| + |x+1| - |x+3| = 6$;
24. $|x-7| - |x+3| + |x-5| = -1$;
25. $|2x-1| + |x+2| - |4x| = 2$.

I.3. Atrisināt nevienādības.

1. $x^2 - 3|x| + 2 > 0$;
2. $x^2 - |5x - 3| - x < 2$;
3. $x^2 + 5|x| - 24 > 0$;
4. $|x^2 - 3x - 15| < 2x^2 - x$;
5. $|x^2 + x + 10| \leq 3x^2 + 7x + 2$;
6. $|2x^2 + x + 11| > x^2 - 5x + 6$;
7. $3x^2 - |x - 3| < x - 2$;
8. $|x - 6| > |x^2 - 5x + 9|$;
9. $|x| + |x - 1| > 5$;
10. $|x + 1| + |x - 2| > 5$;
11. $|2x + 1| + |5x - 2| \geq 1$;
12. $|3x - 1| + |2x - 3| - x < 2$;
13. $|x - 1| + |2 - x| > 3 + x$;
14. $|4 - x| - |2 - 3x| \geq 4$;
15. $|x - 3| + |2x + 1| < 8$;
16. $|2x - 5| - |3x + 6| > -3$;
17. $|5 - 3x| - |3x - 1| \leq 2$;
18. $|1 - 3x| - |2x + 3| \geq 0$;
19. $|x + 3| - |x + 1| < 2$;
20. $|x + 2| + |x - 2| \leq 12$;
21. $|x - 2| \leq 2x^2 - 9x + 9$;
22. $|x + 3| + |x - 2| < 13$;
23. $2|x + 3| - 3|x - 2| > 6$;
24. $|x + 3| - |x - 2| > 2x - 3$;
25. $|x - 2| + 3|x + 3| > 4x + 25$.

II. Noteikt ar formulu uzdotās funkcijas definīcijas apgabalu.

1. $f(x) = \sqrt{x+7} + \frac{1}{\lg(3+x)}$;
2. $f(x) = \arccos(2+x) - \sqrt{\frac{2+x}{1-x}}$;
3. $f(x) = \lg(x^2 - 5x + 4) + \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}$;
4. $f(x) = \arccos\frac{1-3x}{4} + \sqrt{1-x^2}$;
5. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{3x-4}} + \sqrt{\lg\frac{3x}{5-2x}}$;
6. $f(x) = \sqrt{\lg\frac{3x+1}{2x-1}} - \arcsin(1-x)$;
7. $f(x) = \frac{x+7}{\lg(3x+2)} + \arccos\frac{5x}{7}$;
8. $f(x) = \lg\frac{3x-8}{5} + 3^{\frac{x}{7-x}}$;
9. $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{3x-2}} + \frac{\sqrt{2x+5}}{\log_2(3-x)}$;
10. $f(x) = \arcsin\frac{3-2x}{5} + \sqrt{3-x}$;
11. $f(x) = \sqrt{\log_{0,5}(9-2x)} - 2^{\frac{\cos x}{2x-4}}$;
12. $f(x) = \sqrt{x+7} + \frac{1}{\lg(3+x)}$;
13. $f(x) = \frac{\sqrt{16-x^2}}{\log_2(x+1)-1} + 3^{\frac{x+1}{x}}$;
14. $f(x) = \frac{\sqrt{5x+1}}{\log_{0,3}(4-x)} - \sqrt{\frac{1}{x-2}}$;
15. $f(x) = \sqrt{\lg\frac{5x-8}{3}} + 4^{\frac{3x}{6-x}}$;
16. $f(x) = \lg(36-x^2) + 2\arccos\frac{5}{x}$;
17. $f(x) = 2^{\frac{\cos x}{12-3x}} + 3\sqrt{\log_{0,2}(5-3x)}$;
18. $f(x) = \frac{5x+7}{\lg(7-x)} - \frac{7}{(x+3)^2}$;
19. $f(x) = \arcsin\frac{x}{5} - \frac{3x-4}{\log_5(4x-7)}$;
20. $f(x) = \sqrt[4]{\log_{0,3}(1-4x)} + 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt[3]{8-3x}}{24x^2-1}$;

21. $f(x)=\sqrt{\lg\frac{5x-18}{3}-2^{\frac{x}{6x-x^2}}}$;

22. $f(x)=\frac{2x+3}{\sqrt{3x-x^2}}-\arcsin\frac{2}{3x-1}$;

23. $f(x)=\frac{15x^2-1}{\sqrt{5x^2+7x}}-\lg(x^2-6x)$;

24. $f(x)=\sqrt{3-x}+\arcsin\frac{3-2x}{5}$;

25. $f(x)=\arcsin\frac{x-3}{2}-\lg(4-x)$.

III. Noteikt, kuras no dotajām funkcijām ir pāra funkcijas, kuras - nepāra funkcijas.

1. $f(x)=\frac{|\sin x|-3}{\operatorname{tg} x^3}$;
2. $f(x)=\frac{1-4^x}{4^x+1}$;
3. $f(x)=\lg\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)$;
4. $f(x)=\lg\frac{2+x}{2-x}+x\operatorname{tg}^2 x$;
5. $f(x)=\lg\frac{1+x}{1-x}-4$;
6. $f(x)=\frac{1}{3^x}-\frac{1}{3^{-x}}$;
7. $f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$;
8. $f(x)=\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}$;
9. $f(x)=\frac{e^{3x}-e^{-3x}}{2}$;
10. $f(x)=\frac{1}{2}\lg x^2+2-x\sin 3x$;
11. $f(x)=\frac{e^{2x}+1}{e^{-2x}-1}$;
12. $f(x)=x\frac{e^x-1}{e^x+1}$;
13. $f(x)=\operatorname{tg}^2 x-\cos x+4$;
14. $f(x)=x\sqrt[3]{x}-\operatorname{ctg} 2x$;
15. $f(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}$;
16. $f(x)=x\sqrt{x^2}-\operatorname{ctg} 2x+3x$;
17. $f(x)=\operatorname{tg}^3 x-2x^4-\sin 2x$;

18. $f(x) = x^2 + |x| - 2;$

19. $f(x) = 6x^5 - 2\sin x;$

20. $f(x) = 2\,\mathrm{tg}\,x + \sin 2x;$

21. $f(x) = \frac{2^{|x|}}{x^2} - 3;$

22. $f(x) = \frac{(2^{2x}-1)x}{2^x};$

23. $f(x) = \frac{(x-2)^2\,\mathrm{ctg}^5\,x+1}{1-\cos 3x};$

24. $f(x) = 2\sin\frac{x}{2} - x + x^3;$

25. $f(x) = \frac{\sin x}{x} + x^5\,\mathrm{ctg}^2\,x.$

IV. Noteikt, vai dotās funkcijas ir periodiskas un noteikt periodu.

1. $f(x) = \sin\frac{\pi x}{2} + 1;$
2. $f(x) = a\sin 4x + b\cos 3x \quad (a, b \in \mathbb{R});$
3. $f(x) = \sin\frac{x}{2} + \mathrm{ctg}\,x;$
4. $f(x) = \sin\frac{5x}{2} - \cos x;$
5. $f(x) = \sin\frac{3x}{2} + 1 - \mathrm{tg}\,x;$
6. $f(x) = \sin 2x - 2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2};$
7. $f(x) = \cos\frac{\pi x}{4} - \sin\frac{\pi x}{6};$
8. $f(x) = \sin\frac{\pi x}{3} + \sin\frac{\pi x}{4};$
9. $f(x) = 2\sin 3x + 3\sin x;$
10. $f(x) = \sin x + \cos 2x;$
11. $f(x) = \sin\left(2\pi x + \frac{\pi}{3}\right) + 2\sin\left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right) + 3\sin \pi x;$
12. $f(x) = 1 + \mathrm{tg}\,3x - \cos 2x;$
13. $f(x) = 10\sin 3x + \mathrm{tg}\,5x;$
14. $f(x) = \sqrt{\mathrm{tg}\,3x} - \sin 3x;$
15. $f(x) = 3\sin\frac{5x}{8} + 2\cos\frac{7x}{8};$

16. $f(x) = \sin\frac{3\pi x}{4} - \cos\frac{3\pi x}{2}$;
17. $f(x) = 2\sin\frac{x}{2} + 3\operatorname{tg}\frac{x}{2}$;
18. $f(x) = \sin\frac{2x+3}{6\pi}$;
19. $f(x) = -\cos\frac{x-1}{2}$;
20. $f(x) = 2\sin(3x+5)$;
21. $f(x) = 4\sin\frac{\pi x+1}{3}$;
22. $f(x) = 1 + \operatorname{tg}\left(\frac{5x}{6} + 1\right)$;
23. $f(x) = \sin\frac{x}{3} + \operatorname{ctg}\frac{x}{4}$;
24. $f(x) = \frac{1}{\cos 2x} + \operatorname{tg}\frac{x}{2}$;
25. $f(x) = \sin 2x + 2\sin 3x$.

V. Katrai no dotajām funkcijām atrast apvērsto funkciju un noteikt apvērstās funkcijas definīcijas un vērtību apgabalu.

1. $f(x) = \arcsin\frac{3}{2+x}$;
2. $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$;
3. $f(x) = \operatorname{arctg} 3x$;
4. $f(x) = \lg(x-1)$;
5. $f(x) = \cos^3 x, \quad x \in [0;\pi]$;
6. $f(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$;
7. $f(x) = 5^{\cos x}, \quad x \in [0;\pi]$;
8. $f(x) = \cos(3x-2), \quad x \in \left[\frac{2}{3}; \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\right]$;
9. $f(x) = \log_2\frac{x-5}{4}$;
10. $f(x) = \arcsin\frac{3}{4x-1}$;
11. $f(x) = 1 + \lg(x+2)$;
12. $f(x) = \frac{2^x}{1+2^x}$;
13. $f(x) = 2\sin 3x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{5}\right]$;

14. $f(x) = \frac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}}$;

15. $f(x) = 10^{x+1}$;

16. $f(x) = \log_2(1 - x^2), \quad x > 0$;

17. $f(x) = \lg \frac{x}{2}$;

18. $f(x) = \log_5 \frac{4}{x}$;

19. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 27}$;

20. $f(x) = \frac{2x}{1+x}$;

21. $f(x) = 7 + \ln(x + 14)$;

22. $f(x) = \sin^3 x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;

23. $f(x) = \ln(x^2 - 1), \quad x > 0$;

24. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 125}$;

25. $f(x) = \lg(x^3 - 1)$.

VI. Lietojot virknes robežas definīciju, pierādīt, ka $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Skaitlim $\varepsilon = 0,01$ atrast atbilstošo $N$.

1. $a_n = \dfrac{4+2n}{1-3n}, \quad a = -\dfrac{2}{3}$;
2. $a_n = \dfrac{3n-2}{2n-1}, \quad a = \dfrac{3}{2}$;
3. $a_n = \dfrac{7n-1}{n+1}, \quad a = 7$;
4. $a_n = \dfrac{n}{2n+1}, \quad a = \dfrac{1}{2}$;
5. $a_n = \dfrac{5^n-1}{5^n}, \quad a = 1$;
6. $a_n = \dfrac{5n+3}{2n-1}, \quad a = \dfrac{5}{2}$;
7. $a_n = \dfrac{n^2+4}{5n^2-2}, \quad a = \dfrac{1}{5}$;
8. $a_n = \dfrac{3n^2+1}{n^2+4}, \quad a = 3$;
9. $a_n = \dfrac{n-2}{n+2}, \quad a = 1$;
10. $a_n = \dfrac{7n+4}{2n+1}, \quad a = \dfrac{7}{2}$;
11. $a_n = \dfrac{3n^2+1}{5-n^2}, \quad a = -3$;
12. $a_n = \dfrac{5n-2}{7n+3}, \quad a = \dfrac{5}{7}$;
13. $a_n = \dfrac{5n}{n+1}, \quad a = 5$;
14. $a_n = \dfrac{4n+3}{8n-1}, \quad a = \dfrac{1}{2}$;
15. $a_n = \dfrac{n+2}{n+1}; \quad a = 1$;
16. $a_n = \dfrac{3-n^2}{1+2n^2}, \quad a = -\dfrac{1}{2}$;

17. $a_n = \dfrac{5n^2-3}{3n^2+1}, \quad a = \dfrac{5}{3};$

18. $a_n = \dfrac{1-2n^2}{2-4n^2}, \quad a = \dfrac{1}{2};$

19. $a_n = \dfrac{4^n}{2-4^n}, \quad a = -1;$

20. $a_n = \dfrac{5-3n}{7n+4}, \quad a = -\dfrac{3}{7};$

21. $a_n = \dfrac{4-7n}{5-n}, \quad a = 7;$

22. $a_n = \dfrac{5n-8}{3n+11}, \quad a = \dfrac{5}{3};$

23. $a_n = \dfrac{2^n-1}{2^n}, \quad a = 1;$

24. $a_n = \dfrac{2n-3}{4n+5}, \quad a = \dfrac{1}{2};$

25. $a_n = \dfrac{5n+6}{n+1}, \quad a = 5.$

VII. Lietojot funkcijas robežas definīciju, pierādīt, ka $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Skaitlim $\varepsilon = 0,01$ atrast atbilstošo $\delta$.

| | | |
|---|---|---|
| 1. $f(x) = 3x^2 - 2,$ | $a = -2,$ | $A = 10;$ |
| 2. $f(x) = 3 - \dfrac{x}{5},$ | $a = -5,$ | $A = 4;$ |
| 3. $f(x) = x^2 - x + 2,$ | $a = 1,$ | $A = 2;$ |
| 4. $f(x) = x^2 + 2x + 3,$ | $a = 0,$ | $A = 3;$ |
| 5. $f(x) = x^2 + x + 1,$ | $a = 3,$ | $A = 13;$ |
| 6. $f(x) = 3x - 2,$ | $a = -3,$ | $A = -11;$ |
| 7. $f(x) = 3x + 2,$ | $a = 2,$ | $A = 8;$ |
| 8. $f(x) = 5 - 2x,$ | $a = 0,$ | $A = 5;$ |
| 9. $f(x) = x^2 + x - 5,$ | $a = 3,$ | $A = 7;$ |
| 10. $f(x) = 3x^2 - 1,$ | $a = 2,$ | $A = 11;$ |
| 11. $f(x) = 3 - 5x^2,$ | $a = 2,$ | $A = -17;$ |
| 12. $f(x) = x^2 + 4,$ | $a = 1,$ | $A = 5;$ |
| 13. $f(x) = 3x - 2,$ | $a = -1,$ | $A = -5;$ |
| 14. $f(x) = x^2 - 3x,$ | $a = 3,$ | $A = 0;$ |
| 15. $f(x) = 2x^2 + 1,$ | $a = -1,$ | $A = 3;$ |
| 16. $f(x) = x^2 - 7x + 1,$ | $a = 7,$ | $A = 1;$ |
| 17. $f(x) = x^2 - 6x + 3,$ | $a = 6,$ | $A = 3;$ |
| 18. $f(x) = 3x - 5,$ | $a = 2,$ | $A = 1;$ |
| 19. $f(x) = x^2 - 8x + 2,$ | $a = -1,$ | $A = 11;$ |
| 20. $f(x) = x^2 + 4x + 2,$ | $a = -2,$ | $A = -12;$ |
| 21. $f(x) = 2x^2 + 1,$ | $a = -2,$ | $A = 9;$ |

22. $f(x) = 4x + 7, \quad a = -3, \quad A = -5;$
23. $f(x) = 8 - 5x, \quad a = 0, \quad A = 8;$
24. $f(x) = x^2 + 2x - 3, \quad a = -1, \quad A = -4;$
25. $f(x) = x^2 - 2x - 6, \quad a = -2, \quad A = 2.$

VIII.1. Atrast robežas.

1. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 8x + 8};$
2. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{3x^2 + 14x + 15};$
3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x};$
4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1};$
5. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1};$
6. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6};$
7. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15};$
8. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3};$
9. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4 - 3x + 2}{x^5 - 4x + 3};$
10. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^4 - 8x^2 + 16};$
11. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3 - 2x - 1}{x^5 - 2x - 1};$
12. $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}} \dfrac{2x^2 - x - 3}{2x^2 - 5x + 3};$
13. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}} \dfrac{3x^2 + 5x - 2}{1 - 2x - 3x^2};$
14. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 2x - 3};$
15. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2 - 3x - 2x^2}{x^2 + x - 2};$
16. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3x^2 - 11x + 6}{2x^2 - 5x - 3};$
17. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 3x - 2}{x^3 - 8};$
18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x^2 - 3x}{2x^2 - 9x};$
19. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 2x^2 - x + 2};$
20. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - 3x^2}{5x^3 - 6x^2 + x};$
21. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}} \dfrac{3x^2 + 2x - 1}{27x^3 - 1};$
22. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{2x^2 - 11x + 5}{3x^2 - 14x - 5};$
23. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 + 3x^2 - 4};$
24. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{x^3 - 3x - 2};$
25. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}.$

VIII.2. Atrast robežas.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - 3x^2}{4 - \sqrt{x + 16}};$
2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x - 2 - \sqrt{4x^2 - x - 2}}{x^2 - 3x + 2};$

3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x-2}-\sqrt[3]{1-x+x^2}}{x^2-1}$;

4. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$;

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{x^2}$;

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$;

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$;

8. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25}$;

9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$;

10. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$;

11. $\lim\limits_{x\to -8} \dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$;

12. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$;

13. $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$;

14. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$;

15. $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$;

16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-2x-x^2}-1-x}{x}$;

17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2}$;

18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$;

19. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{9-x^2}$;

20. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2-x}}{1-x^2}$;

21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x+4}-2}$;

22. $\lim\limits_{x\to -9} \dfrac{4-\sqrt{7-x}}{\sqrt{10+x}-1}$;

23. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{2-\sqrt{x+3}}$;

24. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{3x+7}-2}{1+\sqrt[3]{x}}$;

25. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-\sqrt{3x+4}}{16-x^2}$.

VIII.3. Atrast robežas.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3-9x^2+13x+1}{4x^3+8x^2-7x+16}$;

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3+8x+7}{9x^3+11x+3}$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{13x^2-2x+5}{x^4+6x+1}$;

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^5-12x^3+7}{4x^4+8x^3+11}$;

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-2x+5}{x^3+3x+7}$;

6. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+7x-1}{3x^2-5x+6}$;

7. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^2-7x-12}{2x^2-5x-8}$;

8. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-4x+3}{x+5}$;

9. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4-2x^3-1}{100x^3+2x^2}$;

10. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3-4x^2+8}{-5x^3+2x^2+x}$;

11. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5+3x^3}{7x^4-2x^2+1}$;

12. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2-x-4x^2}{x^3-7x+8}$;

13. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-2x-1}{7x-9}$;

14. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^5-3x^4+7x-1}{3x^5+2x^3-3}$;

15. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-2x+10}{5x^3+3x-1}$;

16. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3-3x^2+5}{3x^4-7x+1}$;

17. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-1}{5x^2+2x}$;

18. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^2+5x-1}{3x^2-x+1}$;

19. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-x-x^2}{x^3+3}$;

20. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4-2x^2+3}{3x^3-5}$;

21. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

22. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+x-1}{x^2-5x+6}$;

23. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-9x+14}{x^3+3x+14}$;

24. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{10x^2+3x+1}{x^3-x^2-x}$;

25. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-5x-36}{2x^2-10x+12}$.

VIII.4. Atrast robežas.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+7x+9}-\sqrt{x^2+3x+5}\right)$;

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$;

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^4-3x+1}-x^2\right)$;

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2x-1-\sqrt{4x^2-4x-3}\right)$;

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)$;

6. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+3}\right)$;

7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$;

8. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+5x}-\sqrt[3]{x^3+8x}\right)$;

9. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x}\right)$;

10. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}\right)$;

11. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x-1}-x\right);$

12. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+7x}\right);$

13. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{3-2x}+x\right);$

14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+10x}-x\right);$

15. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x}-2x\right);$

16. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+7x+3}\right);$

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right);$

18. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right);$

19. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-x-1}\right);$

20. $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}+x\right);$

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right);$

22. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-2x}\right);$

23. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+2x^2}-x\right);$

24. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right);$

25. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+x}\right).$

VIII.5. Atrast robežas.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$;

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$;

4. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}}$;

5. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}$;

6. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}$;

7. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{1-\operatorname{tg} x}$;

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$;

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}-\sin x}{\sin 3x}$;

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$;

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$;

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 3x}{1-\cos 3x}$;

14. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$;

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{\sin^2 7x}$;

16. $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}}\dfrac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x}$;

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\operatorname{tg} x}{4\sin^2\frac{x}{2}}$;

18. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}$;

19. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\operatorname{tg} x}{\sin x-\cos x}$;

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{\operatorname{tg}^2 6x}$;

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$;

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sin 5x-\sin x}$;

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{x\operatorname{tg} 2x}$;

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-1}{x\sin x}$;

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin^2 3x}$.

VIII.6. Atrast robežas.

1. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$;

2. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$;

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$;

4. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$;

5. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{ctg} 8x}$;

6. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\cos 4x)^{\operatorname{tg} x}$;

7. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{ctg} 4x}$;

8. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$;

9. $\lim\limits_{x\to 2\pi}(\cos x)^{\operatorname{ctg} x}$;

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-4}\right)^{\frac{x}{2}-3}$;

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-7}{x-4}\right)^{\frac{x}{4}+5}$;

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+2}\right)^{\frac{x-1}{3}}$;

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{x+3}$;

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-5}{x-2}\right)^{\frac{x}{3}-4}$;

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-6}{5x-3}\right)^{\frac{x+1}{5}}$;

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+1}\right)^{x+4}$;

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{x}$;

18. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg} 2x}}$;

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x^3}\right)^{x^2}$;

20. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\sin^2 x\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

21. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^3\right)^{\frac{1}{\sin x}}$;

22. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-2x^2\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$;

23. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2\sin x}}$;

24. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+x^3\right)^{\frac{1}{\sin x}}$;

25. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2}{x^2+3}\right)^{x^2}$.

VIII.7. Atrast robežas.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{\ln(1+2x)}$;

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 10x}{e^{x^2}-1}$;

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\left(e^{3x}-1\right)^2}$;

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+10x)}{\operatorname{tg} x}$;

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-5x)}{\sin x}$;

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{\ln(x+1)}$;

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin 2x)}{\sin 9x}$;

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin 5x)}{1-\cos 10x}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{3^x-1}$;

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{3x}-1}{e^x-1}$;

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{-8x}-1)x}{1-\cos 4x}$;

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{2^x-1}$;

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\sin 5x}$;

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^x-1}{\sin x}$;

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\sin x}$;

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\ln(1+x)}$;

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\arcsin x}$;

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{2\ln(1+9x^2)}$;

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{\ln(1+3x^2)}$;

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{x^2}-1}{4^{x^2}-1}$;

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\sin 3x}{e^{-3x}-1}$;

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 7x}{e^{-3x^2}-1}$;

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+4x)}{2\ln(1+2x^2)}$;

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^{\frac{x}{2}}-x}{\ln(1+2x^2)}$.

VIII.8. Atrast robežas.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^3-3x+1}{x-4}+1\right)$;

2. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x+1}{x}}$;

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\log_3(7-x^2)}{2-x-x^2}$;

4. $\lim\limits_{x\to 5}\left(x-\sqrt{x^2-5x}\right)$;

5. $\lim\limits_{x\to 5}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^{\frac{x}{5}}$;

6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\log_{19}(1+2x^2)}{4^x-62}$;

7. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\log_5(2-3x)}{x^4}$;

8. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x+1}{x-2}$;

9. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3}{x^2+4x-9}$;

10. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{3}{x^3+1}-\dfrac{1}{x+1}\right)$;

11. $\lim\limits_{x\to 22}\dfrac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}$;

12. $\lim\limits_{x\to 2}\left(5+\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}\right)$;

13. $\lim\limits_{x\to 4}\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)$;

14. $\lim\limits_{x\to 6}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$;

15. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{1+\sqrt{2x^2+1}}{x}$;

16. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{6x^2+5x-1}{3x^2-x+8}$;

17. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{x^3-5x+2}$;

18. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-4x+5}{x^2+6}$;

19. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{5x-4}+\log_2 x\right)$;

20. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{5}}\left(x^3-\log_{\frac{1}{5}} x\right)$;

21. $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{x-3}{x+1}\right)^{x-1}$;

22. $\lim\limits_{x\to 4}\left(x^2\sqrt{x+5}-x\sqrt{x}\right)$;

23. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt[3]{4x+3}-x\sqrt{x-2}}{2x-3}$;

24. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\log_5(1+2x)}{x^2}$;

25. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\log_{13}(1+3x^2)}{5^{-x}-1}$.

IX. Salīdzināt dotās bezgalīgi mazās funkcijas.

1. $\alpha(x) = 1 - \sin x,\qquad \beta(x) = \cos x,\qquad$ kad $x \to \dfrac{\pi}{2}$;
2. $\alpha(x) = \dfrac{x}{x-1},\qquad \beta(x) = x,\qquad$ kad $x \to 0$;
3. $\alpha(x) = \operatorname{tg} x + x^2,\qquad \beta(x) = x,\qquad$ kad $x \to 0$;
4. $\alpha(x) = 2\sqrt{\sin x},\qquad \beta(x) = x,\qquad$ kad $x \to 0$;
5. $\alpha(x) = 1 - \cos x,\qquad \beta(x) = \sin x,\qquad$ kad $x \to 0$;
6. $\alpha(x) = x\sin^2 x,\qquad \beta(x) = x\sin x,\qquad$ kad $x \to 0$;
7. $\alpha(x) = \sin 2x - 2\sin x,\qquad \beta(x) = x,\qquad$ kad $x \to 0$;
8. $\alpha(x) = \dfrac{2x^4}{1+x},\qquad \beta(x) = x^2,\qquad$ kad $x \to 0$;
9. $\alpha(x) = 5x^3 + 2x^2,\qquad \beta(x) = 3x^2 + 2x^3,\qquad$ kad $x \to 0$;
10. $\alpha(x) = 1 - \left(\cos\sqrt{x}\right)^3,\qquad \beta(x) = 1 - \cos x,\qquad$ kad $x \to 0$;
11. $\alpha(x) = \sqrt[3]{x},\qquad \beta(x) = x,\qquad$ kad $x \to 0$;
12. $\alpha(x) = 1 - x,\qquad \beta(x) = \sqrt{1-x},\qquad$ kad $x \to 1$;
13. $\alpha(x) = \sin 2x + x^2,\qquad \beta(x) = x,\qquad$ kad $x \to 0$;
14. $\alpha(x) = 2 - 2\cos x,\qquad \beta(x) = x^2,\qquad$ kad $x \to 0$;
15. $\alpha(x) = \cos 2x,\qquad \beta(x) = \sin 4x,\qquad$ kad $x \to \dfrac{\pi}{4}$;
16. $\alpha(x) = \dfrac{1-x}{1+x},\qquad \beta(x) = 1 - \sqrt{x},\qquad$ kad $x \to 1$;
17. $\alpha(x) = 1 - x,\qquad \beta(x) = 1 - \sqrt[3]{x},\qquad$ kad $x \to 1$;
18. $\alpha(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x},\qquad \beta(x) = x,\qquad$ kad $x \to 0$;
19. $\alpha(x) = \sin 2x - \sin x,\qquad \beta(x) = x,\qquad$ kad $x \to 0$;
20. $\alpha(x) = \dfrac{x(x+1)}{1-\sqrt{x}},\qquad \beta(x) = x,\qquad$ kad $x \to 0$;
21. $\alpha(x) = \cos x - \sqrt[3]{\cos x},\qquad \beta(x) = x,\qquad$ kad $x \to 0$;
22. $\alpha(x) = \dfrac{2x}{1+x},\qquad \beta(x) = x,\qquad$ kad $x \to 0$;
23. $\alpha(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}},\qquad \beta(x) = x,\qquad$ kad $x \to 0$;
24. $\alpha(x) = e^{\sqrt{x}} - 1,\qquad \beta(x) = x,\qquad$ kad $x \to 0$;

25. $\alpha(x) = \sqrt{1+x} - 1, \qquad \beta(x) = x, \qquad \text{kad } x \to 0.$

X. Pierādīt, ka dotās funkcijas ir nepārtrauktas punktā $x_0$.

1. $f(x) = 4x^2 + 6, \qquad x_0 = 7;$
2. $f(x) = 5x^2 + x + 9, \qquad x_0 = 1;$
3. $f(x) = 42x + 3x^2, \qquad x_0 = 2;$
4. $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4, \qquad x_0 = 3;$
5. $f(x) = 2x^2 + 2x - 3, \qquad x_0 = -1;$
6. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5, \qquad x_0 = 3;$
7. $f(x) = x^3 + 4, \qquad x_0 = 1;$
8. $f(x) = x^2 - 5x + 4, \qquad x_0 = 2;$
9. $f(x) = x^2 - 3x - 4, \qquad x_0 = 2;$
10. $f(x) = x^2 - x - 6, \qquad x_0 = 4;$
11. $f(x) = x^3 - 3x^2 - x - 2, \qquad x_0 = -3;$
12. $f(x) = x^3 + x^2 + 4x - 4, \qquad x_0 = 1;$
13. $f(x) = x^3 - 9x^2, \qquad x_0 = -2;$
14. $f(x) = x^3 + 4, \qquad x_0 = 1;$
15. $f(x) = 3x^2 + 4x - 4, \qquad x_0 = \frac{1}{2};$
16. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 7x - 1, \qquad x_0 = 0;$
17. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 1, \qquad x_0 = 2;$
18. $f(x) = 2x^2 - 17x + 35, \qquad x_0 = 1;$
19. $f(x) = 2x^2 - 7x - 15, \qquad x_0 = \frac{1}{7};$
20. $f(x) = 5x^3 + 2x^2 + 9, \qquad x_0 = -4;$
21. $f(x) = 7x^2 + 3, \qquad x_0 = \frac{1}{3};$
22. $f(x) = 2x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}, \qquad x_0 = 3;$
23. $f(x) = x^2 - x - 4, \qquad x_0 = -5;$
24. $f(x) = x^2 - 8x + 15, \qquad x_0 = 4;$
25. $f(x) = 9x^3 + 1, \qquad x_0 = -3.$

XI. Atrast funkcijas pārtraukuma punktus un noteikt to veidu. Konstruēt funkcijas shematisku grafiku.

$$1.\ a)\ \ f(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{ja} \quad x \le 1, \\ x-1, & \text{ja} \quad x > 1; \end{cases}$$

$$b)\ \ f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x}, & \text{ja} \quad x < 0, \\ \cos x, & \text{ja} \quad 0 \le x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{ja} \quad x \ge \frac{\pi}{2}; \end{cases}$$

$$2.\ a)\ \ f(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{ja} \quad x < 1, \\ \frac{1}{x-1}, & \text{ja} \quad x > 1; \end{cases}$$

$$b)\ \ f(x) = \begin{cases} \lg(1-x), & \text{ja} \quad x < 1, \\ 0, & \text{ja} \quad 1 \le x < 2, \\ 3^{x-2}, & \text{ja} \quad x \ge 2; \end{cases}$$

$$3.\ a)\ \ f(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{ja} \quad x < 1, \\ 3, & \text{ja} \quad x = 1, \\ x+1, & \text{ja} \quad x > 1; \end{cases}$$

$$b)\ \ f(x) = \begin{cases} -\frac{8}{x}, & \text{ja} \quad x < 0, \\ x^2, & \text{ja} \quad 0 \le x \le 2, \\ \ln(x-2), & \text{ja} \quad x > 2; \end{cases}$$

$$4.\ a)\ \ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1}, & \text{ja} \quad x < 3, \\ 0, & \text{ja} \quad x = 3, \\ \ln(x-3), & \text{ja} \quad x > 3; \end{cases}$$

$$b)\ \ f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1}, & \text{ja} \quad x \ne 1, \\ 3, & \text{ja} \quad x = 1; \end{cases}$$

$$5.\ a)\ \ f(x) = \begin{cases} x^2-2, & \text{ja} \quad x < 1, \\ -1, & \text{ja} \quad 1 \le x < 4, \\ \frac{1}{x-6}, & \text{ja} \quad x \ge 4; \end{cases}$$

$$b)\ \ f(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & \text{ja} \quad x \le 0, \\ \ln x, & \text{ja} \quad x > 0; \end{cases}$$

$$6.\ a)\ \ f(x) = \begin{cases} 3^{x-2}, & \text{ja} \quad x < 2, \\ x, & \text{ja} \quad 2 \le x < 4, \\ \ln(x-4), & \text{ja} \quad x > 4; \end{cases}$$

$$b)\ \ f(x) = \begin{cases} \frac{25-x^2}{x-5}, & \text{ja} \quad x \ne 5, \\ -10, & \text{ja} \quad x = 5; \end{cases}$$

7. $a)\ f(x) = \begin{cases} -8^{1-x}, & \text{ja } x < 1, \\ 0, & \text{ja } x = 1, \\ \frac{1}{x-3}, & \text{ja } x > 1; \end{cases}$

$b)\ f(x) = \begin{cases} \lg x, & \text{ja } x > 0, \\ 1 - x^2, & \text{ja } x \le 0; \end{cases}$

8. $a)\ f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & \text{ja } |x| < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{x^2}, & \text{ja } |x| \ge \frac{\pi}{2}; \end{cases}$

$b)\ f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & \text{ja } x < 0, \\ e^x, & \text{ja } x \ge 0; \end{cases}$

9. $a)\ f(x) = \begin{cases} \frac{8-x^3}{x-2}, & \text{ja } x \ne 2, \\ 0, & \text{ja } x = 2; \end{cases}$

$b)\ f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x}, & \text{ja } x < 1, \\ 4, & \text{ja } 1 \le x \le 3, \\ \lg(x-3), & \text{ja } x > 3; \end{cases}$

10. $a)\ f(x) = \begin{cases} x, & \text{ja } x \le 0, \\ 1 - x, & \text{ja } 0 < x \le 1, \\ \frac{1}{1-x}, & \text{ja } x > 1; \end{cases}$

$b)\ f(x) = \begin{cases} -\frac{9-x^2}{x+3}, & \text{ja } x \ne -3, \\ 0, & \text{ja } x = -3; \end{cases}$

11. $a)\ f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ja } x < -1, \\ 1, & \text{ja } x = -1, \\ \frac{1}{x+1}, & \text{ja } x > -1; \end{cases}$

$b)\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{ja } x < -1, \\ 2^x, & \text{ja } |x| \le 1, \\ \lg(x-1), & \text{ja } x > 1; \end{cases}$

12. $a)\ f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & \text{ja } x < 1, \\ 5, & \text{ja } x = 1; \end{cases}$

$b)\ f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & \text{ja } |x| < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{ja } x \le -\frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{ja } x > \frac{\pi}{2}; \end{cases}$

13. $a)\ f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{ja } x < -2, \\ x + 1, & \text{ja } -2 \le x < 2, \\ 3x + 2, & \text{ja } x \ge 2; \end{cases}$

$b)\ f(x) = \begin{cases} \sqrt{2-x}, & \text{ja } x \le 2, \\ \ln(x^2 - 4), & \text{ja } x > 2; \end{cases}$

14. $a)$ $f(x)=\begin{cases} x+2, & \text{ja } \ x<0, \\ 0, & \text{ja } \ x=0, \\ 3-x^2, & \text{ja } \ x>0; \end{cases}$

$b)$ $f(x)=\begin{cases} \ln(2-x), & \text{ja } \ x<2, \\ \frac{1}{x-3}, & \text{ja } \ 2\le x<3, \\ \sqrt{x-3}, & \text{ja } \ x\ge 3; \end{cases}$

15. $a)$ $f(x)=\begin{cases} x^3+1, & \text{ja } \ x\le 0, \\ \ln x, & \text{ja } \ x>0; \end{cases}$

$b)$ $f(x)=\begin{cases} \frac{16-x^2}{x+4}, & \text{ja } \ x\ne -4, \\ 1, & \text{ja } \ x=-4; \end{cases}$

16. $a)$ $f(x)=\begin{cases} e^x, & \text{ja } \ x<0, \\ \sqrt{1+x}, & \text{ja } \ 0\le x<3, \\ x^2-5, & \text{ja } \ x>3; \end{cases}$

$b)$ $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x+1}, & \text{ja } \ x<-1, \\ -4, & \text{ja } \ |x|\le 1, \\ \lg(x-1), & \text{ja } \ x>1; \end{cases}$

17. $a)$ $f(x)=\begin{cases} \frac{3}{x}, & \text{ja } \ x\le 3, \\ \ln(x-3), & \text{ja } \ x>3; \end{cases}$

$b)$ $f(x)=\begin{cases} x^2+2x, & \text{ja } \ x<0, \\ e^{x+1}, & \text{ja } \ 0<x<1, \\ \sqrt{x-1}, & \text{ja } \ x\ge 1; \end{cases}$

18. $a)$ $f(x)=\begin{cases} x^2+3, & \text{ja } \ x<0, \\ 3, & \text{ja } \ x=0, \\ 4-x, & \text{ja } \ x>0; \end{cases}$

$b)$ $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2-x}, & \text{ja } \ x>2, \\ \frac{x^2-1}{x+1}, & \text{ja } \ 0<x\le 2, \\ \sqrt{-x}, & \text{ja } \ x\le 0; \end{cases}$

19. $a)$ $f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}-x, & \text{ja } \ x\le -\frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{tg} x, & \text{ja } \ -\frac{\pi}{2}<x\le 0, \\ x^2+\frac{1}{2}, & \text{ja } \ x>0; \end{cases}$

$b)$ $f(x)=\begin{cases} \frac{x^3-8}{2-x}, & \text{ja } \ x\ne 2, \\ 0, & \text{ja } \ x=2; \end{cases}$

20. $a)$ $f(x)=\begin{cases} \sin x, & \text{ja } \ |x|\le \frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{2}, & \text{ja } \ |x|>\frac{\pi}{2}; \end{cases}$

$$b) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x}, & \text{ja} \quad x \leq -2, \\ -x-4, & \text{ja} \quad -2 \leq x \leq 1, \\ \ln(x-1), & \text{ja} \quad x > 1; \end{cases}$$

$$21.\ a) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & \text{ja} \quad x \leq 1, \\ x^2-4, & \text{ja} \quad 1 < x \leq 3, \\ 5, & \text{ja} \quad x > 3; \end{cases}$$

$$b) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-36}{x+6}, & \text{ja} \quad x \neq -6, \\ 10, & \text{ja} \quad -2 \leq x = -6; \end{cases}$$

$$22.\ a) \quad f(x) = \begin{cases} 3, & \text{ja} \quad x < -2, \\ x^2-1, & \text{ja} \quad -2 \leq x < 2, \\ x+4, & \text{ja} \quad x \geq 2; \end{cases}$$

$$b) \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & \text{ja} \quad x \leq 1, \\ 2^x, & \text{ja} \quad 1 < x \leq 3, \\ \lg(x-3), & \text{ja} \quad x > 3; \end{cases}$$

$$23.\ a) \quad f(x) = \begin{cases} 5-x, & \text{ja} \quad x < -1, \\ x^2+3, & \text{ja} \quad -1 \leq x < 2, \\ 7, & \text{ja} \quad x \geq 2; \end{cases}$$

$$b) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5+x}, & \text{ja} \quad x < -1, \\ 2, & \text{ja} \quad x = 1, \\ 1-x^2, & \text{ja} \quad x < 1; \end{cases}$$

$$24.\ a) \quad f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{ja} \quad x < -2, \\ 4-x^2, & \text{ja} \quad -2 \leq x < 1, \\ 3, & \text{ja} \quad x \geq 1; \end{cases}$$

$$b) \quad f(x) = \begin{cases} \ln(5-x), & \text{ja} \quad x < 5, \\ 0, & \text{ja} \quad 5 \leq x < 6, \\ 2^{x-6}, & \text{ja} \quad x \geq 6; \end{cases}$$

$$25.\ a) \quad f(x) = \begin{cases} -x-11, & \text{ja} \quad x < -2, \\ -x^2-2, & \text{ja} \quad -2 \leq x < 2, \\ x-11, & \text{ja} \quad x \geq 2. \end{cases}$$

$$b) \quad f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & \text{ja} \quad |x| < \frac{\pi}{2}, \\ x, & \text{ja} \quad x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ -x, & \text{ja} \quad x > \frac{\pi}{2}; \end{cases}$$

# LITERATŪRA


[1] Dz. Bože, L. Biezā, B. Siliņa, A. Strence. Uzdevumu krājums augstākajā matemātikā. - R.: Zvaigzne, 1986.

[2] E. Kronbergs, P. Rivža, Dz. Bože. Augstākā matemātika. I. daļa. - R.: Zvaigzne, 1988.

[3] M. Grebenča, S. Novoselovs. Matemātiskās analīzes kurss. I. daļa. - R.: LVI, 1952.

[4] V. Gedroics. Ievads matemātiskajā analīzē. - Daugavpils, 1989. `http://de.du.lv/matematika/ievmatanavit/index.html`

[5] V. Gedroics, V. Gedroica. Elementārās funkcijas. - Daugavpils: DPI, 1992.

[6] Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. - М.: Наука, 1977.

[7] Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. Математический анализ в примерах и задачах, часть I. Введение в анализ, производная, интеграл. - Киев: “Вышейшая школа", 1974.

[8] Райков Д.А. Одномерный математический анализ. - М.: Высшая школа, 1982.

[9] Ривкинд Я.И. Элементарные задачи по математическому анализу. - Минск: Высшая школа, 1965.

[10] Задачи и упражнения по математическому анализу под редакцией Демидовича Б.П. - Москва, 1978.

[11] Задачник - практикум по высшей математике. Множества. Функции. Предел. Непрерывность. Производная. Учебное пособие под ред. Волкова В.А. - Ленинград: изд. Ленинградского университета, 1988.

[12] Задачник по курсу математического анализа. Учебное пособие под редакцией Виленкина Н.Я. - М.: Просвещение, 19781.

# SATURS

**1. Reālā skaitļa modulis** **3**

**2. Funkcijas jēdziens. Vienādas funkcijas. Funkcijas, kas uzdota ar formulu, definīcijas apgabala noteikšana** **11**

**3. Reālā mainīgā reālu funkciju klasifikācija** **18**
3.1. Pāra un nepāra funkcijas . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 18
3.2. Periodiskas funkcijas . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 20

**4. Apvērstā (inversā) funkcija** **21**

**5. Konverğentas skaitļu virknes** **24**

**6. Funkcijas robeža** **28**
6.1. Funkcijas galīga robeža . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 28
6.2. Funkcijas bezgalīga robeža . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 32

**7. Robežu izskaitļošana** **36**

**8. Bezgalīgi mazas funkcijas un to salīdzināšana** **45**

**9. Nepārtrauktas funkcijas** **48**

**10. Vienpusējās robežas, to izskaitļošana. Funkcijas pārtraukuma punkti un to klasifikācija** **50**
10.1. Funkcijas vienpusējās robežas . . . . . . . . . . . . . . . . . . 50
10.2. Funkcijas pārtraukuma punkti un to klasifikācija . . . . . . 52

**11. Pielikums** **63**

**LITERATŪRA** **86**