DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE

Matemātikas katedra

**Vallija Gedroica**

# VAIRĀKU ARGUMENTU FUNKCIJU DIFERENCIĀLRĒĶINI

2003

# ANOTĀCIJA

Mācību līdzeklī ir ietverti uzdevumi un īss teorijas izklāsts no tēmām: vairāku argumentu funkcijas robeža un nepārtrauktība, vairāku argumentu diferencējamas funkcijas, divu argumentu funkcijas ekstrēms, divu argumentu funkcijas vismazākās un vislielākās vērtības noteikšana, nosacītie ekstrēmi. Mācību līdzeklī iekļauti uzdevumu atrisināšanas paraugi, auditorijā risināmie uzdevumi un mājas darbu uzdevumi. Pielikumā apkopoti uzdevumi studentu individuālajam darbam.

# I nodaļa

# IEVADS

## 1.1. Vairāku argumentu funkcija, tās definīcijas apgabals. Līmeņlīnijas un līmeņvirsmas

Ja katram reālu skaitļu pārim $(x; y)$, kurš pieder kādai kopai $D$ $(D \in \mathbb{R}^2)$, atbilst viens noteikts skaitlis $z \in \mathbb{R}$, tad saka, ka **kopā** $D$ **ir definēta divu argumentu** $x$ **un** $y$ **funkcija** $f$ un raksta $z = f(x; y)$, $(x; y) \in D$.

Kopu $D$ sauc par **funkcijas** $f$ **definīcijas apgabalu**, bet visu tās vērtību (ko tā iegūst kopā $D$) kopu - par **funkcijas** $f$ **vērtību kopu**.

Par divu argumentu **funkcijas** $z = f(x; y)$ **grafiku** sauc kopu

$$G_f = \left\{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \middle| (x; y) \in D\,, \quad z = f(x; y)\right\}.$$

Ģeometriski to var interpretēt kā virsmu telpā $\mathbb{R}^3$.

Funkcijas $z = f(x; y)$ definīcijas apgabals ğeometriski ir $x0y$ plakne vai šīs plaknes kaut kāda daļa, kuru ierobežo līnijas, kas var piederēt, vai nepiederēt funkcijas definīcijas apgabalam.

Par **funkcijas** $z = f(x; y)$ **līmeņlīniju** sauc tādu plaknes $x0y$ līniju, kuras punktos funkcijai ir konstanta vērtība, t.i., $f(x; y) = C$.

Analogi var definēt triju, četru un vispārīgi n argumentu funkciju, tās definīcijas apgabalu un vērtību kopu. Piemēram, triju argumentu funkcijas $u = f(x; y; z)$ definīcijas apgabals ir punktu kopa telpā $\mathbb{R}^3$; triju argumentu funkciju var raksturot ar līmeņvirsmām, kuru vienādojums ir $f(x; y; z) = C$.

Visbiežāk vairāku argumentu funkciju uzdod ar formulu, definīcijas apgabalu īpaši nenorādot. Tādā gadījumā ar $D$ saprot funkcijas argumentu pāru $(x; y)$ (divu argumentu funkcijai), trijotņu $(x; y; z)$ (triju argumentu funkcijai) utt. kopu, ar kuras elementiem formulai ir jēga.

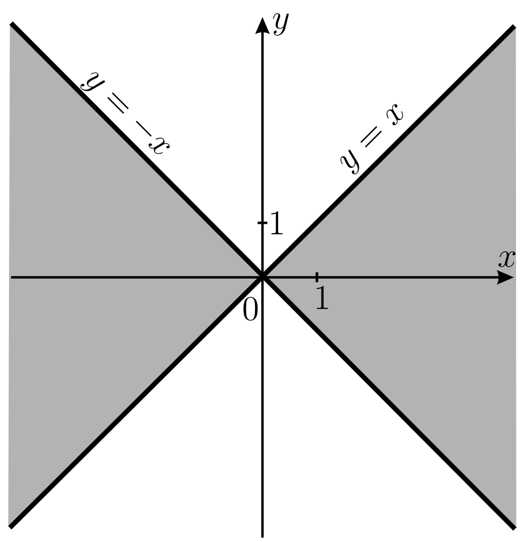
**1.1. piemērs.** Noteikt dotās funkcijas definīcijas apgabalu, sniegt tās definīcijas apgabala ģeometrisko interpretāciju:

1. $z = \arcsin \frac{y}{x}$.

   Funkcija ir definēta, ja $-1 \leq \frac{y}{x} \leq 1$. Risinot šo divkāršo nevienādību, iegūst divas nevienādību sistēmas:

   $$\begin{cases} x > 0, \\ -x \leq y \leq x, \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 0, \\ x \leq y \leq -x. \end{cases}$$

   Šo sistēmu atrisinājumu apvienojums ir attēlots 1.1. zīm. kā plaknes iesvītrotā daļa.




**1.1. zīm.**

   Tātad dotās funkcijas definīcijas apgabalam pieder tie punkti, kas atrodas starp taisnēm $y = -x$ un $y = x$. Taisnes $y = -x$ un $y = x$, izņemot koordinātu sākumpunktu, arī pieder funkcijas definīcijas apgabalam.

2. $z = \ln(y - x^2 + 2x)$.

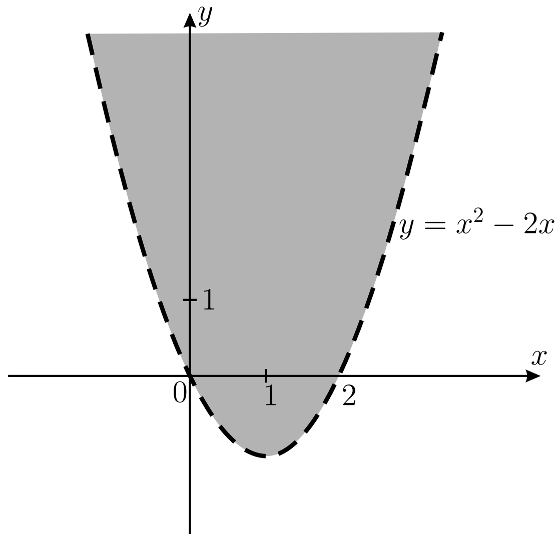
   Tā kā logaritms eksistē tikai pozitīviem skaitļiem, tad dotā funkcija ir definēta visos tajos $x0y$ plaknes punktos, kuri apmierina nevienādību

   $$y - x^2 + 2x > 0 \quad \text{jeb} \quad y > x^2 - 2x.$$

Tātad funkcijas definīcijas apgabalu ierobežo parabolu

$$y = x^2 - 2x.$$

Punkti, kas apmierina nevienādību $y > x^2 - 2x$, atrodas virs parabolas (parabola nepieder funkcijas definīcijas apgabalam). Dotās funkcijas definīcijas apgabals ir attēlots 1.2. zīm.




**1.2. zīm.**

3. $z = \sqrt{\dfrac{2y}{x^2 + y^2 - 1}}$.

Funkcijas definīcijas apgabalu nosaka nevienādība

$$\frac{2y}{x^2 + y^2 - 1} \geq 0.$$

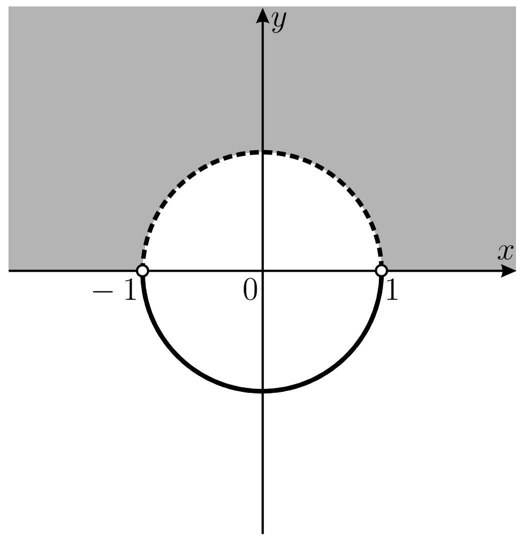
Risinot šo nevienādību, iegūst divas nevienādību sistēmas:

$$\begin{cases} y \geq 0, \\ x^2 + y^2 > 1, \end{cases} \qquad \text{vai} \qquad \begin{cases} y \leq 0, \\ x^2 + y^2 < 1. \end{cases}$$

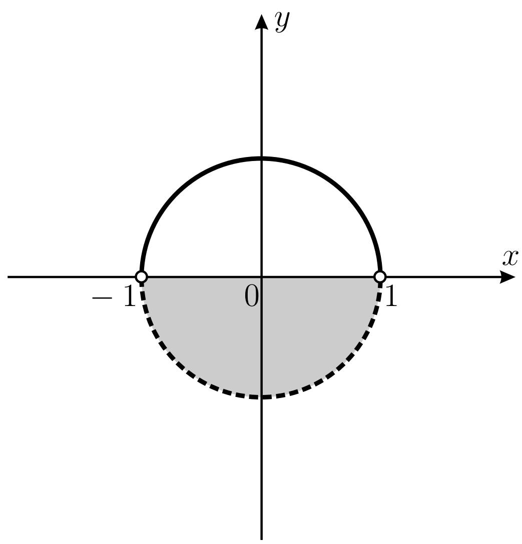
Šo nevienādību sistēmu atrisinājumi grafiski ir attēloti attiecīgi 1.3. zīm. un 1.4. zīm.

Apvienojot abu nevienādību sistēmu atrisinājumus, iegūst dotās funkcijas definīcijas apgabala ģeometrisko interpretāciju (1.5. zīm).

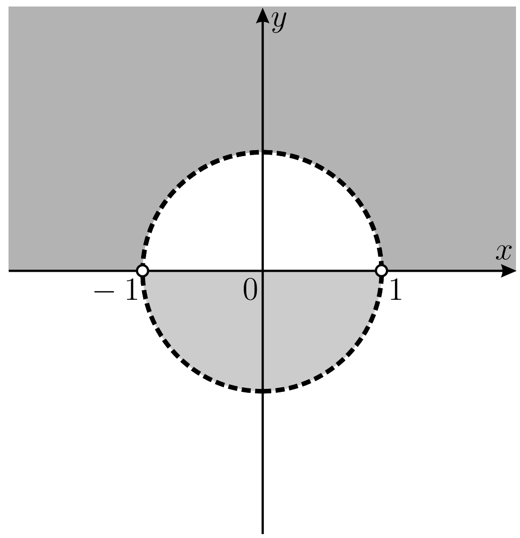
Tātad dotās funkcijas definīcijas apgabalu veido $x0y$ plaknes tie punkti, kuri atrodas virs abscisu ass ārpus riņķa ar rādiusu 1 un centru koordinātu sākumpunktā, kā arī šī riņķa tie punkti, kuri atrodas zem abscisu ass (abscisu ass funkcijas definīcijas apgabalam pieder, riņķa līnija - nepieder).




**1.3. zīm.**




**1.4. zīm.**



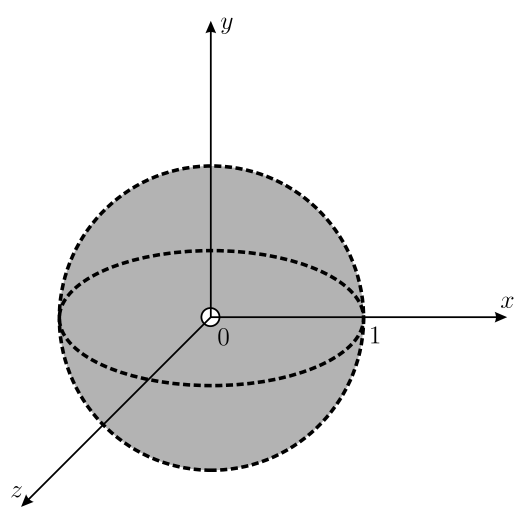

**1.5. zīm.**

4. $u = \dfrac{1}{\ln(1 - x^2 - y^2 - z^2)}$.

Dota triju argumentu funkcija, tās definīcijas apgabals ir punktu kopa telpā $\mathbb{R}^3$. Funkcija ir definēta visos tajos punktos $(x; y; z)$, kuru koordinātas apmierina nevienādību sistēmu:

$$\begin{cases} \ln(1 - x^2 - y^2 - z^2) \neq 0, \\ 1 - x^2 - y^2 - z^2 > 0, \end{cases} \quad \text{vai} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \neq 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 < 1. \end{cases}$$

Acīmredzot, nevienādību sistēmu apmierina punkti, kuri atrodas vienības sfēras $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ iekšpusē, izņemot koordinātu sākumpunktu. Sfēra funkcijas definīcijas apgabalam nepieder (1.6. zīm.).

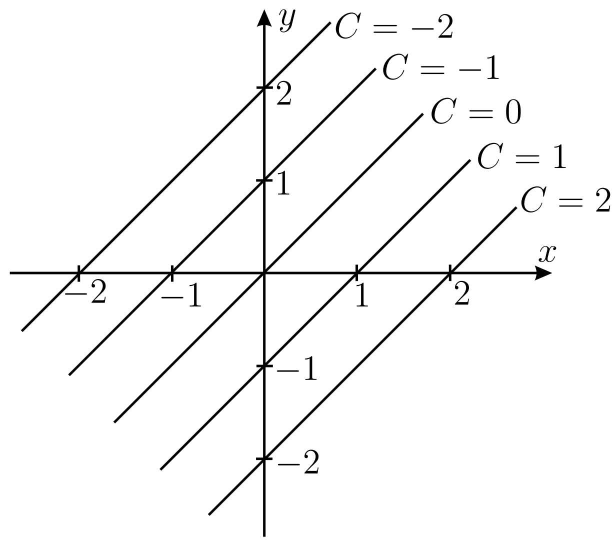



**1.6. zīm.**

**1.2. piemērs.** Noteikt dotās funkcijas līmeņlīnijas, sniegt līmeņlīniju ğeometrisko interpretāciju:

1. $z = x - y$.

   Funkcijas līmeņlīniju vienādojums ir $x - y = C$ jeb $y = x - C$, kur $C$ ir konstante. Tātad līmeņlīnijas ir taisnes, kuras ir paralēlas 1. un 3. kvadranta bisektrisei, t.i., taisnei $y = x$ (1.7. zīm.).



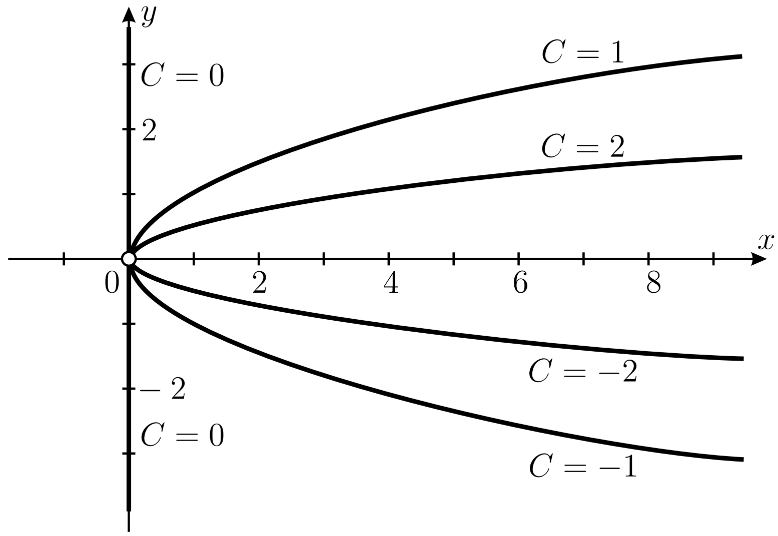

**1.7. zīm.**

2. $z = \dfrac{\sqrt{x}}{y}$.

   Šoreiz funkcijas līmeņlīniju vienādojums ir

$$\frac{\sqrt{x}}{y} = C \quad \text{vai} \quad \begin{cases} \sqrt{x} = Cy, \\ y \neq 0. \end{cases}$$

   Tātad dotās funkcijas līmeņlīnijas ir parabolu $x = C^2 y^2$ ($C \neq 0$) zari bez koordinātu sākumpunkta. Ja $C = 0$, tad līmeņlīnija ir ordinātu ass bez punkta $y = 0$ (1.8. zīm.).




**1.8. zīm.**

## Uzdevumi

1. Noteikt funkciju definīcijas apgabalus, sniegt funkciju definīcijas apgabalu ģeometrisko interpretāciju:

1) $z = \dfrac{2x+y}{x-y}$; 2) $z = \sqrt[4]{1-x^2-y^2}$;

3) $z = \arcsin\dfrac{x}{2} + \sqrt{xy}$; 4) $z = \arccos\dfrac{x}{y^2}$;

5) $z = \sqrt{\cos\left(x^2+y^2\right)}$; 6) $z = \arcsin(x-y)$;

7) $z = \ln(4-x^2-y^2)$; 8) $z = \sqrt{x^2+y^2-5}$;

9) $z = \sqrt{2x^2-y^2}$; 10) $z = \dfrac{\sqrt{xy}}{x^2+y^2}$;

11) $z = e^{\sqrt{x^2+y^2-1}}$; 12) $z = \ln(3x-y)$;

13) $z = \arccos(1-x^2-y^2)$; 14) $z = \dfrac{\sqrt{3x-2y}}{x^2+y^2+4}$;

15) $z = \dfrac{4xy}{x-3y+1}$; 16) $z = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$;

17) $z = \ln(y^2-4x+8)$; 18) $z = \dfrac{\ln(3-x)}{\sqrt{3x-2y+6}}$.

2. Atrast doto funkciju līmeņlīnijas, attēlot tās grafiski:

1) $z = 2x+y$; 2) $z = \dfrac{x}{y}$;

3) $z = \ln\sqrt{\dfrac{y}{x}}$; 4) $z = e^{xy}$;

5) $z = y - x$; 6) $z = \sqrt{y - x}$;

7) $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}$; 8) $z = x^2 + y^2$;

9) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

## 1.2. Vairāku argumentu funkcijas robeža un nepārtrauktība

Pieņemsim, ka funkcija $f$ ir definēta punkta $P_0$ apkārtnē, izņemot varbūt pašu punktu $P_0$, bet punkts $P$ pieder punkta $\mathrm{P}_0$ apkārtnei, pie tam

$$P = P(x_1; x_2; ...; x_n), \quad P_0 = P_0(\overset{\circ}{x}_1; \overset{\circ}{x}_2; \ldots; \overset{\circ}{x}_n).$$

Skaitli $b$ sauc par **funkcijas** $u = f(P)$ **robežu punktā** $P_0$, ja jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds $\delta > 0$, ka visiem $P$, kuriem $0 < \rho(P; P_0) < \delta$, izpildās nevienādība $\big|f(P) - b\big| < \varepsilon$, kur

$$\rho(P; P_0) = \sqrt{\left(x_1 - \overset{\circ}{x}_1\right)^2 + \left(x_2 - \overset{\circ}{x}_2\right)^2 + \cdots + \left(x_n - \overset{\circ}{x}_n\right)^2}$$

ir attālums starp punktiem $P$ un $P_0$. Raksta:

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = b \quad \text{jeb} \quad \lim_{\substack{x_1 \to \overset{\circ}{x}_1 \\ x_2 \to \overset{\circ}{x}_2 \\ \cdots \\ x_n \to \overset{\circ}{x}_n}} f(x_1; x_2; \ldots; x_n) = b.$$

No definīcijas seko, ka punkts $P$ var tiekties uz punktu $P_0$ no jebkuras puses pa jebkuru trajektoriju.

Ja, punktam $P$ tiecoties uz punktu $P_0$ pa dažādām trajektorijām, funkcijas vērtības tiecas uz dažādiem skaitļiem, tad funkcijas robeža punktā $P_0$ neeksistē.

Lai izskaitļotu vairāku argumentu funkcijas robežu, lieto teorēmas, kuras ir analogas teorēmām par viena argumenta funkcijas robežu.

Funkciju $u = f(P)$ sauc par **bezgalīgi mazu funkciju, kad** $P \to P_0$, ja $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = 0$.

Apskata funkciju $f(P)$, kura definēta punkta $\mathrm{P}_0$ kaut kādā apkārtnē, ieskaitot arī pašu punktu $\mathrm{P}_0$.

Funkciju $f(P)$ sauc par **nepārtrauktu punktā** $P_0$, ja

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = f(P_0).$$

Funkciju sauc par **nepārtrauktu punkta** $P_0$ **apkārtnē**, ja tā ir nepārtraukta katrā šīs apkārtnes punktā.

**1.3. piemērs.** Izskaitļot robežas:

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$.

   Ja $x \to 0$ un $y \to 0$, tad daļas skaitītājs un saucējs vienlaicīgi tiecas uz nulli, tāpēc iegūst nenoteiktību "$\frac{0}{0}$". Doto robežu var izskaitļot ar diviem paņēmieniem.

   *1. paņēmiens.*

   Ņemot vērā, ka jāizskaitļo robeža, kad $P(x;y) \to P_0(0;0)$ jeb $\rho(P;P_0) = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$, doto robežu pārraksta kā viena argumenta $\rho$ funkcijas robežu un izskaitļo to:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2+1}-1} =$$
$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2\left(\sqrt{\rho^2+1}+1\right)}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0}\left(\sqrt{\rho^2+1}+1\right) = 2.$$

   *2. paņēmiens.*

   Pārveido izteiksmi un izskaitļo robežu:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+1}+1}{x^2+y^2} =$$
$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right) = 2.$$

2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} \dfrac{\sin(xy)}{x}$.

   Lai atrastu doto robežu, novērš nenoteiktību "$\frac{0}{0}$".

Tā kā
$$\frac{\sin(xy)}{x} = y\frac{\sin(xy)}{xy} \quad (y \neq 0),$$
tad
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} \frac{\sin(xy)}{x} = \lim_{y\to 3} y \cdot \lim_{xy\to 0} \frac{\sin(xy)}{xy} = 3,$$
jo $\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$.

3. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \left(e^{\frac{1}{x^2+y^2}} - 1\right) x$.

Ja apzīmē $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, tad $x^2 + y^2 = \rho^2$ un $\frac{1}{\rho^2} \to 0$, kad $x \to \infty$, $y \to \infty$. Atrod doto robežu, pārejot pie mainīgā $\rho$:

$$\lim_{\rho\to\infty} \left(e^{\frac{1}{\rho^2}} - 1\right) \rho\cos\varphi = \lim_{\rho\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{\rho^2}} - 1}{\frac{1}{\rho^2}} \cdot \frac{1}{\rho^2}\rho\cos\varphi =$$
$$= \lim_{\rho\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{\rho^2}} - 1}{\frac{1}{\rho^2}} \cdot \lim_{\rho\to\infty} \frac{\cos\varphi}{\rho} = 1 \cdot 0 = 0$$

(izmanto $\lim\limits_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = 1$).

**1.4. piemērs.** Pierādīt, ka
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}$$
neeksistē.

*1. paņēmiens.*

Pieņem, ka punkts $P(x;y)$ tiecas uz punktu $P_0(0;0)$ pa taisnēm $y = kx$. Ja $y = kx$, tad

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{xkx}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}.$$

Acīmredzot, robeža ir atkarīga no taisnes $y = kx$ virziena koeficienta, piemēram, ja $k = 1$, tad robeža ir $\frac{1}{2}$; ja $k = 2$, tad robeža ir $\frac{2}{5}$ utt. Tā kā, punktam $P$ tiecoties uz punktu $\mathrm{P}_0$ pa dažādām taisnēm, robežas nav vienādas, tad dotajai funkcijai neeksistē robeža punktā $P_0(0;0)$.

*2. paņēmiens.*

Apzīmē $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Tad $x^2 + y^2 = \rho^2$. Iegūst:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2 \sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{1}{2}\sin 2\varphi = \frac{1}{2\sin 2\varphi}.$$

Tā kā robeža ir atkarīga no tā, kādā virzienā $P \to P_0$, tad dotās funkcijas robeža punktā $P_0(0;0)$ neeksistē.

## Uzdevumi

Izskaitļot robežas:

1. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \frac{x^2+y^3}{2x-3y}$;
2. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}} \frac{x^2-y^2}{x^2+2x-xy-2y}$;
3. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$;
4. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\ln(1+2xy)}{\sin 3xy}$.

# II nodaļa

# VAIRĀKU ARGUMENTU DIFERENCĒJAMAS FUNKCIJAS

## 2.1. Parciālie atvasinājumi un pilnais diferenciālis

Pieņemsim, ka funkcija $z = f(x; y)$ ir definēta punktā $P(x; y)$ un šī punkta apkārtnē.

Ja uzskata, ka $y$ ir konstants, tad $f(x; y)$ kļūst par viena argumenta $x$ funkciju, kuras atvasinājumu punktā var definēt kā robežu no funkcijas pieauguma $\Delta_x z$ attiecības pret argumenta $x$ pieaugumu $\Delta x$, kad argumenta pieaugums $\Delta x$ tiecas uz nulli. Ja šāda galīga robeža eksistē, tad to sauc par **funkcijas $z = f(x; y)$ parciālo atvasinājumu pēc $x$ punktā** $(x; y)$, t.i.,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x}.$$

Funkcijas $z = f(x; y)$ parciālo atvasinājumu pēc mainīgā $x$ apzīmē ar vienu no simboliem:

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}, z'_x, f'_x.$$

Analogi definē parciālo atvasinājumu pēc mainīgā $y$:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta y}.$$

Apzīmē:

$$\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}, z'_y, f'_y.$$

Līdzīgi definē triju, četru un vispārīgi $n$ argumentu funkcijas parciālos atvasinājumus.

Vairāku argumentu funkcijas parciālos atvasinājumus atrod, izmantojot zināmās viena argumenta funkciju atvasināšanas formulas. Pieņemot, ka pārējie argumenti ir konstanti, funkciju pēc mainīgā argumenta atvasina kā viena argumenta funkciju.

**2.1. piemērs.** Noteikt funkcijas $z = xye^{x+=2y}$ parciālos atvasinājumus.

Uzskatot $y$ par konstanti, iegūst

$$z'_x = y(xe^{x+2y})'_x = y(e^{x+2y} + xe^{x+2y}) = ye^{x+2y}(1+x).$$

Līdzīgi, uzskatot $x$ par konstanti, atrod

$$z'_y = x(ye^{x+2y})'_y = x\big(e^{x+2y} + ye^{x+2y}\cdot 2\big) = xe^{x+2y}(1+2y).$$

**2.2. piemērs.** Aprēķināt funkcijas $f(x;y) = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ parciālo atvasinājumu vērtības punktā $(1;2)$.

Vispirms nosaka funkcijas $f(x;y)$ parciālos atvasinājumus.

$$f'_x(x;y) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{1}{y} = \frac{y}{x^2+y^2};$$

$$f'_y(x;y) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{-x}{x^2+y^2}.$$

Pēc tam aprēķina atrasto parciālo atvasinājumu skaitliskās vērtības, ja $x=1$ un $y=2$:

$$f'_x(1;2) = \left.\frac{y}{x^2+y^2}\right|_{\substack{x=1\\y=2}} = \frac{2}{1+4} = \frac{2}{5}; f'_y(1;2) = \left.\frac{-x}{x^2+y^2}\right|_{\substack{x=1\\y=2}} =$$

$$= \frac{-1}{1+4} = -\frac{1}{5}.$$

**2.3. piemērs.** Noteikt funkcijas $u = z^{xy^2}$ parciālos atvasinājumus.

Funkciju atvasina pēc $x$ un $y$ kā eksponentfunkciju, bet pēc $z$ - kā pakāpes funkciju. Ņemot to vērā, var atrast funkcijas $u$ parciālos atvasinājumus:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = z^{xy^2}\ln z\left(xy^2\right)'_x = y^2 z^{xy^2}\ln z;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2xyz^{xy^2}\ln z;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = xy^2 z^{xy^2-1}.$$

Par **funkcijas $f(x;y)$ pilno pieaugumu punktā** $P_0(x_0;y_0)$ sauc starpību $f(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y)-f(x_0;y_0)$. Šo starpību apzīmē ar $\Delta f(x_0;y_0)$. Tātad

$$\Delta f(x_0;y_0)=f(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y)-f(x_0;y_0),$$

kur $\Delta x$ un $\Delta y$ ir argumentu pieaugumi.

Funkciju $z=f(x;y)$ sauc par **diferencējamu punktā** $P(x;y)$, ja tās pilno pieaugumu šajā punktā var izteikt kā divu saskaitāmo summu:

$$\Delta z=(A\Delta x+B\Delta y)+(\alpha\Delta x+\beta\Delta y),$$

kur

$\Delta x,\Delta y$ ir attiecīgi argumentu $x,y$ pieaugumi punktā $P$,

$A,B$ - izteiksmes, kas ir atkarīgas no $x$ un $y$, bet nav atkarīgas no $\Delta x$ un $\Delta y$, pie tam $A=\frac{\partial z}{\partial x}$, $B=\frac{\partial z}{\partial y}$.

$\alpha,\beta$ - bezgalīgi mazas funkcijas, kad $\Delta x\to 0$ un $\Delta y\to 0$.

Pirmais saskaitāmais $A\Delta x+B\Delta y$ ir lineārs attiecībā pret $\Delta x$ un $\Delta y$ un tam ir noteicošā loma funkcijas pieaugumā.

Šo funkcijas $z=f(x;y)$ pilnā pieauguma galveno daļu sauc par **funkcijas pilno diferenciāli** un apzīmē ar $dz$ vai $df(x;y)$.

Tādējādi $dz=A\Delta x+B\Delta y$. Ja izmanto A=$\frac{\partial z}{\partial x}$ un B=$\frac{\partial z}{\partial y}$, tad divu argumentu funkcijas pilnais diferenciālis ir vienāds ar tā saucamo **parciālo diferenciāļu** $\frac{\partial z}{\partial x}dx$ un $\frac{\partial z}{\partial y}dy$ summu:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\ (\Delta x=dx,\Delta y=dy).$$

Ņemot vērā to, ka funkcijas $z=f(x;y)=f(P)$ pilnais diferenciālis punktā $P(x_0;y_0)$ ir pilnā pieauguma galvenā daļa, var uzrakstīt aptuvenu vienādību $\Delta f(P_0)\approx df(P_0)$, t.i.,

$$f(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y)\approx f(x_0;y_0)+df(x_0;y_0).$$

Izmantojot šo formulu, var aprēķināt aptuveni funkcijas vērtību punktā $P(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y)$.

Tātad, lai noteiktu kāda lieluma $C$ aptuveno vērtību, izmantojot funkcijas diferenciāli, rīkojas šādi:

1. lielumu $C$ uzraksta kā atbilstošas funkcijas $z=f(x;y)$ vērtību punktā $(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y)$, t.i., $C=f(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y)$;
2. $x_0$ un $y_0$ izvēlas tā, lai

(a) punkts $(x_0; y_0)$ atrastos pietiekami tuvu punktam $(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$,

(b) $f(x_0; y_0)$ vērtība būtu viegli izskaitļojama;

3. izskaitļo $f(x_0; y_0)$;

4. atrod $\frac{\partial z}{\partial x}$ un $\frac{\partial z}{\partial y}$ un šo parciālo atvasinājumu vērtības punktā $(x_0; y_0)$;

5. izskaitļo lieluma $C$ aptuveno vērtību:

$$C = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) \approx f(x_0; y_0) + f'_x(x_0; y_0)\Delta x + f'_y(x_0; y_0)\Delta y. \tag{2.1}$$

Analogi definē, izskaitļo un izmanto pilno diferenciāli jebkura galīga skaita argumentu funkcijām.

**2.4. piemērs.** Atrast funkcijas $f(x; y) = 5x^2 - xy + 3y^2 + 5x + 2y - 1$ pilno pieaugumu un pilno diferenciāli. Aprēķināt to skaitliskās vērtības punktā $(1; 2)$, ja $\Delta x = 0,1$ un $\Delta y = 0,2$. Novērtēt absolūto un relatīvo kļūdu, kas rodas, aizstājot funkcijas pieaugumu ar tās diferenciāli.

Atrod:

$$\begin{gathered}\Delta z = 5(x+\Delta x)^2 - x + \Delta x)(y+\Delta y) + 3(y+\Delta y)^2 + 5(x+\Delta x) + 2(y+\Delta y) - \\ - 1 - 5x^2 + xy - 3y^2 - 5x - 2y + 1 = \\ = 10x\Delta x + 5\Delta x^2 - x\Delta y - y\Delta x - \Delta x\Delta y + 6y\Delta y + 3\Delta y^2 + 5\Delta x + 2\Delta y = \\ = (10x - y + 5)\Delta x + (6y - x + 2)\Delta y + 5\Delta x^2 - \Delta x\Delta y + 3\Delta y^2;\end{gathered}$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y = (10x - y + 5)\Delta x + (6y - x + 2)\Delta y.$$

Ievietojot $\Delta z$ un $dz$ izteiksmēs $x = 1, y = 2$, $\Delta x = 0,1, \Delta y = 0,2$, iegūst:

$$\begin{aligned}\Delta z = (10 - 2 + 5)0,1 + (6 \cdot 2 - 1 + 2)0,2 + 5 \cdot 0,1^2 - \\ - 0,1 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,2^2 = 4,05; \\ dz = (10 - 2 + 5)0,1 + (6 \cdot 2 - 1 + 2) \cdot 0,2 = 3,9.\end{aligned}$$

Absolūtā kļūda: $|\Delta z - dz| = 4,05 - 3,9 = 0,15$.

Relatīvā kļūda: $\left|\frac{\Delta z - dz}{\Delta z}\right| = \frac{0,15}{4,05} \approx 0,04$ jeb 4%.

**2.5. piemērs.** Nošķelta konusa pamatu rādiusi $R = 40$ cm un $r = 15$ cm, bet augstums $H = 50$ cm. Kā izmainās konusa tilpums, ja $R$, $r$ un $H$ palielina attiecīgi par 2 mm, 3 mm un 1 mm?

Nošķeltā konusa tilpums $V = \frac{\pi H}{3}\left(R^2 + r^2 + Rr\right)$ ir triju argumentu $R, r$ un $H$ funkcija. Lai atrastu konusa tilpuma izmaiņu, aprēķina funkcijas $V$ pieaugumu $\Delta V$ punktā $(R; r; H)$, kur $R = 40$, $r = 15$ un $H = 50$ (argumentu pieaugumi $\Delta R = 0,2$, $\Delta r = 0,3$ un $\Delta H = 0,1$).

$$\Delta V = \pi \frac{H + \Delta H}{3}\Big((R + \Delta R)^2 + (r + \Delta r)^2 + (R + \Delta R)(r + \Delta r)\Big) - \\ - \frac{\pi H}{3}\left(R^2 + r^2 + Rr\right).$$

Funkcijas pieauguma skaitlisko vērtību varētu iegūt, ievietojot $\Delta V$ izteiksmē argumentu un to pieaugumu skaitliskās vērtības, taču izdevīgāk aprēķināt $\Delta V$ aptuveno vērtību, izmantojot diferenciāli.

Tā kā $dV = \frac{\partial V}{\partial R}\Delta R + \frac{\partial V}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial V}{\partial H}\Delta H$ un $\Delta V \approx dV$ (argumentu pieaugumi $\Delta R$, $\Delta r$, $\Delta H$ ir pietiekami mazi), tad, atrodot parciālos atvasinājumus

$$\frac{\partial V}{\partial R} = \frac{\pi H}{3}(2R + r),$$
$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\pi H}{3}(2r + R),$$
$$\frac{\partial V}{\partial H} = \frac{\pi}{3}\left(R^2 + r^2 + Rr\right),$$

iegūst

$$dV = \frac{\pi H}{3}(2R + r)\Delta R + \frac{\pi H}{3}(2r + R)\Delta r + \frac{\pi}{3}\left(R^2 + r^2 + Rr\right)\Delta H.$$

Ievietojot argumentu un to pieaugumu skaitliskās vērtības, izskaitļo $dV$.

$$\Delta V \approx dV = \frac{50\pi}{3}(80 + 15)\,0,2 + \frac{50\pi}{3}(30 + 40)\,0,3 + \\ + \frac{\pi}{3}(40^2 + 15^2 + 40 \cdot 15)0,1 = 747,5\pi.$$

Tātad nošķeltā konusa tilpums aptuveni palielinās par $747,5\pi$ cm$^3$.

**2.6. piemērs.** Izskaitļot aptuveni $0,98^{2,01}$.

Apskata funkciju $z = x^y$. Šoreiz $x_0 = 1$ un $y_0 = 2$, bet $\Delta x = -0,02$ un $\Delta y = 0,01$. Acīmredzot, $z(1;2) = 1$. Atrod funkcijas $z$ vērtību punktā $(0,98; 2,01)$. Lai to izdarītu, atrod funkcijas $z$ parciālos atvasinājumus un to vērtības punktā $(1;2)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\ y=2}} = 2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \cdot \ln x, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\ y=2}} = 0.$$

Izmantojot aptuveno vienādību (2.1), iegūst:

$$(0,98)^{2,01} = z(0,98; 2,01) \approx z(1;2) + \frac{\partial z(1;2)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z(1;2)}{\partial y}\Delta y =$$
$$= 1 + 2(-0,02) + 0 \cdot 0,01 = 0,96.$$

## Uzdevumi

1. Noteikt funkciju parciālos atvasinājumus:

1. $z = x^3 - 2xy + y^2$; 2. $z = ye^{-xy}$;
3. $\rho = u^4 \cos^2 \varphi$; 4. $u = e^{\frac{x}{y}} + e^{-\frac{z}{y}}$;
5. $z = \arcsin \dfrac{y}{x}$; 6. $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$;
7. $S = \ln \sin(x - 2t)$; 8. $u = \operatorname{arctg}(x - y)^2$.

2. Noteikt norādītos parciālos atvasinājumus:

1. $z = e^{xy}\left(x^2 + y^2\right)$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$;
2. $u = 2^{xyz} \sin \dfrac{y}{x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$;
3. $u = (x - y)(x - z)(y - z)$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}$.

3. Aprēķināt parciālo atvasinājumu vērtības norādītajos punktos:

1. $f(x;y) = x^2 \sin^2 y$, $(-1; \dfrac{\pi}{4})$;
2. $f(x;y;z) = x^{\frac{y}{z}}$, $(e; 1; -1)$.

4. Parādīt, ka dotās funkcijas apmierina atbilstošos vienādojumus:

   1. $z = \ln(x^2 + y^2)$, $\quad y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0;$

   2. $u = x^y$, $\quad \dfrac{x}{y} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1}{\ln x} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2u;$

   3. $u = \sqrt{xy + \dfrac{x}{y}}$, $\quad u\left(x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = xy.$

5. Atrast funkcijas $z = 3x^2 + xy - y^2 + 1$ pilno pieaugumu un pilno diferenciāli. Aprēķināt to skaitliskās vērtības punktā $(-1; 2)$, ja $\Delta x = 0,3$, $\Delta y = -0,2$. Novērtēt absolūto un relatīvo kļūdu, kas rodas, aizstājot funkcijas pieaugumu ar tās diferenciāli.

6. Atrast doto funkciju pilnos diferenciāļus:

   1. $z = x + ye^{\frac{x}{y}};$ $\quad$ 2. $u = xy\ln(xy);$

   3. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{y};$ $\quad$ 4. $u = \left(\dfrac{y}{x}\right)^z.$

7. Izskaitļot doto funkciju pilno diferenciāļu vērtības norādītajos punktos:

   1. $z = e^{xy}$,
      ja $x = -2, y = -1,$ $\quad dx = -0,3, dy = 0,2;$

   2. $u = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,
      ja $x = 3, y = 4, z = 5,$ $\quad dx = -0,1, dy = 0,3, dz = 0,2.$

8. Izskaitļot aptuveni:

   1. $1,02^3 \cdot 0,97^2;$ $\quad$ 2. $\sqrt{8,04^2 + 6,03^2};$

   3. $\ln(0,09^3 + 0,99^2).$

9. Dots taisnstūris ar malām $x = 8$ m un $y = 6$ m. Noteikt, kā izmainās diagonāles garums un taisnstūra laukums, ja garāko malu saīsina par $1,2$ cm, bet īsāko malu pagarina par $1,4$ cm.

## 2.2. Pieskarplakne un normāle

Pieņemsim, ka funkcija $f(x;y)$ ir diferencējama punktā $P_0(x_0;y_0)$.

Par **funkcijas** $f(x;y)$ **grafika pieskarplakni punktā** $M_0(x_0;y_0;z_0)$ sauc plakni, kas iet caur šo punktu un apmierina šādu nosacījumu: attālums no grafika patvaļīga punkta $M(x;y;z)$ līdz šai plaknei ir pēc patikas mazs salīdzinot ar attālumu $M_0M$, kad $(x;y) \to (x_0;y_0)$.

Par **funkcijas** $f(x;y)$ **grafika normāli punktā** $M_0(x_0;y_0;z_0)$ sauc taisni, kas iet caur šo punktu un ir perpendikulāra šajā punktā konstruētajai pieskarplaknei.

Ja funkcija $f(x;y)$ ir diferencējama punktā $P_0(x_0;y_0)$, tad tās grafikam atbilstošajā punktā $M_0(x_0;y_0;z_0)$ eksistē pieskarplakne un normāle, kuru vienādojumi attiecīgi ir šādi:

$$z - z_0 = f'_x(x_0;y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0;y_0)(y-y_0),$$

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0;y_0)} = \frac{y-y_0}{f'_y(x_0;y_0)} = \frac{z-z_0}{-1}, \quad \text{kur } z_0 = f(x_0;y_0).$$

**2.7. piemērs.** Sastādīt pieskarplaknes un normāles vienādojumu funkcijas $f(x;y) = \sin\frac{x}{y}$ grafikam punktā $P(\pi;1;0)$.

Atrod funkcijas parciālo atvasinājumu vērtības atbilstošajā punktā $(\pi;1)$:

$$f'_x(x;y) = \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}, \qquad f'_x(\pi;1) = \cos\pi = -1.$$

$$f'_y(x;y) = -\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}, \qquad f'_y(\pi;1) = -\pi\cos\pi = \pi.$$

Tātad pieskarplaknes vienādojums ir šāds:

$$z = -1(x-\pi) + \pi(y-1) \quad \text{jeb} \quad x - \pi y + z = 0,$$

bet normāles vienādojums -

$$\frac{x-\pi}{-1} = \frac{y-1}{\pi} = \frac{z}{-1}.$$

Pieņemsim, ka vienādojums $F(x;y;z) = 0$ netiešā veidā definē argumentu $x$ un $y$ funkciju $z = f(x;y)$ (skat.[2, 63.-71. lpp.]). Tad funkcijas $z$ parciālos atvasinājumus var izteikt ar funkcijas $F$ parciālajiem atvasinājumiem:

$$z'_x = -\frac{F'_x(x;y;z)}{F'_z(x;y;z)}, \quad z'_y = -\frac{F'_y(x;y;z)}{F'_z(x;y;z)}.$$

Izmantojot funkcijas $F$ parciālos atvasinājumus, pieskarplaknes vienādojumu var uzrakstīt šādi:

$$F'_x(x_0; y_0; z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0; y_0; z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0; y_0; z_0)(z-z_0)=0,$$

bet normāles vienādojumu -

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0; y_0; z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0; y_0; z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0; y_0; z_0)}.$$

**2.8. piemērs.** Uzrakstīt pieskarplaknes un normāles vienādojumu virsmai $(z^2-x^2)xyz-y^5=5$ punktā $M(1; 1; 2)$.

Virsmas vienādojumu pārraksta šādi: $xyz^3-x^3yz-y^5-5=0$. Atrod funkcijas $F(x; y; z)=xyz^3-x^3yz-y^5-5$ parciālos atvasinājumus un to vērtības dotajā punktā:

$$F'_x(1; 1; 2)=(yz^3-3x^2yz)\Big|_{M(1;1;2)}=2;$$
$$F'_y(1; 1; 2)=(xz^3-x^3z-5y^4)\Big|_{M(1;1;2)}=1;$$
$$F'_z(1; 1; 2)=(3xyz^2-x^3y)\Big|_{M(1;1;2)}=11.$$

Ievietojot parciālo atvasinājumu vērtības un dotā punkta koordinātas pieskarplaknes vienādojumā, iegūst virsmas $(z^2-x^2)xyz-y^5=5$ pieskarplaknes punktā $M(1; 1; 2)$ vienādojumu:

$$2(x-1)+(y-1)+11(z-2)=0$$

jeb

$$2x+y+11z-25=0.$$

Ievietojot parciālo atvasinājumu vērtības un dotā punkta koordinātas normāles vienādojumā, iegūst virsmas $(z^2-x^2)xyz-y^5=5$ normāles, kas iet caur punktu $M(1; 1; 2)$, vienādojumu:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{11}.$$

**Uzdevumi**

Sastādīt pieskarplaknes un normāles vienādojumus dotajām virsmām norādītajos punktos:

| | |
|---|---|
| 1. $z = x^2 + 3y^2$, | $A(1; 1; 4)$; |
| 2. $z = xy$, | $B(1; 0; 0)$; |
| 3. $z = \sin(xy)$, | $C(1; \frac{\pi}{3}; \frac{\sqrt{3}}{2})$; |
| 4. $z = e^{x+y}$, | $D(1; -1; 1)$; |
| 5. $z = \dfrac{x^3 - 3axy + y^3}{a^2}$, | $E(a; a; -a)$; |
| 6. $z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$, | $F(3; 4; -7)$; |
| 7. $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$, | $G(1; 1; \frac{\pi}{4})$; |
| 8. $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$, | $(1; 2; -1)$. |

## 2.3. Saliktas funkcijas diferencēšana

Ja $z = z(x; y)$ ir divu argumentu $x$ un $y$ diferencējama funkcija, bet $x$ un $y$ ir viena argumenta $t$ diferencējamas funkcijas $x = x(t)$ un $y = y(t)$, tad saliktas funkcijas $z = z\big(x(t); y(t)\big) = f(t)$ atvasinājumu atrod pēc formulas:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Ja $z = z(u; v)$ ir divu argumentu $u$ un $v$ diferencējama funkcija, bet $u$ un $v$ ir argumentu $x$ un $y$ diferencējamas funkcijas $u = u(x; y)$, $v = v(x; y)$, tad saliktas funkcijas $z = z\big(u(x; y); v(x; y)\big) = \varphi(x; y)$ parciālos atvasinājumus atrod pēc formulām:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}. \tag{2.2}$$

**2.9. piemērs.** Atvasināt funkciju $u = x^2 y^3 z$, kur $x = t$, $y = t^2$, $z = \sin t$.

Tā kā $u$ ir viena neatkarīgā mainīgā $t$ funkcija, kur $x$, $y$, $z$ ir starpargumenti, tad atvasināt šo funkciju nozīmē atrast $\frac{du}{dt}$.

*1. paņēmiens.*

Izmanto formulu

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}. \tag{2.3}$$

Atrodot attiecīgos atvasinājumus un ievietojot tos formulā (2.3), iegūst:

$$\frac{du}{dt} = 2xy^3z \cdot 1 + 3x^2y^2z \cdot 2t + x^2y^3 \cos t = t^7(8 \sin t + t \cos t).$$

*2. paņēmiens.*

Šo un līdzīgus piemērus var atrisināt, izmantojot pirmās kārtas diferenciāļa formas invarianci. Tam nolūkam:

1. atrod dotās funkcijas pilno diferenciāli pēc starpargumentiem $x, y, z$:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = 2xy^3zdx + 3x^2y^2zdy + x^2y^3dz;$$

2. atrod funkciju $x, y, z$ diferenciāļus pēc neatkarīgā mainīgā $t$:

$$dx = dt,\ dy = 2tdt,\ dz = \cos tdt;$$

3. ievieto šos diferenciāļus $du$ izteiksmē:

$$du = 2xy^3z \cdot 1 + 3x^2y^2z \cdot 2t + x^2y^3 \cos tdt$$

jeb

$$du = t^7(8 \sin t + t \cos t)dt;$$

4. izdalot ar $dt$ vienādības abas puses, iegūst:

$$\frac{du}{dt} = t^7(8 \sin t + t \cos t).$$

*3. paņēmiens.*

Mainīgo $x, y$ un $z$ vietā funkcijas $u$ izteiksmē ievieto dotās izteiksmes un atvasina funkciju $u$ kā viena argumenta $t$ funkciju:

$$u = t^8 \sin t,$$

$$\frac{du}{dt} = 8t^7 \sin t + t^8 \cos t = t^7(8 \sin t + t \cos t).$$

**2.10. piemērs.** Atrast funkcijas $z = \sin(uv)$, kur $u = 2x + 3y$, $v = xy$, parciālos atvasinājumus.

Izmantojot formulas (2.2), iegūst:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = v\,(\cos(uv))\,2 + u\,(\cos(uv))\,y = (4xy + 3y^2)\cos(2x^2y + 3xy^2);$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = v(cos(uv))3 + u(cos(uv))x = (6xy + 2^2)\cos(2x^2y + 3xy^2).$$

**2.11. piemērs.** Dota funkcija $u = x + y^2 + z^3$, kur $y = \sin x$, $z = \cos x$. Atrast $\frac{du}{dx}$.

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx} = 1 + 2y\cos x + 3z^2(-\sin x) =$$
$$= 1 + 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 1 + \sin 2x - 3\cos^2 x\sin x.$$

**2.12. piemērs.** Pārbaudīt, vai funkcija $z = ye^{x^2-y^2}$ apmierina vienādojumu

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

Atrod parciālos atvasinājumus:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{x^2-y^2}\cdot 2x = 2xye^{x^2-y^2};$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2-y^2} + ye^{x^2-y^2}(-2y) = e^{x^2-y^2} - 2y^2e^{x^2-y^2}.$$

Izmantojot atrastos parciālos atvasinājumus, pārveido dotā vienādojuma kreiso pusi:

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x}\cdot 2xye^{x^2-y^2} + \frac{1}{y}e^{x^2-y^2} - 2ye^{x^2-y^2} =$$
$$= ye^{x^2-y^2}(2 + \frac{1}{y^2} - 2) = \frac{ye^{x^2-y^2}}{y^2} = \frac{z}{y^2}.$$

Tātad dotā funkcija apmierina doto vienādojumu.

**Uzdevumi**

1. Dotajām saliktajām funkcijām atrast norādītos atvasinājumus:

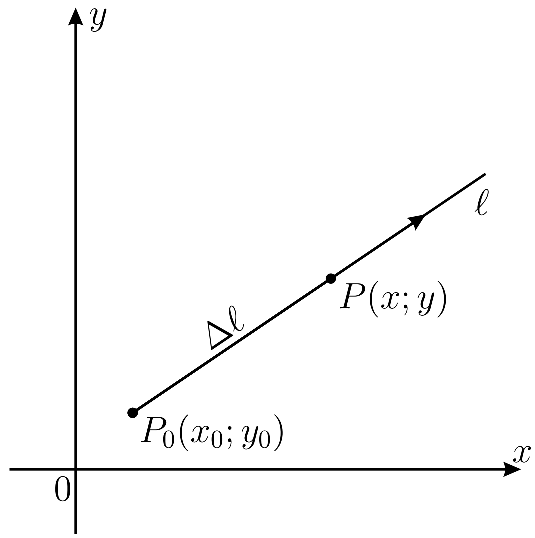
1. $z = \operatorname{arcctg}\dfrac{y}{x},\ y = \sqrt{1-x},$ $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x}$ un $\dfrac{dz}{dx};$
2. $z = x^3 e^y,\ x = uv,\ y = u^2 - v^2,$ $\quad \dfrac{\partial z}{\partial u}$ un $\dfrac{\partial z}{\partial v};$
3. $z = x^y,\ y = \ln x,$ $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x}$ un $\dfrac{dz}{dx};$
4. $u = e^{z-2y},\ z = \sin x,\ y = x^2,$ $\quad \dfrac{du}{dx};$
5. $z = \ln t,\ t = \sin x + \cos y,$ $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x}$ un $\dfrac{\partial z}{\partial y};$
6. $z = e^{xy}\ln(x+y),\ x = 2t^2,\ y = 1 - 2t^2,$ $\quad \dfrac{dz}{dt}$
7. $z = \cos(2t - 4x^2 - y),\ x = \dfrac{1}{t},\ y = \dfrac{\sqrt{t}}{\ln t},$ $\quad \dfrac{dz}{dt};$
8. $u = x^2 + y^2 + z^2,\ x = \sqrt{t},\ y = e^{2t},\ z = t^2,$ $\quad \dfrac{du}{dt};$
9. $z = x^2 y - xy^2,\ x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,$ $\quad \dfrac{\partial z}{\partial \rho}$ un $\dfrac{\partial z}{\partial \varphi};$
10. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{y},\ y = e^{(1+x)^2},$ $\quad \dfrac{dz}{dx};$
11. $z = f(u),\ u = xy + \dfrac{y}{x},$ $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x};$
12. $u = y^2 + \sqrt{xz} + \dfrac{1}{\cos z},\ x = t + v,\ y = \dfrac{t}{v},\ z = tv,$ $\quad \dfrac{\partial u}{\partial t},\ \dfrac{\partial u}{\partial v}.$

2. Pārbaudīt, vai dotās funkcijas apmierina atbilstošos vienādojumus:

1. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y},\ x = u + v,\ y = u - v,$ $\quad \dfrac{\partial z}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{u-v}{u^2+v^2};$
3. $z = xy + xe^{\frac{y}{x}},$ $\quad x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$

## 2.4. Atvasinājums norādītajā virzienā. Gradients

Pieņemsim, ka dota funkcija $z = f(x;y)$, kas ir definēta punkta $P_0(x_0;y_0)$ apkārtnē, un dots stars $l$ ar sākumu punktā $P_0$. Punkts $P(x;y)$ ir patvaļīgi izvēlēts punkts uz stara, kas pieder punkta $P_0$ apkārtnei. Nogriežņa $PP_0$ garumu apzīmē ar $\Delta l$ (2.1. zīm.).




**2.1. zīm.**

Ja eksistē $\lim\limits_{\Delta l \to 0} \frac{f(P)-f(P_0)}{\Delta l}$, tad šo robežu sauc par **funkcijas** $z = f(x;y)$ **atvasinājumu punktā** $P_0$ **virzienā** $l$ un apzīmē ar $\frac{\partial z}{\partial l}(P_0)$.

Tātad

$$\frac{\partial z}{\partial l}(P_0) = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{f(P) - f(P_0)}{\Delta l}.$$

Ja funkcija $z$ diferencējama punktā $P_0$, tad funkcijas $z = f(x;y)$ atvasinājumu punktā $P_0$ virzienā $l$ var aprēķināt pēc formulas

$$\frac{\partial z}{\partial l}(P_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(P_0)\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}(P_0)\cos\beta$$

jeb

$$\frac{\partial z}{\partial l}(P_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(P_0)\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}(P_0)\sin\alpha.$$

kur

$\alpha$ - leņķis, kuru veido $l$ ar abscisu ass pozitīvo virzienu,

$\beta$ - leņķis, kuru veido $l$ ar ordinātu ass pozitīvo virzienu.

**2.13. piemērs.** Atrast funkcijas $z = 3x^4 + xy + y^3$ atvasinājumu punktā $P_0(1;2)$ virzienā, kas ar abscisu asi veido $135°$ leņķi.

Izmantojot atvasinājuma norādītajā virzienā aprēķināšanas formulu, iegūst:

$$\frac{\partial z}{\partial l}(P_0) = \left(12x^3 + y\right)\Big|_{P_0} \cos 135^\circ + \left(x + 3y^2\right)\Big|_{P_0} \sin 135^\circ =$$
$$= (12+2)\cos(90^\circ + 45^\circ) + 13\sin(90^\circ + 45^\circ) =$$
$$= 14(-\sin 45^\circ) + 13\cos 45^\circ = -14\frac{\sqrt{2}}{2} + 13\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Par punktā $P_0$ diferencējamas **funkcijas** $z = f(x;y)$ **gradientu** sauc vektoru $\left(\frac{\partial z}{\partial x}(P_0); \frac{\partial z}{\partial y}(P_0)\right)$, kurš norāda virzienu, kurā funkcijai $z = f(x;y)$ ir vislielākais izmaiņas ātrums punktā $P_0$, pie tam šī vektora modulis ir vienāds ar ātruma skaitlisko vērtību.

Gradienta vektoru var aprēķināt pēc formulas

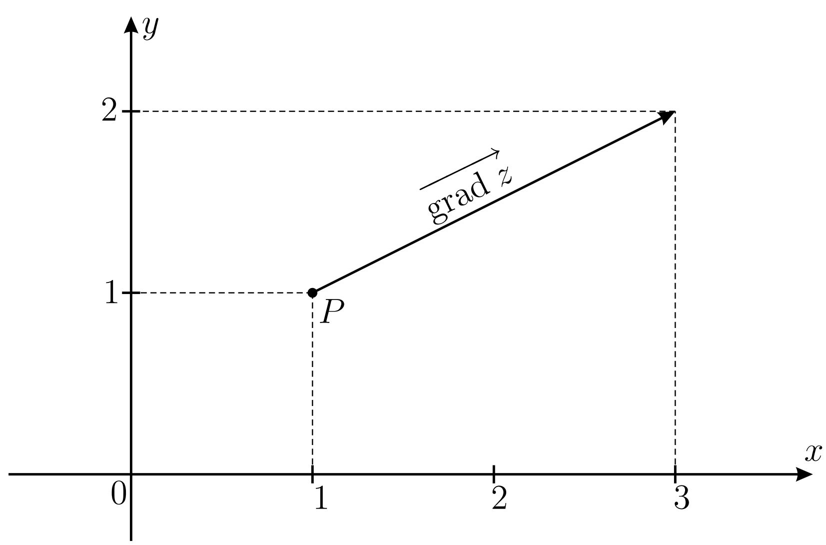
$$\overrightarrow{\mathrm{grad}\, z(P_0)} = \frac{\partial z}{\partial x}(P_0)\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}(P_0)\vec{j}.$$

**2.14. piemērs.** Atrast un attēlot ģeometriski funkcijas $z = x^2 y$ gradientu punktā $P(1;1)$.

Izskaitļo dotās funkcijas parciālos atvasinājumus punktā $P$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_P = 2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_P = 1.$$

Atrod gradientu $\overrightarrow{\mathrm{grad}\, z}(P) = 2\vec{i} + \vec{j}$ un attēlo to ģeometriski (2.2. zīm.).




**2.2. zīm.**

Līdzīgi izskaitļo atvasinājumu norādītajā virzienā un gradientu triju argumentu funkcijai $u = u(x;y;z)$.

**Uzdevumi**

1. Atrast funkcijas $z = 2x^2 - 3y^2$ atvasinājumu punktā $P(1;0)$ virzienā, kas ar abscisu asi veido $120^\circ$ leņķi.
2. Atrast funkcijas $z = \ln(x^2 + y^2)$ atvasinājumu punktā $P(1;1)$ 1. kvadranta bisektrises virzienā.
3. Atrast funkcijas $z = x^3 + xy^2 - 2x^2y + 1$ atvasinājumu punktā $A$ virzienā $AB$, ja $A(1;2)$ un $B(4;6)$.
4. Atrast funkcijas $z = \ln\cos(x - y^2)$ atvasinājumu abscisu ass virzienā.
5. Atrast funkcijas $u = \ln(e^x + e^y + e^z)$ atvasinājumu koordinātu sākumpunktā virzienā, kas ar koordinātu asīm veido leņķus $\alpha$, $\beta$ un $\gamma$.
6. Atrast doto funkciju gradientus norādītajos punktos:

   1. $z = \sqrt{x^2 - y^2}$, $\qquad A(5;3)$;

   3. $z = (\sin x)^{\cos y}$, $\qquad B(\frac{\pi}{2};0)$;

   5. $u = xyz$, $\qquad M(1;2;3)$.
7. Atrast leņķi starp funkcijas $z = \ln\frac{y}{x}$ gradientiem punktos $A(\frac{1}{2};\frac{1}{4})$ un $B(1;1)$.
8. Noteikt funkcijas $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ atvasinājumu tās gradienta virzienā.

## 2.5. Augstāko kārtu atvasinājumi un diferenciāļi

Funkcijas parciālos atvasinājumus un diferenciāļus, kuru kārta ir lielāka par vienu, sauc par **funkcijas augstāko kārtu parciālajiem atvasinājumiem un diferenciāļiem**.

Pieņemsim, ka $z = f(x;y)$ ir diferencējama funkcija kopā $D$. Ja parciālajiem atvasinājumiem $\frac{\partial z}{\partial x}$ un $\frac{\partial z}{\partial y}$ savukārt eksistē parciālie atvasinājumi, tad tos sauc par **funkcijas $z$ otrās kārtas parciālajiem atvasinājumiem** un apzīmē šādi:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

jeb

$$z''_{x^2} = (z'_x)'_x, \quad z''_{xy} = (z'_x)'_y, \quad z''_{yx} = \left(z'_y\right)'_x, \quad z''_{y^2} = \left(z'_y\right)'_y.$$

Līdzīgi definē un apzīmē trešās, ceturtās un vispārīgi $n$-tās kārtas parciālos atvasinājumus.

**2.15. piemērs.** Atrast funkcijas $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ otrās kārtas parciālos atvasinājumus.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_x = y\left((x^2+y^2)^{-1}\right)'_x = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_y = \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_x = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_y = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Ja jauktie atvasinājumi $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ un $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ ir nepārtraukti punktā $P_0$, tad tie ir vienādi šajā punktā, t.i.,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(P_0) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(P_0).$$

Augstāko kārtu parciālos atvasinājumus triju, četru un vispārīgi $n$ argumentu funkcijām definē un aprēķina līdzīgi.

**2.16. piemērs.** Atrast $\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}$, ja $z = \cos(xy)$.

Lai funkcijai $z$ atrastu norādīto trešās kārtas parciālo atvasinājumu, vispirms doto funkciju atvasina divas reizes pēc $y$ un pēc tam funkciju

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ atvasina pēc $x$.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -x\sin(xy),$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x^2\cos(xy),$$
$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = \big(-x^2\cos(xy)\big)'_x = -2x\cos(xy) + x^2 y\sin(xy).$$

**2.17. piemērs.** Atrast $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$, ja $u = 3^{xyz}$.

Dota triju mainīgo funkcija. Lai atrastu norādīto atvasinājumu, funkcija jāatvasina pa vienai reizei pēc katra argumenta.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz3^{xyz}\ln 3;$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = z\ln 3(3^{xyz} + yxz3^{xyz}\ln 3) = z3^{xyz}\ln 3(1 + xyz\ln 3);$$
$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z} = 3^{xyz}\ln 3(1 + xyzln3) + zxy3^{xyz}\ln^2 3(1+xyz) +$$
$$+ z3xyz\ln^2 3xy = 3^{xyz}\ln 3(1 + 3xyz\ln 3 + (xyz)^2\ln 3).$$

Apgabalā $D$ diferencējamai funkcijai $f(x;y)$ var atrast diferenciāli

$$df(x;y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x;y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x;y)dy.$$

Ja funkcija $df(x;y)$ ir diferencējama, tad var atrast tās diferenciāli, t.i., $d\big((df(x;y)\big)$, kas ir **funkcijas** $f(x;y)$ **otrās kārtas diferenciālis** $d^2 f(x;y)$. Ja $dx$ un $dy$ ir fiksēti, tad

$$d^2 f(x,y) = d\big(df(x;y)\big) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2.$$

Analogi definē $d^3 f(x;y)$, $d^4 f(x;y)$ un vispārīgi $d^n f(x;y)$. Formāli var rakstīt:

$$d^n f(x;y) = d\big(d^{n-1} f(x,y)\big) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f(x,y).$$

**2.18. piemērs.** Izskaitļot funkcijas $z = y^4 e^{\operatorname{arctg} x}$ otrās kārtas diferenciāli punktā $M(0;1)$ un atrast šīs funkcijas trešās kārtas diferenciāli.

Atrod funkcijas pirmās un otrās kārtas parciālos atvasinājumus:

$$z'_x = y^4 e^{\operatorname{arctg} x}\frac{1}{1+x^2};$$
$$z'_y = 4y^3 e^{\operatorname{arctg} x};$$
$$z''_{xx} = y^4(e^{\operatorname{arctg} x}\frac{1}{(1+x^2)^2} + e^{\operatorname{arctg} x}\frac{-2x}{(1+x^2)^2}) = y^4 e^{\operatorname{arctg} x}\frac{1-2x}{(1+x^2)^2};$$
$$z''_{xy} = 4y^3 e^{\operatorname{arctg} x}\frac{1}{1+x^2};$$
$$z''_{yy} = 12y^2 e^{\operatorname{arctg} x}.$$

Atrod otrās kārtas parciālo atvasinājumu vērtības dotajā punktā $M(0;1)$:

$$z''_{xx}(M) = 1; \quad z''_{xy}(M) = 4; \quad z''_{yy}(M) = 12.$$

Ievietojot šīs vērtības funkcijas otrās kārtas diferenciāļa formulā, iegūst:

$$d^2z\Big|_M = dx^2 + 8dxdy + 12dy^2.$$

Lai atrastu dotās funkcijas trešās kārtas diferenciāli, atrod šīs funkcijas trešās kārtas parciālos atvasinājumus:

$$z'''_{xxx} = y^4(e^{\operatorname{arctg} x}\frac{1}{1+x^2} + e^{\operatorname{arctg} x}\frac{-2(1+x^2)^2-(1-2x)2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4}) =$$
$$= y^4 e^{\operatorname{arctg} x}\frac{1}{1+x^2}(1+\frac{6x^2-8x-2}{(1+x^2)^2}) = y^4 e^{\operatorname{arctg} x}\frac{x^4+8x^2-8x-1}{(1+x^2)^3};$$
$$z'''_{yyy} = 24y e^{\operatorname{arctg} x};$$
$$z'''_{xyy} = 12y^2 e^{\operatorname{arctg} x}\frac{1}{1+x^2};$$
$$z'''_{xxy} = 4y^3 e^{\operatorname{arctg} x}\frac{1-2x}{(1+x^2)^2}.$$

Ņemot vērā divu argumentu funkcijas trešās kārtas diferenciāļa formulu

$$d^3z = z'''_{xxx}dx^3 + 3z'''_{xxy}dx^2dy + 3z'''_{xyy}dxdy^2 + z'''_{yyy}dy^3,$$

atrod dotās funkcijas $z = y^4 e^{\operatorname{arctg} x}$ trešās kārtas diferenciāli:

$$d^3z = ye^{\operatorname{arctg} x}\left(y^3\frac{x^4+8x^2-8x-1}{(1+x^2)^3}dx^3 + 12y^2\frac{1-2x}{(1+x^2)^2}dx^2dy + \right.$$
$$\left. + 36y\frac{1}{1+x^2}dxdy^2 + 24dy^3\right).$$

**Uzdevumi**

1. Atrast visus otrās kārtas parciālos atvasinājumus dotajām funkcijām:

   1. $z = x^2 - 2xy^2$;  2. $z = e^{-xy}$;
   3. $z = y^{\ln x}$;  4. $2^x \sin(z - y) = u$.

2. Dota funkcija $z = \cos(xy)$, atrast $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ vērtību punktā $(0; \pi)$.
3. Dota funkcija $z = \ln(x^2 + y)$, atrast $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ punktā $(0; 1)$.
4. Dota funkcija $u = \sin(xyz)$, atrast $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$.
5. Dota funkcija $z = \sin x \cos 2y$, atrast $\frac{\partial^{10} z}{\partial x^4 \partial y^6}$.
6. Pierādīt, ka dotās funkcijas apmierina norādītos vienādojumus:

   1. $z = \ln(x^2 + y^2)$, $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0;$
   2. $z = \cos(x + e^y)$, $\quad \dfrac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = \dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}.$

7. Atrast otrās kārtas diferenciāļus dotajām funkcijām punktā $(1; 1)$:

   1. $z = x - 3\sin y$;  2. $z = \sin y \ln x + e^x \ln y$;
   3. $z = e^{x+y^2}$;  4. $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$.

## 2.6. Teilora formula divu argumentu funkcijai

Ja funkcijai $z = f(x; y)$ punkta $(x_0; y_0)$ apkārtnē eksistē nepārtraukti visu kārtu parciālie atvasinājumi līdz $(n + 1)$-ās kārtas atvasinājumam ieskaitot, tad šai divu argumentu funkcijai var uzrakstīt **Teilora formulu**:

$$f(x; y) = f(x_0; y_0) + df(x_0; y_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0; y_0) + \cdots + \frac{1}{n!}d^n f(x_0; y_0) + R_n,$$

kur $R_n$ ir **Teilora formulas atlikuma loceklis**.

Atlikuma locekli $R_n$ var izteikt, piemēram, **Lagranža formā**:

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y), \quad 0 < \theta_1 < 1, \quad 0 < \theta_2 < 1.$$

Ja Teilora formulā atstāj tikai tos locekļus, kas satur $\Delta x$, $\Delta y$ pirmajā vai pirmajā un otrajā pakāpē, tad iegūst aptuvenu vienādību:

$$f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) \approx f(x_0; y_0) + \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial y}\Delta y + \\ + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial y^2}\Delta y^2\right).$$

**2.19. piemērs.** Uzrakstīt funkcijas

$$f(x; y) = x^3 - 5x^2 - xy + y^2 + 10x + 5y - 4$$

Teilora formulu punkta $(2; -1)$ apkārtnē.

Atrod $f(2; -1) = 2$ un izskaitļo funkcijas parciālos atvasinājumus dotajā punktā:

$$\begin{aligned}
&f'_x(x; y) = 3x^2 - 10x - y + 10, && f'_x(2; -1) = 3;\\
&f'_y(x; y) = -x + 2y + 5, && f'_y(2; -1) = 1;\\
&f''_{xx}(x; y) = 6x - 10, && f''_{xx}(2; -1) = 2;\\
&f''_{xy}(x; y) = -1, && f''_{xy}(2; -1) = -1;\\
&f''_{yy}(x; y) = 2, && f''_{yy}(2; -1) = 2;\\
&f'''_{xxx}(x; y) = 6, && f'''_{xxx}(2; -1) = 6.
\end{aligned}$$

Visi pārējie dotās funkcijas parciālie atvasinājumi vienādi ar nulli, tāpēc dotās funkcijas Teilora formulu var uzrakstīt šādi:

$$f(x; y) = 2 + 3(x-2) + (y+1) + (x-2)^2 - (x-2)(y+1) + (y+1)^2 + (x-2)^3.$$

**2.20. piemērs.** Uzrakstīt funkcijas $f(x; y) = x^y$ Teilora formulu punkta $(1; 1)$ apkārtnē, ja $n = 3$. Izmantojot iegūto Teilora formulu, aprēķināt aptuveni $1,1^{1,02}$.

Šoreiz izmanto Teilora formulu šādā izskatā:

$$f(x; y) = f(1; 1) + \frac{df(1; 1)}{1!} + \frac{d^2 f(1; 1)}{2!} + \frac{d^3 f(1; 1)}{3!} + R_3 \qquad (2.4)$$

1. Atrod visus parciālos atvasinājumus līdz trešajai kārtai ieskaitot:

$$
\begin{aligned}
&f'_x = yx^{y-1},\\
&f'_y = x^y \ln x,\\
&f''_{x^2} = y(y-1)x^{y-2},\\
&f''_{xy} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x = x^{y-1}(1 + y\ln x),\\
&f''_{y^2} = x^y(\ln x)^2,\\
&f'''_{x^3} = y(y-1)(y-2)x^{y-3},\\
&f'''_{x^2y} = (2y-1)x^{y-2} + y(y-1)x^{y-2}\ln x,\\
&f'''_{x\,y^2} = x^{y-1}\ln x(2 + y\ln x),\\
&f'''_{y^3} = x^y(\ln x)^3.
\end{aligned}
$$

2. Izskaitļo funkcijas vērtību un tās parciālo atvasinājumu vērtības punktā $(1;1)$:

$$
\begin{array}{llll}
f(1;1) = 1, & f'_x(1;1) = 1, & f'_y(1;1) = 0, & \\
f''_{x^2}(1;1) = 0, & f''_{xy}(1;1) = 1, & f''_{y^2}(1;1) = 0, & \\
f'''_{x^3}(1;1) = 0, & f'''_{x^2y}(1;1) = 1, & f'''_{xy^2}(1;1) = 0, & f'''_{y^3}(1;1) = 0.
\end{array}
$$

3. Atrod funkcijas diferenciāļu vērtības punktā $(1;1)$:

$$
\begin{aligned}
df(1;1) &= f'_x(1;1)\Delta x + f'_y(1;1)\Delta y = \Delta x;\\
d^2f(1;1) &= f''_{x^2}(1;1)\Delta x^2 + 2f''_{xy}(1;1)\Delta x\Delta y + f''_{y^2}(1;1)\Delta y^2\\
&= 2\Delta x\Delta y;\\
d^3f(1;1) &= f'''_{x^3}(1;1)\Delta x^3 + 3f'''_{x^2y}(1;1)\Delta x^2\Delta y + 3f'''_{xy^2}(1;1)\Delta x\Delta y^2 +\\
&+ f'''_{y^3}(1;1)\Delta y^3 = 3\Delta x^2\Delta y.
\end{aligned}
$$

Ievietojot $df(1;1)$, $d^2f(1;1)$, $d^3f(1;1)$ formulā (2.4), iegūst

$$
x^y\Big|_{\substack{x=1\\y=1}} = 1 + \Delta x + \Delta x\Delta y + \frac{1}{2}\Delta x^2\Delta y + R_3.
$$

Aprēķina $1,1^{1,02}$. Tā kā $\Delta x = 0,1$ un $\Delta y = 0,02$, tad

$$
1,1^{1,02} \approx 1 + 0,1 + 0,002 + 0,0001 = 1,1021.
$$

**2.21. piemērs.** Funkcija $z(x;y)$ ir uzdota netiešā veidā $z^3 - 2xz + y = 0$, pie tam $z(1;1) = 1$. Uzrakstīt šai funkcijai Teilora formulu, kas satur $x$ un $y$ pakāpes līdz otrajai ieskaitot, punkta $(1;1)$ apkārtnē.

Tātad

$$z(x;y) = z(1;1) + dz(1;1) + \frac{1}{2}d^2z(1;1) + R_2. \tag{2.5}$$

1. Atrod pirmās un otrās kārtas parciālos atvasinājumus:

$$\begin{aligned}
&3z^2z'_x - 2z - 2xz'_x = 0, && z'_x = \frac{2z}{3z^2 - 2x},\\
&6zz_x'^{\,2} + 3z^2z''_{x^2} - 4z'_x - 2xz''_{x^2} = 0, && z''_{x^2} = \frac{4z'_x - 6zz_x'^{\,2}}{3z^2 - 2x},\\
&3z^2z'_y - 2xz'_y + 1 = 0, && z'_y = \frac{1}{2x - 3z^2},\\
&6zz_y'^{\,2} + 3z^2z''_{y^2} - 2xz''_{y^2} = 0, && z''_{y^2} = \frac{6zz_y'^{\,2}}{2x - 3z^2},\\
&6zz'_xz'_y + 3z^2z''_{xy} - 2z'_y - 2xz''_{xy} = 0, && z''_{xy} = \frac{6zz'_xz'_y - 2z'_y}{2x - 3z^2}.
\end{aligned}$$

2. Atrod parciālo atvasinājumu vērtības punktā $(1;1)$:

$$\begin{aligned}
&z'_x(1;1) = 2, && z'_y(1;1) = -1, &&\\
&z''_{x^2}(1;1) = -16, && z''_{xy}(1;1) = 10, && z''_{y^2}(1;1) = -6.
\end{aligned}$$

3. Atrod pirmās un otrās kārtas diferenciāļu vērtības punktā $(1;1)$:

$$\begin{aligned}
&dz(1;1) = 2\Delta x - 1\cdot\Delta y,\\
&d^2z(1;1) = -16\Delta x^2 + 20\Delta x\Delta y - 6\Delta y^2.
\end{aligned}$$

4. Ievietojot atrastās diferenciāļu vērtības formulā (2.5), iegūst:

$$z(x;y) = 1 + (2\Delta x - \Delta y) - (8\Delta x^2 - 10\Delta x\Delta y + 3\Delta y^2) + R_2.$$

## Uzdevumi

1. Uzrakstīt Teilora formulu funkcijai $f(x;y) = x^3 - 2y^3 + 3xy$ punkta $(2;1)$ apkārtnē.

2. Uzrakstīt funkcijas $f(x;y) = y^x$ Teilora formulu, kas satur $x$ un $y$ pakāpes līdz otrajai ieskaitot, punkta $(2;1)$ apkārtnē.

# III nodaļa

# DIVU ARGUMENTU FUNKCIJAS EKSTRĒMS. VISMAZĀKĀS UN VISLIELĀKĀS VĒRTĪBAS NOTEIKŠANA

## 3.1. Divu argumentu funkcijas pētīšana uz ekstrēmu

Pieņemsim, ka funkcija $f(x;y)$ ir definēta punkta $P_0(x_0;\ y_0)$ apkārtnē un ir nepārtraukta šajā punktā.

Punktu $P_0(x_0;y_0)$ sauc par **funkcijas** $f(x;y)$ **minimuma punktu**, ja $f(x;y) > f(x_0;y_0)$ visiem punktiem $P(x;y)$, kas pieder punkta $P_0(x_0;y_0)$ apkārtnei un ir atšķirīgi no šī punkta.

Funkcijas vērtību šajā punktā sauc par **funkcijas minimumu** un apzīmē ar $\min f(x;y)$. Tādējādi $\min f(x;y) = f(x_0;y_0)$.

Analogi definē funkcijas maksimuma punktu un tās maksimumu.

Funkcijas maksimuma un minimuma punktus sauc par **funkcijas ekstrēma punktiem**, bet funkcijas maksimumu un minimumu sauc par **funkcijas ekstrēmiem**.

Funkcijas ekstrēma **nepieciešamais nosacījums**: ja $P_0(x_0;y_0)$ ir funkcijas $f(x;y)$ ekstrēma punkts, tad šajā punktā

1. funkcijas parciālie atvasinājumi eksistē un ir vienādi ar nulli vai

2. vismaz viens no šiem parciālajiem atvasinājumiem neeksistē, bet tas parciālais atvasinājums, kurš eksistē, ir vienāds ar nulli.

Punktus, kuros $\frac{\partial f}{\partial x}$ un $\frac{\partial f}{\partial y}$ ir nulle, sauc par **funkcijas** $f(x;y)$ **stacionārajiem punktiem**.

Divu argumentu funkcijas ekstrēma **pietiekamais nosacījums**: ja funkcijai $f(x;y)$ punkta $P_0(x_0;y_0)$ apkārtnē eksistē nepārtraukti pirmās un otrās kārtas parciālie atvasinājumi, pie tam

$$f'_x(x_0;y_0) = f'_y(x_0;y_0) = 0 \text{ un } \Delta = AC - B^2 > 0,$$

kur

$$A = f''_{x^2}(x_0;y_0), \quad B = f''_{xy}(x_0;y_0), \quad C = f''_{y^2}(x_0;y_0),$$

tad $P_0(x_0;y_0)$ ir šīs funkcijas ekstrēma punkts, pie tam:

ja $A < 0$, tad $P_0(x_0;y_0)$ ir funkcijas maksimuma punkts;

ja $A > 0$, tad $P_0(x_0;y_0)$ ir funkcijas minimuma punkts.

Ja $\Delta < 0$, tad $P_0(x_0;y_0)$ nav šīs funkcijas ekstrēma punkts;

ja $\Delta = 0$, tad šī kārtula ekstrēmus nenosaka.

Funkcijas $f(x;y)$ *ekstrēmu noteikšanas kārtula tās stacionārajos punktos*:

1. atrod $\frac{\partial f}{\partial x}$ un $\frac{\partial f}{\partial y}$;
2. atrod funkcijas stacionāros punktus;
3. atrod $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ un $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$;
4. atrod otrās kārtas parciālo atvasinājumu vērtības stacionārajos punktos, t.i., atrod $A$, $B$, $C$;
5. izskaitļo $\Delta = AC - B^2$ vērtību katrā stacionārajā punktā;
6. atkarībā no $\Delta$ zīmes (ja $\Delta > 0$, tad nosaka arī $A$ zīmi) izdara secinājumus par punkta $P_0(x_0;y_0)$ raksturu.

**3.1. piemērs.** Noteikt funkcijas $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$ ekstrēmus.

Lai noteiktu funkcijas stacionāros punktus, atrod funkcijas parciālos atvasinājumus:

$$z'_x = 8x^3 - 2x, \quad z'_y = 4y^3 - 4y.$$

Atrisinot vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 8x^3 - 2x = 0, \\ 4y^3 - 4y = 0, \end{cases}$$

iegūst funkcijas stacionāros punktus: $(0;0)$, $(0;\pm 1)$, $\left(\pm\frac{1}{2};0\right)$, $\left(\pm\frac{1}{2};\pm 1\right)$.

Atrod funkcijas otrās kārtas parciālos atvasinājumus:

$$z''_{x^2} = 24x^2 - 2, \quad z''_{xy} = 0, \quad z''_{y^2} = 12y^2 - 4.$$

Tā kā $\Delta\big|_{(0;0)} = (-2)(-4) - 0 = 8 > 0$, tad punkts $(0;0)$ ir dotās funkcijas ekstrēma punkts. Ņemot vērā, ka

$$A = z''_{x^2}\big|_{(0;0)} = -2 < 0,$$

secina, ka funkcijai $z$ punktā $(0;0)$ ir maksimums:
$\max z(x;y) = z(0;0) = 0$.

Tā kā

$$\Delta\big|_{(0;\pm 1)} = (-2)8 = -16 < 0, \quad \Delta\big|_{\left(\pm\frac{1}{2};0\right)} = 4(-4) = -16 < 0,$$

tad funkcijai $z$ punktos $(0;\pm 1)$ un $(\pm\frac{1}{2};0)$ ekstrēmu nav.

Tā kā

$$\Delta\big|_{\left(\pm\frac{1}{2};\pm 1\right)} = 4 \cdot 8 = 32 > 0 \quad \text{un} \quad A = z''_{x^2}\big|_{\left(\pm\frac{1}{2};\pm 1\right)} > 0,$$

tad funkcijai $z$ punktos $\left(\pm\frac{1}{2};\pm 1\right)$ ir minimums:

$$\min z(x;y) = z\left(\frac{1}{2};1\right) = z\left(-\frac{1}{2};-1\right) = z\left(\frac{1}{2};-1\right) = \\ = z\left(-\frac{1}{2};1\right) = -\frac{9}{8}.$$

**3.2. piemērs.** Noteikt funkcijas $z = x^6 + y^6$ ekstrēmus.

Lai noteiktu funkcijas stacionāros punktus, atrod funkcijas parciālos atvasinājumus: $z'_x = 6x^5$, $z'_y = 6y^5$.

Atrisinot vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 6x^5 = 0, \\ 6y^5 = 0, \end{cases}$$

secina, ka funkcijai ir tikai viens stacionārais punkts $(0;0)$.

Atrod funkcijas otrās kārtas parciālos atvasinājumus:

$$z''_{x^2} = 30x^4, \quad z''_{xy} = 0, \quad z''_{y^2} = 30y^4.$$

Tā kā $\Delta\Big|_{(0,0)} = 0$, tad šī kārtula dotajai funkcijai ekstrēmus nenosaka. Taču $\min z(x;y) = z(0;0) = 0$, jo koordinātu sākumpunktā funkcija $z = x^6 + y^6$ sasniedz mazāko vērtību, salīdzinot ar tās vērtībām punkta $(0;0)$ apkārtnē.

**Uzdevumi**

Noteikt ekstrēmus dotajām funkcijām:

1. $z = x^3 + y^3 - 9xy$;
2. $z = -x^2 - xy - y^2 + 3x + 6y$;
3. $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$.

## 3.2. Divu argumentu funkcijas vismazākās un vislielākās vērtības noteikšana

Ir zināms, ka slēgtā un ierobežotā kopā $D$ katra nepārtraukta funkcija ir ierobežota un sasniedz šajā kopā vismazāko un vislielāko vērtību (skat.[2, 18.-22. lpp.]).

Lai noteiktu nepārtrauktas funkcijas $f(x;y)$ vismazāko un vislielāko vērtību slēgtā un ierobežotā kopā $D$, tad

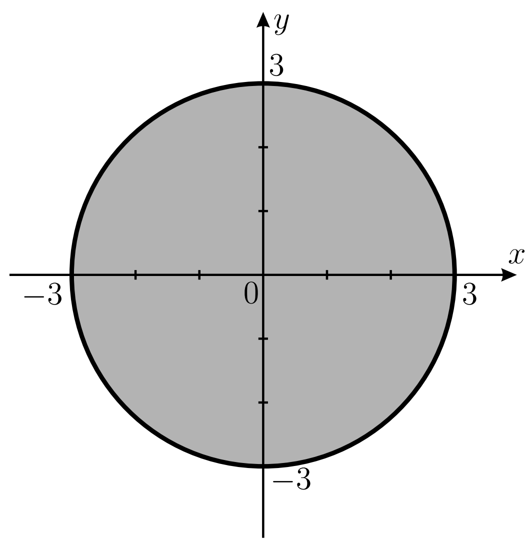
1. jāatrod kopas $D$ iekšējie punkti, kuros izpildās ekstrēma nepieciešamais nosacījums;
2. jāizskaitļo funkcijas vērtības atrastajos punktos;
3. jāatrod funkcijas vismazākā un vislielākā vērtība uz apgabala $D$ robežas;
4. jāizvēlas no iegūtajām funkcijas vērtībām vismazākā un vislielākā vērtība (apzīmē atbilstoši $\min\limits_{D} f(x;y)$ un $\max\limits_{D} f(x;y)$).

**3.3. piemērs.** Atrast funkcijas $z = x^2 - 4x - y^2$ vismazāko un vislielāko vērtību riņķī $x^2 + y^2 \leq 9$ (3.1. zīm.).

1. Atrod funkcijas stacionāros punktus, kas ir dotā apgabala iekšējie punkti. Šim nolūkam atrod funkcijas parciālos atvasinājumus: $z'_x = 2x - 4$, $z'_y = -2y$, un, atrisinot vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 2x - 4 = 0, \\ -2y = 0, \end{cases}$$

secina, ka funkcijai ir tikai viens stacionārais punkts $(2; 0)$.




**3.1. zīm.**

2. Tā kā punkts $(2; 0)$ ir dotā riņķa iekšējais punkts, tad izskaitļo funkcijas vērtību šajā punktā: $z(2; 0) = -4$.

3. Atrod funkcijas kritiskos punktus uz apgabala robežas, t.i., uz riņķa līnijas $x^2 + y^2 = 9$. No riņķa līnijas vienādojuma izsaka $y^2 = 9 - x^2$ un formulā, kas uzdod doto funkciju, $y^2$ aizvieto ar $9 - x^2$. Iegūst viena argumenta $x$ funkciju

$$z = x^2 - 4x - (9 - x^2) = 2x^2 - 4x - 9,$$

kas ir definēta intervālā $[-3; 3]$. Tagad ir jāatrod šīs viena argumenta funkcijas vismazākā un vislielākā vērtība slēgtā intervālā $[-3; 3]$. Šim nolūkam atrod funkcijas atvasinājumu $z'_x = 4x - 4$ un, atrisinot vienādojumu $4x - 4 = 0$, iegūst funkcijas kritisko punktu $x = 1$. Funkcijas vērtība šajā kritiskajā punktā ir $z(1) = -11$, bet segmenta $[-3; 3]$ galapunktos: $z(-3) = 21$ un $z(3) = -3$.

4. Tātad funkcija $z$ savu vismazāko un vislielāko vērtību dotajā riņķī var sasniegt šādos punktos: $(2; 0)$, $(1; -2\sqrt{2})$, $(1; 2\sqrt{2}$, $(-3; 0)$, $(3; 0)$.

Atrod:

$$
\begin{aligned}
&z(2;0) = -4,\\
&z(1;-2\sqrt{2}) = -11,\\
&z(1;2\sqrt{2}) = -11,\\
&z(-3;0) = 21,\\
&z(3;0) = -3.\\
&\min_D z(x;y) = z(1;-2\sqrt{2}) = z(1;2\sqrt{2}) = -11,\\
&\max_D z(x;y) = z(-3;0) = 21.
\end{aligned}
$$

**Uzdevumi**

1. Atrast doto funkciju vismazākās un vislielākās vērtības attiecīgajos apgabalos:

   (a) $z = xy(4-x-y)$; $D$ ir trijstūris, kuru ierobežo taisnes $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 8$;

   (b) $u = 2xy$; $D$ ir riņķis $x^2 + y^2 \leq 1$.

2. Pozitīvu skaitli $a$ sadalīt 3 nenegatīvos saskaitāmajos tā, lai to reizinājums būtu vislielākais.

# IV nodaļa

# NOSACĪTIE EKSTRĒMI

Apskata funkciju $f(x;y)$ un vienādojumu $\varphi(x;y) = 0$. Pieņemsim, ka vienādojums $\varphi(x;y) = 0$ plaknē nosaka kaut kādu līniju, bet telpā - cilindrisku virsmu. Funkcija $f(x;y)$ telpā nosaka kaut kādu virsmu $z = f(x;y)$, kas šķeļas ar cilindrisku virsmu $z = f(x;y)$ pa līniju telpā. Uz šīs telpiskās līnijas var būt minimuma vai maksimuma punkti, kurus sauc par **nosacītā ekstrēma punktiem**.

Apskata punktu $(x_0;y_0)$, kas apmierina vienādojumu $\varphi(x;y) = 0$ un kura apkārtnē ir definēta funkcija $f(x;y)$, pie tam šī funkcija ir nepārtraukta punktā $(x_0;y_0)$.

Punktu $(x_0;y_0)$ sauc par funkcijas $f(x;y)$ **nosacītā maksimuma (**vai **nosacītā minimuma**) punktu, ja visiem $(x;y)$, kas apmierina vienādojumu $\varphi(x;y) = 0$, pieder punkta $(x_0;y_0)$ apkārtnei un nesakrīt ar punktu $(x_0;y_0)$, izpildās nevienādība $f(x;y) < f(x_0;y_0)$ (vai nevienādība $f(x;y) > f(x_0;y_0)$).

Vienādojumu $\varphi(x;y) = 0$ sauc par **saites vienādojumu**. Lai atrastu funkcijas nosacītos ekstrēmus, lieto **Lagranža metodi**. Saskaņā ar šo metodi sastāda funkciju $F(x;y) = f(x;y) + \lambda\varphi(x;y)$, kuru sauc par **Lagranža funkciju**. Atrod šīs funkcijas parciālos atvasinājumus un sastāda sistēmu

$$\begin{cases} F'_x(x;y) = 0, \\ F'_y(x;y) = 0, \\ \varphi(x;y) = 0. \end{cases}$$

Atrisinot šo sistēmu, atrod $\lambda$ un tam atbilstošo funkcijas $F(x;y)$ stacionāro punktu $(x_0;y_0)$, kurš apmierina doto saites vienādojumu.

Lai noteiktu punkta $(x_0;y_0)$ raksturu, atrod funkcijas $F(x;y)$ otrās kārtas diferenciāli $d^2F(x;y) = F''_{xx}dx^2 + 2F''_{xy}dxdy + F''_{yy}dy^2$ un aprēķina tā vērtību punktā $(x_0; y_0)$ ar atrasto vērtību $\lambda$. Ja $d^2F(x_0; y_0) > 0$, tad $(x_0; y_0)$ ir dotās funkcijas $f(x; y)$ nosacītā minimuma punkts. Analogi, ja $d^2F(x_0; y_0) < 0$, tad $(x_0; y_0)$ ir funkcijas $f(x; y)$ nosacītā maksimuma punkts.

**4.1. piemērs.** Atrast funkcijas $f(x; y) = x + 2y$ nosacītos ekstrēmus, ja saites vienādojums ir $x^2 + y^2 = 5$.

Sastāda Lagranža funkciju $F(x; y) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5)$ un atrod tās parciālos atrisinājumus $F'_x = 1 + 2\lambda x$, $F'_y = 2 + 2\lambda y$. Vienādojumu sistēma šoreiz ir

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0, \\ 2 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$$

Atrisinot šo sistēmu, iegūst $\lambda = -\frac{1}{2}$ vai $\lambda = \frac{1}{2}$. Vērtībai $\lambda = -\frac{1}{2}$ atbilst $x = 1$, $y = 2$, bet vērtībai $\lambda = \frac{1}{2}$ atbilst $x = -1$, $y = -2$.

Lai šajos stacionārajos punktos aprēķinātu funkcijas $F(x; y)$ otrās kārtas diferenciāli $d^2F(x; y)$, atrod $F''_{xx} = 2\lambda$, $F''_{xy} = 0$, $F''_{yy} = 2\lambda$.

Ja $\lambda = -\frac{1}{2}$, tad $d^2F(1; 2) = -dx^2 - dy^2 < 0$. Tāpēc stacionārajā punktā $(1; 2)$ ir dotās funkcijas nosacītais maksimums, kura vērtība ir 5.

Ja $\lambda = \frac{1}{2}$, tad $d^2F(-1; -2) = -dx^2 - dy^2 > 0$. Tāpēc stacionārajā punktā $(-1; -2)$ ir dotās funkcijas nosacītais minimums, kura vērtība ir $-5$.

**4.2. piemērs.** Atrast funkcijas $f(x; y) = xy$ nosacītos ekstrēmus, ja saites vienādojums ir $x - y = 0$.

Lagranža funkcija $F(x; y) = xy + \lambda(x - y)$ un $F'_x = y + \lambda$, $F'_y = x - \lambda$. Funkcijas $F(x; y)$ stacionāro punktu, kurš apmierina doto saites vienādojumu, atrašanai uzraksta vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} y + \lambda = 0, \\ x - \lambda = 0, \\ x - y = 0. \end{cases}$$

Šīs sistēmas vienīgais atrisinājums ir $\lambda = 0$, $x = 0$, $y = 0$. Atrod $F''_{xx} = 0$, $F''_{xy} = 1$, $F''_{yy} = 0$ un aprēķina funkcijas $F(x; y)$ otrās kārtas diferenciāli tās stacionārajā punktā $(0; 0)$.

$d^2F(0;0) = 2dxdy$. No saites vienādojuma $x - y = 0$ iegūst, ka $dx - dy = 0$ jeb $dy = dx$. Tāpēc $d^2F(0;0) = 2dx^2 > 0$ un punkts $(0;0)$ ir dotās funkcijas nosacītā minimuma punkts. Funkcijas nosacītā minimuma vērtība ir 0.

## Uzdevumi

Noteikt dotās funkcijas nosacītos ekstrēmus, ja ir norādīts saites vienādojums

1. $z = 2x + 3y + 10, \qquad xy = 5;$
2. $z = xy, \qquad 2x + 3y - 20 = 0;$
3. $z = x + 3y + 10, \qquad \dfrac{xy}{3x+1} = 8.$

# V nodaļa

# UZDEVUMI INDIVIDUĀLAJAM DARBAM

I Noteikt dotās funkcijas definīcijas apgabalu:

1. $a)$ $z = \dfrac{3xy}{2x-5y}$, $\quad b)$ $z = \ln(x^2 - y^2 - 3)$;
2. $a)$ $z = \sqrt{y^2 - x^2}$, $\quad b)$ $z = \dfrac{2xy}{x-3y+1}$;
3. $a)$ $z = ln(4 - x^2 - y^2)$, $\quad b)$ $z = \arcsin\dfrac{x}{y}$;
4. $a)$ $z = \dfrac{2}{6-x^2-y^2}$, $\quad b)$ $z = \sqrt{2x^2 - y^2}$;
5. $a)$ $z = \dfrac{\sqrt{xy}}{x^2+y^2}$, $\quad b)$ $z = \ln(y^2 - x^2)$;
6. $a)$ $z = e^{\sqrt{x^2+y^2-4}}$, $\quad b)$ $z = \arccos(x - 2y)$;
7. $a)$ $z = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$, $\quad b)$ $z = \dfrac{6x^2y}{x-4y}$;
8. $a)$ $z = \arcsin(2x - y)$, $\quad b)$ $z = \ln(9 - x^2 - y^2)$;
9. $a)$ $z = 4x + \dfrac{y}{2x+7y}$, $\quad b)$ $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-5}}$;
10. $a)$ $z = \dfrac{4xy}{x^2-y^2}$, $\quad b)$ $z = \dfrac{\sqrt{3x-2y}}{x^2+y^2+4}$;
11. $a)$ $z = \dfrac{x^3y}{3+x-y}$, $\quad b)$ $z = \ln(3x - y)$;
12. $a)$ $z = \arccos(x + 2y)$, $\quad b)$ $z = \dfrac{3}{4-x^2-y^2}$;
13. $a)$ $z = \arcsin(x - 2y)$, $\quad b)$ $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$;

14. *a*) $z = \ln(4 - x^2 - y^2)$, *b*) $z = 4x + \dfrac{y}{2 - x + y}$;
15. *a*) $z = \sqrt{x^2 + y^2 + 5}$, *b*) $z = \arccos(x + y)$.

II Noteikt dotās funkcijas parciālos atvasinājumus un pilno diferenciāli:

1. *a*) $z = \ln(y^2 - e^{-x})$, *b*) $z = \arcsin(2x^3 - y)$;
2. *a*) $z = \arcsin\sqrt{xy}$, *b*) $z = \operatorname{ctg}\sqrt{\dfrac{x}{x - y}}$;
3. *a*) $z = \operatorname{arctg}(x^2 + y^2)$, *b*) $z = \ln(3x^2 - y^2)$;
4. *a*) $z = \cos(x^3 - 2xy)$, *b*) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{y^3}$;
5. *a*) $z = \sin\sqrt{\dfrac{y}{x^3}}$, *b*) $z = \arccos(x - y^2)$;
6. *a*) $z = \operatorname{ctg}\sqrt{xy^3}$, *b*) $z = e^{-(x^3+y^3)}$;
7. *a*) $z = \ln(3x^2 - y^4)$, *b*) $z = \operatorname{tg}\dfrac{2x - y^2}{x}$;
8. *a*) $z = \cos\sqrt{x^2 + y^2}$, *b*) $z = \ln(e^{-x^2} - \sqrt{xy})$;
9. *a*) $z = \arccos\dfrac{y}{x}$, *b*) $z = \sin\sqrt{\dfrac{y}{x + y}}$;
10. *a*) $z = \operatorname{arcctg}\dfrac{x^3}{y}$, *b*) $z = \cos\dfrac{x - y}{x^2 + y^2}$;
11. *a*) $z = e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$, *b*) $z = \cos(x - \sqrt{xy^3})$;
12. *a*) $z = \ln(\sqrt{xy} - 1)$, *b*) $z = \sin\dfrac{x + y}{x - y}$;
13. *a*) $z = \operatorname{tg}(x^3 + y^2)$, *b*) $z = e^{-x^2+y^2}$;
14. *a*) $z = \operatorname{arcctg}(xy^2)$, *b*) $z = \sin\sqrt{x - y^3}$;
15. *a*) $z = \operatorname{tg}(x^3y^4)$, *b*) $z = e^{2x^2-y^2}$.

III Izskaitļot saliktas funkcijas $u = u(x; y)$, ja $x = x(t)$ un $y = y(t)$, atvasinājuma vērtību dotajā punktā $t_0$ ar precizitāti līdz vienai simtdaļai:

1. $u = e^{x-2y}$, $x = \sin t$, $y = t^3$, $t_0 = 0$;
2. $u = \ln(e^x + e^{-y})$, $x = t^2$, $y = t^3$, $t_0 = -1$;
3. $u = y^x$, $x = \ln(t - 1)$, $y = e^{\frac{t}{2}}$, $t_0 = 2$;

4. $u = ey - 2x + 2,\quad x = \sin t,\quad y = \cos t,\quad t_0 = \dfrac{\pi}{2};$
5. $u = x^2 e^y,\quad x = \cos t,\quad y = \sin t,\quad t_0 = \pi;$
6. $u = \ln(e^x + e^y),\quad x = t^2,\quad y = t^3,\quad t_0 = 1;$
7. $u = x^y,\quad x = e^t,\quad y = \ln t,\quad t_0 = 1;$
8. $u = e^{y-2x},\quad x = \sin t,\quad y = t^3,\quad t_0 = 0;$
9. $u = x^2 e^{-y},\quad x = \sin t,\quad y = \sin t^2,\quad t_0 = \dfrac{\pi}{2};$
10. $u = \ln(e^{-x} + e^y),\quad x = t^2,\quad y = t^3,\quad t_0 = -1;$
11. $u = e^{y-2x-1},\quad x = \cos t,\quad y = \sin t,\quad t_0 = \dfrac{\pi}{2};$
12. $u = \arcsin \dfrac{x}{y},\quad x = \sin t,\quad y = \cos t,\quad t_0 = \pi;$
13. $u = \arccos \dfrac{2x}{y},\quad x = \sin t,\quad y = \cos t,\quad t_0 = \pi;$
14. $u = \dfrac{x^2}{y+1},\quad x = 1 - 2t,\quad y = \operatorname{arctg} t,\quad t_0 = 0;$
15. $u = \ln(e^{-x} + e^{-2y}),\quad x = t^2,\quad y = \dfrac{1}{3}t^3,\quad t_0 = 1.$

IV Izskaitļot dotās funkcijas $f(x;y;z)$ parciālo atvasinājumu vērtības punktā $M_0(x_0;y_0;z_0)$ ar precizitāti līdz vienai simtdaļai:

1. $f(x;y;z) = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad M_0(0;-1;1);$
2. $f(x;y;z) = \ln\left(x + \dfrac{y}{2z}\right),\quad M_0(1;2;1);$
3. $f(x;y;z) = (\sin x)^{yz},\quad M_0\left(\dfrac{\pi}{6};1;2\right);$
4. $f(x;y;z) = \ln(x^3 + 2y^3 - z^3),\quad M_0(2;1;0);$
5. $f(x;y;z) = \dfrac{x}{\sqrt{y^2+z^2}},\quad M_0(1;0;1);$
6. $f(x;y;z) = \ln\cos(x^2y^2 + z),\quad M_0\left(0;0;\dfrac{\pi}{4}\right);$
7. $f(x;y;z) = \operatorname{arctg}(xy^2 + z),\quad M_0(2;1;0);$
8. $f(x;y;z) = \arcsin\left(\dfrac{x^2}{y} - z\right),\quad M_0(2;5;0);$
9. $f(x;y;z) = \sqrt{z}\sin\dfrac{y}{x},\quad M_0(2;0;4);$

10. $f(x;y;z) = \ln\sin(x - 2y + \frac{z}{4})$, $M_0\left(1;\frac{1}{2};\pi\right)$;
11. $f(x;y;z) = \arcsin\left(x\sqrt{y}\right) - yz^2$, $M_0(0;4;1)$;
12. $f(x;y;z) = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos z}$, $M_0\left(3;4;\frac{\pi}{2}\right)$;
13. $f(x;y;z) = ze^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}$, $M_0(0;0;1)$;
14. $f(x;y;z) = \frac{z}{x^4 + y^2}$, $M_0(2;3;25)$;
15. $f(x;y;z) = \ln\left(x^3 + \sqrt[3]{y} - z\right)$, $M_0(2;1;8)$.

V Izskaitļot netiešā veidā definētas funkcijas parciālo atvasinājumu vērtības dotajā punktā:

1. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4$, $M_0(2;1;1)$;
2. $x^2 + y^2 + z^2 - xy = 2$, $M_0(-1;0;1)$;
3. $3x - 2y + z = xy + 5$, $M_0(2;1;-1)$;
4. $e^z + x + 2y + z = 4$, $M_0(1;1;0)$;
5. $x^2 + y^2 + z^2 - z - 4 = 0$, $M_0(1;1;-1)$;
6. $z^3 + 3xyz + 3y = 7$, $M_0(1;1;1)$;
7. $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = \frac{3}{2}$, $M_0\left(\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right)$;
8. $e^{z-1} - 1 = \cos x\cos y + 1$, $M_0\left(0;\frac{\pi}{2};1\right)$;
9. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x = 0$, $M_0(1;2;1)$;
10. $xy = z^2 - 1$, $M_0(0;1;-1)$;
11. $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 2$, $M_0(1;1;1)$;
12. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xz = 5$, $M_0(0;2;1)$;
13. $x\cos y + y\cos z + z\cos x = \frac{\pi}{2}$, $M_0\left(0;\frac{\pi}{2};\pi\right)$;
14. $e^z - xyz - x + 1 = 0$, $M_0(2;1;0)$;
15. $\ln z = x + 2y - z + \ln 3$, $M_0(1;1;3)$.

VI Uzrakstīt dotās virsmas $S$ pieskarplaknes un normāles vienādojumu punktā $M_0(x_0;y_0;z_0)$:

1. $x^2 + y^2 + z^2 + 6z - 4x + 8 = 0$, $M_0(2;1;-1)$;
2. $x^2 + z^2 - 4y^2 = -2xy$, $M_0(-2;1;2)$;

3. $x^2+y^2+z^2-xy+3z=7,$ $M_0(1;2;1);$
4. $x^2+y^2+z^2+6y+4x=8,$ $M_0(-1;1;2);$
5. $2x^2-y^2+z^2-4z+y=13,$ $M_0(2;1;-1);$
6. $x^2+y^2+z^2-6y+4z+4=0,$ $M_0(2;1;-1);$
7. $x^2+z^2-5yz+3y=46,$ $M_0(1;2;-3);$
8. $x^2+y^2-xz-yz=0,$ $M_0(0;2;2);$
9. $x^2+y^2+2yz-z^2+y-2z=2,$ $M_0(1;1;1);$
10. $z=y^2-z^2+x^2-2xz+2x,$ $M_0(1;1;1);$
11. $z=x^2+y^2-2xy+2x-y,$ $M_0(-1;-1;-1);$
12. $z=y^2-x^2+2xy-3y,$ $M_0(1;-1;1);$
13. $z=x^2-y^2-2xy-x-2y,$ $M_0(-1;1;1);$
14. $x^2-2y^2+z^2+xz-4y=13$ $M_0(3;1;2);$
15. $4y^2-z^2+4xy-xz+3z=9,$ $M_0(1;-2;1).$

VII Noteikt dotās funkcijas otrās kārtas parciālos atvasinājumus:

1. $z=e^{x^2-y^2};$
2. $z=\operatorname{tg}\dfrac{x}{y};$
3. $z=\sin(x^2-y^2);$
4. $z=\arcsin(x-y);$
5. $z=\operatorname{arcctg}(x-3y);$
6. $z=e^{2x^2+y^2};$
7. $z=\cos(3x^2-y^3);$
8. $z=\ln(5x^2-3y^4).$
9. $z=\operatorname{ctg}(x+y);$
10. $z=\cos(xy^2);$
11. $z=\operatorname{arctg}(x+y);$
12. $z=\arccos(2x+y);$
13. $z=\ln(3x^2-2y^2);$
14. $z=\ln(4x^2-5y^3);$
15. $z=\operatorname{arcctg}(x-4y).$

VIII Pārbaudīt, vai dotā funkcija apmierina norādīto vienādojumu:

1. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+u=0,$ $u=\dfrac{2x+3y}{x^2+y^2};$
2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$ $u=\ln(x^2+y^2+2x+1);$
3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0,$ $u=\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy};$
4. $x^2\dfrac{\partial u}{\partial x}-xy\dfrac{\partial u}{\partial y}+y^2=0,$ $u=\dfrac{y^2}{3x}+\arcsin(xy);$

5. $y\dfrac{\partial u}{\partial x} - x\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0,$ $\quad u = \ln(x^2 + y^2);$

6. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = u,$ $\quad u = x\ln\dfrac{y}{x};$

7. $a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2},$ $\quad u = e^{-\cos(x+ay)};$

8. $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$ $\quad u = y\sqrt{\dfrac{y}{x}};$

9. $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$ $\quad u = e^{xy};$

10. $y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = (1 + y\ln x)\dfrac{\partial u}{\partial x},$ $\quad u = x^y;$

11. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2u,$ $\quad u = (x^2 + y^2)\operatorname{tg}\dfrac{x}{y};$

12. $9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$ $\quad u = e^{-(x+3y)}\sin(x + 3y);$

13. $\dfrac{\partial u}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$ $\quad u = \ln(x + e^{-y});$

14. $\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0,$ $\quad u = \arcsin\dfrac{x}{x+y}.$

15. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$ $\quad u = \ln(x^2 - y^2).$

IX Noteikt dotās funkcijas ekstrēmus:

1. $z = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y;$
2. $z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2;$
3. $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5;$
4. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2;$
5. $z = (x - 2)^2 + 2y^2 - 10;$
6. $z = x^3 + y^3 - 3xy;$
7. $z = x^2 + 3(y + 2)^2;$
8. $z = (x - 1)^2 + 2y^2.$
9. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5;$
10. $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2;$
11. $z = 3x^3 + 3y^2 - 9xy + 10;$
12. $z = 6(x - y) - 3x^2 - 3y^2;$
13. $z = (x - 5)^2 + y^2 + 1;$
14. $z = 2xy - 2x^2 - 4y^2;$
15. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y.$

X Noteikt dotās funkcijas $z = z(x; y)$ vismazāko un vislielāko vērtību slēgtā apgabalā $D$, kuru ierobežo dotās līnijas:

1. $z = 3x + y - xy,$ $\quad D : y = x, y = 4, x = 0;$
2. $z = xy - x - 2y,$ $\quad D : x = 3, y = x, y = 0;$
3. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y,$ $\quad D : x = 0, x = 1, y = 0, y = 2;$
4. $z = 5x^2 - 3xy + x^2,$ $\quad D : x = 0, x = 1, y = 0, y = 1;$
5. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x,$ $\quad D : x - y + 1 = 0, x = 3, y = 0;$
6. $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8,$ $\quad D : x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0;$
7. $z = 2x^3 - xy^2 + y^2,$ $\quad D : x = 0, x = 1, y = 0, y = 6;$
8. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2,$ $\quad D : x = 0, x = 1, y = 0, y = 1;$
9. $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1,$ $\quad D : x = 0, y = 0, x + y - 3 = 0;$
10. $z = x^2 + 2xy - 10,$ $\quad D : y = 0, y = x^2 - 4;$
11. $z = xy - 2x - y,$ $\quad D : x = 0, x = 3, y = 0, y = 4;$
12. $z = \frac{1}{2}x^2 - xy,$ $\quad D : y = 8, y = 2x^2;$
13. $z = 4 - 2x^2 - y^2,$ $\quad D : y = 0, y = \sqrt{1 - x^2};$
14. $z = x^2 + xy - 2,$ $\quad D : y = 4x^2 - 4, y = 0;$
15. $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1,$ $\quad D : x = -3, y = 0, x + y + 1 = 0.$

# LITERATŪRA


[1] E. Kronbergs, P. Rivža, Dz. Bože. Augstākā matemātika, 1.daļa - R.: Zvaigzne, 1988. - 533 lpp.

[2] V. Gedroics. Vairāku argumentu funkciju diferenciālrēķini. - Daugavpils: DPU, 1995. - 73 lpp.

[3] Dz. Bože, L. Biezā, B. Siliņa, A.Strence. Uzdevumu krājums augstākajā matemātikā. - R.: Zvaigzne, 1986. - 319 lpp.

[4] В.Ф. Бутузов, Н.Ч. Крутицкая, Г.Н. Медведев, А.А. Шишкин. Математический анализ в вопросах и задачах. Функции нескольких переменных. - М.: Высшая школа, 1988. - 288 с.

[5] Г.Н. Берман. Сборник задач по курсу математического анализа. - М.: Наука, 1975. - 416 с.

[6] Н.А. Виленкин, К.А. Бохан, И.А. Марон и др. Задачник по курсу математического анализа, часть 2, под ред. Н.А. Виленкина. - М.: Просвещение, 1971. - 333 с.

[7] А.А. Гусак. Пособие к решению задач по высшей математике. - Минск, 1973. - 525 с.

[8] П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. Высшая математика в упражнениях и задачах, часть 1. - М.: Высшая школа, 1986. - 446 с.

[9] Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов, под ред. Б.П. Демидовича. - М.: Наука, 1974. - 472 с.

[10] И.Р. Ермаченко, Г.И. Хилькевич. Математический анализ (Дифференциальные исчисления функций нескольких переменных). - Даугавпилс: ДПУ, 1990. - 71 с.

[11] Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных. - Санкт-Петербург, 1994. - 495 с.

[12] А.Г. Мордкович, А.С. Солодовников. Математический анализ. - М.: Высшая школа, 1990. - 416 с.

[13] Сборник индивидуальных заданий по высшей математике, под ред. А.П. Рябушко, часть 2. - Минск: Высшая школа, 1991. -349 с.

[14] Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа. Под ред. А.В. Ефимова, Б.М. Демидовича. - М.: Наука, 1981. - 463 с.

# SATURS