DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE

Matemātiskās analīzes katedra

Fēlikss Sadirbajevs

IEVADS OPTIMIZĀCIJĀ

2002

ANOTĀCIJA

Mācību līdzeklī ir aplūkoti ekstremālu uzdevumu pamatjautājumi: vairāku argumentu funkciju ekstrēmu teorija, nosacīto ekstrēmu meklēšanas metodes, ekstremālo punktu meklēšanas skaitliskās metodes un lineārās programmēšanas elementi. Mācību līdzeklis ir domāts augstskolu studentiem, kā arī visiem tiem, kas interesējas par optimizācijas teoriju.

IEVADS

Mācību līdzeklī ir izklāstīti optimizācijas pamatelementi. Ar optimizāciju plašā nozīmē saprot labāko risinājumu meklēšanu. Matemātiskā optimizācija piedāvā paņēmienus matemātisko problēmu risināšanai. Šīs problēmas rodas matemātiski modelējot reālos procesus. Piedāvātajā mācību līdzeklī ir parādīti daži vienkārši (bet dažreiz būtiski) matemātiskie modeļi.

Matemātiskās optimizācijas teorija aplūko funkciju ekstrēma meklēšanas problēmas Eiklīda telpā (to sauc arī par viena vai vairāku argumentu funkciju ekstrēma meklēšanu), nosacītā ekstrēma meklēšanas teorija - Lagranža reizinātāju metode. Lielu un nozīmīgu klasi veido tā saucamās izliektās analīzes problēmas. No plaša problēmu spektra autors izvēlējās klasisko funkcijas ekstrēma meklēšanas teoriju, kura, bez šaubām, ir neatņemama mūsdienu speciālista matemātikā sagatavošanas sastāvdaļa. Ievērojamu vietu šajā mācību līdzeklī aizņem tā saucamās lineārās programmēšanas jautājumi. Šī temata izvēle ir attaisnojama gan ar tā neapšaubāmo praktisko nozīmi, gan ar to, ka lineāras programēšanas elementus var pasniegt ne tikai studentiem, bet arī vecāko klašu audzēkņiem, jo šis materiāls (divu dimensiju lineārās programmēšanas uzdevumi) ir pa spēkam katram, kas apguvis lineārās algebras elementus (divu lineāru algebrisko vienādojumu sistēmas, lineāras nevienādības utt.).

Mācību līdzeklī ir iekļauti arī skaitlisko metožu pamati. Kā risināt problēmas, kurās funkcijas nav diferencējamas, bet ekstrēmi eksistē?

Tiek aplūkotas metodes, kuras ļauj skaitliski meklēt viena vai vairāku argumentu funkcijas ekstrēmus, tai skaitā tādas klasiskās metodes, kā Fibonači skaitļu metode, zelta šķēluma metode, gradientu metode, šķēlumu metode. Īpaša vērība ir veltīta piemēriem, kuros detalizēti parādīta metodes būtība un galvenie soļi ekstrēma meklēšanas procesā.

Bezgalīgi dimensionālas problēmas (variāciju rēķini, dinamiskā programmēšana utt.) netiek aplūkotas. Šie jautājumi var būt apskatīti citā mācību līdzeklī. Labākai līdzeklī izklāstītā materiāla izpratnei ir vēlamas iepriekšējas zināšanas matemātiskajā analīzē un augstākajā algebrā.

Autors cer, ka mācību līdzeklis būs papildinājums esošajiem mācību kursiem par ekstrēmu problēmām latviešu valodā. Mācību līdzeklī izklāstītais materiāls balstās uz lekcijām, kuras autors lasīja DU 4. kursa studentiem 1999./2000. studiju gadā.

Mācību līdzekļa sagatavošanas procesā autoram palīdzēja A. Gricāns. Tekstu izlasīja un izteica savus priekšlikumus A. Cibulis un studenti N. Šemeļeva, S. Ogorodņikova, D. Jezupova. Autors ir pateicīgs visām minētajām personām. Par iespējamām kļūdām autors nes pilnu atbildību.

I nodaļa

VAIRĀKU ARGUMENTU FUNKCIJU EKSTRĒMI

Šajā nodaļā tiks aplūkotas problēmas, kuras var reducēt uz vairāku argumentu funkciju ekstrēmu punktu meklēšanu, kā arī tiks aprakstīts algoritms šo problēmu risināšanai.

1.1. Brīvais ekstrēms

1.1.1. Problēma par peļņas maksimumu

Problēma par peļņas maksimumu. Monopolists (kurš pats nosaka cenas) pārdod preces divos tirgos. Nedēļas laikā pirmajā tirgū pārdotās preces daudzuma q_1 (tūkst. gab.) atkarību no preces cenas p_1 var izteikt kā $q_1 = 10 - p_1$ (- tā saucamā *pieprasījuma funkcija*). Savukārt otrajā tirgū $q_2 = 6 - 0,5p_2$. Izdevumu C atkarību no pārdotās preces daudzuma var izteikt ar formulu

$$C = 10 - (q_1 + q_2) + (q_1 + q_2)^2.$$

Jautājums. Kādām daudzumu q_1 un q_2 vērtībām (un pie kādām cenām p_1 un p_2) ienākums P būs maksimāls?

Problēmas formalizēšana. Vai vispār eksistē cenas, pie kurām ienākums $P(p_1; p_2)$ ir maksimāls, un, ja eksistē, kā tās noteikt? Izteiksim cenas p_1 un p_2 ar preču daudzumiem q_1 un q_2:

$$p_1 = 10 - q_1, \quad p_2 = 12 - 2q_2,$$

un izteiksim P kā argumentu q_1 un q_2 funkciju:

$$P = p_1q_1 + p_2q_2 - C = (10 - q_1)q_1 + (12 - 2q_2)q_2 - C(q_1; q_2).$$

Tātad ekonomiskā problēma reducējas uz divu argumentu funkcijas maksimuma atrašanas problēmu. Dotās problēmas risinājums tiks dots punktā 1.1.6., bet tagad apskatīsim paņēmienus, ar kuru palīdzību var atrast vairāku argumentu funkciju ekstrēmus, protams, ja tādi eksistē.

1.1.2. Definīcijas

Atgādināsim, ka par *funkciju* $f : X \to Y$ sauc attēlojumu, kurā katram elementam $x \in X$ atbilst pilnīgi noteikts elements $y \in Y$, kuru apzīmē ar $f(x)$ un sauc par *elementa x attēlu attēlojumā f*. Speciālgadījumā X un Y var būt viena un tā pati kopa. Aktuāls ir gadījums, kad kopa X ir vienāda ar Eiklīda telpu $\mathbb{R}^n$ vai kādu tās apakškopu, bet kopa Y ir vienāda ar reālo skaitļu kopu $\mathbb{R}$.

Telpas $\mathbb{R}^n$ elementus $x = (x_1; \ldots; x_n)$ sauc arī par šīs telpas *punktiem*. Ja $x = (x_1; \ldots; x_n)$, tad reālos skaitļus x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sauc par *punkta x koordinātām*. Gadījumos, kad $n = 2$ vai $n = 3$, telpas $\mathbb{R}^n$ punktu var viegli attēlot ģeometriski.

Par *attālumu starp telpas $\mathbb{R}^n$ punktiem $x = (x_1; \ldots; x_n)$ un $y = (y_1; \ldots; y_n)$* sauc lielumu

$$\rho(x; y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

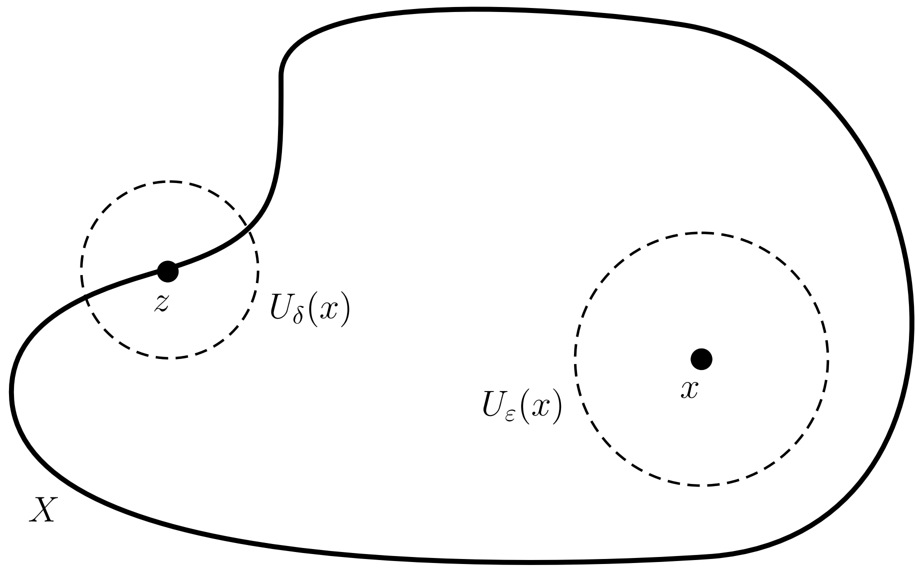
Par *vaļēju lodi ar centru punktā $x \in \mathbb{R}^n$ un rādiusu $\delta > 0$* sauc telpas $\mathbb{R}^n$ apakškopu $U_\delta(x)$, kas sastāv no visiem tiem un tikai tiem punktiem $y \in \mathbb{R}^n$, kuru attālums $\rho(x, y)$ līdz punktam x ir mazāks nekā skaitlis δ, t.i.,

$$U_\delta(x) = \{y \in X : \ \rho(x, y) < \delta\}.$$

No ģeometriskā viedokļa, ja $n = 2$, tad $U_\delta(x)$ ir riņķis ar centru dotajā punktā x un rādiusu δ, bet, ja $n = 3$, tad $U_\delta(x)$ ir lode ar centru dotajā punktā x un rādiusu δ.

Par *punkta $x \in \mathbb{R}^n$ apkārtni* sauc jebkuru telpas $\mathbb{R}^n$ apakškopu, kas satur vismaz vienu vaļēju lodi $U_\delta(x)$. Protams, vaļēja lode $U_\delta(x)$ arī ir punkta x apkārtne.

Punktu $x \in \mathbb{R}^n$ sauc par *kopas $X \subset \mathbb{R}^n$ iekšēju punktu*, ja eksistē šī punkta apkārtne, kas iekļaujas kopā X (skat. 1.1. zīm.).



1.1. zīm. Punkts x ir kopas $X \subset \mathbb{R}^2$ iekšējais punkts, jo $U_\varepsilon(x) \subset X$. Savukārt punkts z nav kopas X iekšējais punkts, jo jebkuram pozitīvam δ punkta z apkārtne $U_\delta(z)$ satur punktus, kuri nepieder kopai X.

1.1. piezīme. Gadījumā, kad $X = \mathbb{R}^n$, jebkurš punkts $x \in X$ ir kopas X iekšējais punkts.

Kopu $X \subset \mathbb{R}^n$ sauc par *vaļēju kopu*, ja jebkurš tās punkts ir iekšējais.

Ja $\mathbb{R}^n \setminus X$ (- kopas X papildkopa telpā $\mathbb{R}^n$) ir vaļēja kopa, tad kopu X sauc par *slēgtu kopu*.

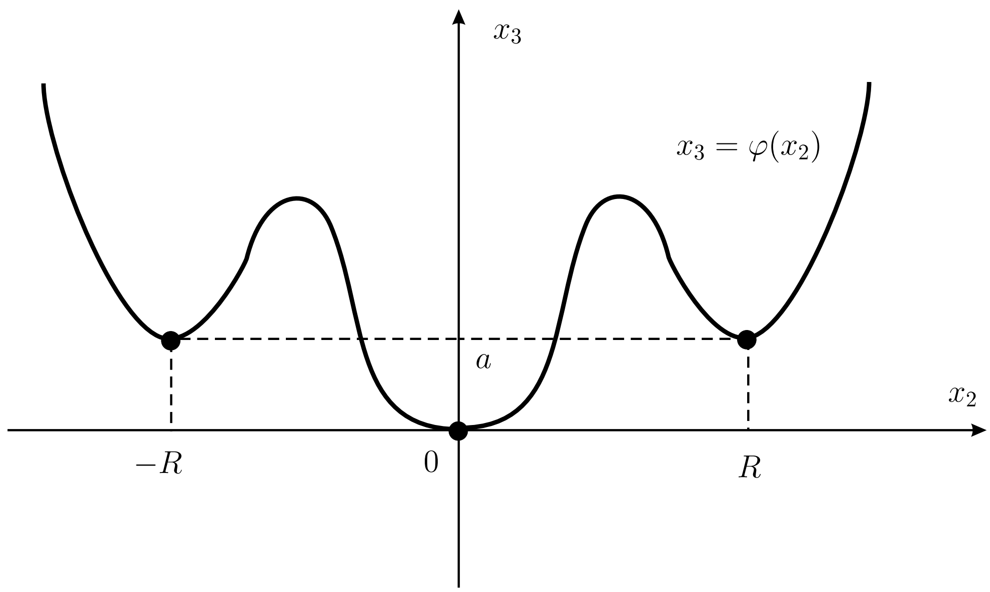
1.2. piezīme. Meklējot funkciju ekstrēmus (minimumus un maksimumus), jāizšķir divi svarīgi gadījumi, proti, vai ekstrēms tiek meklēts vaļējā vai slēgtā kopā. Tas ir atkarīgs no problēmas formulējuma.

Saka, ka kopā $X \subset \mathbb{R}^n$ definētai funkcijai f ir *lokāls minimums* punktā $z \in X$, ja eksistē tāda punkta z apkārtne, ka $f(x) \geq f(z)$ visiem $x \in X$ no šīs apkārtnes. Ja pie tam $f(x) > f(z)$, kad $x \neq z$, tad saka, ka minimums ir *stingrs*.

1.3. piezīme. Funkcijai var būt vairāki (un pat bezgalīgi daudz) lokālo minimumu (skat. 1.2. zīm.).

Saka, ka kopā $X \subset \mathbb{R}^n$ definētai funkcijai $x \mapsto f(x)$ ir *globāls minimums punktā* $x_0 \in X$, ja $f(x) \geq f(x_0)$ visiem x no kopas X.

Analoģiski var definēt funkcijas lokālo maksimumu un globālo maksimumu.



1.2. zīm. Divu argumentu funkcijai $x_3 = f(x_1; x_2)$, kuras grafiku iegūst, rotējot funkcijas $x_3 = \varphi(x_2)$ grafiku ap vertikālo asi Ox_3, ir lokāls minimums jebkurā riņķa līnijas $\left\{ \begin{array}{rcl} x_1^2 + x_2^2 & = & R^2, \\ x_3 & = & a, \end{array} \right.$ punktā, kā arī koordinātu sākumpunktā.

Par funkcijas *ekstrēmu* sauc jebkuru šīs funkcijas maksimumu vai minimumu (lokālo un globālo) .

Literatūrā bieži vien aplūko tikai minimuma gadījumu, jo funkcijas $f(x)$ maksimuma atrašanas problēma

$$f(x) \longrightarrow \ max$$

ir ekvivalenta funkcijas $-f(x)$ minimuma atrašanas problēmai

$$-f(x) \longrightarrow \ min.$$

Piemēram, kopā $X = \mathbb{R}^n$ definētai funkcijai $f(x_1; x_2) = -x_1^2 - x_2^2$ punkts $(0; 0)$ ir globālā maksimuma punkts, bet šajā kopā definētai funkcijai $-f(x_1; x_2) = x_1^2 + x_2^2$ punkts $(0; 0)$ ir globālā minimuma punkts.

1.1.3. Ekstrēma eksistences nepieciešamie nosacījumi

Apskatīsim telpas R^n vaļēju apakškopu X (speciālgadījumā $X = \mathbb{R}^n$). Pieņemsim, ka funkcijai $f : X \to \mathbb{R}$ ir lokāls minimums kopas X punktā $z = (z_1; \ldots ; z_n)$, t.i., $f(x) \geq f(z)$ visiem x no kādas punkta z apkārtnes.

1.1. teorēma. *Ja funkcijai f kopā X eksistē nepārtraukti pirmās kārtas parciālie atvasinājumi pēc visiem x_i, tad funkcijas f minimuma punktā z funkcijas f diferenciālis ir vienāds ar nulli.*

▶ Funkcijas f pieaugumam punktā z ir spēkā formula [7, 179. lpp.]

$$f(x) - f(z) = df(z) + o\big(\rho(x,z)\big).$$

Abi saskaitāmie labajā pusē tiecas uz nulli, ja $x \to z$, bet otrais saskaitāmais ir bezgalīgi mazs augstākas kārtas lielums nekā $\rho(x,z)$, t.i.,

$$\frac{o\big(\rho(x,z)\big)}{\rho(x,z)} \to 0, \quad \text{ja} \quad x \to z.$$

Tātad starpības $f(x) - f(z)$ zīmi, kad x ir pietiekami tuvs z, nosaka diferenciāļa $df(z)$ zīme.

Pieņemsim, ka kāds parciālais atvasinājums punktā z nav vienāds ar nulli. Noteiktības labad pieņemsim, ka $\frac{\partial f}{\partial x_1}(z) > 0$. Aplūkosim punktu $x = (x_1; z_2; \ldots; z_n)$, kurā $x_1 < z_1$. Ja x_1 ir pietiekami tuvs z_1, tad

$$f(x) - f(z) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(z)(x_1 - z_1) + o\big(\rho(x,z)\big) < 0,$$

kas ir pretrunā nosacījumam par lokālo minimumu punktā z.

Līdzīgi var pierādīt, ka pārējie parciālie atvasinājumi punktā z arī ir vienādi ar nulli.

Visu parciālo atvasinājumu vienādība ar nulli punktā z nozīmē, ka diferenciālis $df(z)$ ir vienāds ar nulli.◀

1.4. piezīme. Pierādītais apgalvojums praktiski nozīmē to, ka, lai atrastu funkcijas f minimuma punktus, ir jāatrisina vienādojumu sistēma

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{1.1}$$

1.5. piezīme. Maksimuma punktu koordinātām arī ir jāapmierina sistēma (1.1), jo maksimuma problēmu var reducēt uz minimuma problēmu, mainot funkcijas f zīmi uz pretējo. Tātad, lai funkcijai f punktā z eksistētu ekstrēms, ir nepieciešams, lai $z = (z_1; z_2; \ldots; z_n)$ apmierinātu sistēmu (1.1).

Sistēmas (1.1) atrisinājumus sauc par *funkcijas f stacionāriem punktiem.*

1.1.4. Stacionārie punkti problēmā par peļņas maksimumu

Problēmā par peļņas maksimumu funkcijas $P(q_1; q_2)$ stacionāro punktu noteikšanai risinām vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial q_1} &= 11 - 4q_1 - 2q_2 = 0, \\ \frac{\partial P}{\partial q_2} &= 13 - 2q_1 - 6q_2 = 0. \end{cases}$$

Atrisinājums: $q_1 = 2$, $q_2 = 1,5$. Tātad stacionāro punktu kopa sastāv no viena punkta. Ja pēc problēmas satura var spriest, ka funkcijai P ir maksimums, tad var secināt, ka maksimuma punkts sakrīt ar vienīgo stacionāro punktu.

1.6. piezīme. Stacionārs punkts var nebūt ekstrēma punkts. Piemēram, punkts $(0; 0)$ ir vienīgais funkcijas $f(x_1; x_2) = x_1 x_2$ stacionārais punkts. Jebkurā šī punktā apkārtnē funkcija f pieņem gan pozitīvas, gan negatīvas vērtības. Tāpēc punkts $(0; 0)$ nav ne maksimuma, ne minimuma punkts.

No iepriekšējās piezīmes seko, ka ir svarīgi atrast tādus nosacījumus, kuri ļautu noteikt, vai dotais stacionārais punkts ir minimuma vai maksimuma punkts.

1.1.5. Ekstrēma pietiekamie nosacījumi

Dažreiz stacionārā punkta raksturs ir skaidrs no minimuma definīcijas. Piemēram, funkcijai

$$f(x_1; x_2) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2$$

punkts $(1; -1)$ ir minimuma punkts, jo pārējos punktos funkcija f ir pozitīva. Citos, ne tik acīmredzamos gadījumos, ir vēlams iegūt ekstrēma pazīmi.

Pieņemsim, ka funkcijai f ir nepārtraukti parciālie atvasinājumi pēc $x_1, \ldots, x_n$ līdz otrai kārtai ieskaitot.

1.2. teorēma. *Ja funkcijas f stacionārajā punktā z tās diferenciālis $d^2 f(z) > 0$ (t.i., kvadrātiskā forma $d^2 f(z)$ ir pozitīva), tad punkts z ir funkcijas f (lokālā) minimuma punkts.*

▶ Funkcijas f pieaugumam punktā z ir spēkā formula (Teilora rinda diferenciālā formā) [7, 195. lpp.]

$$f(x) - f(z) = df(z) + \frac{1}{2}d^2 f(z) + o\left(\rho^2(x,z)\right),$$

kur trešais elements labajā pusē ir augstākas kārtas bezgalīgi mazs lielums salīdzinot ar $\rho^2(x;z)$, ja $x \to z$. Tā kā saskaņā ar pieņēmumu z ir funkcijas $f(x)$ stacionārs punkts, tad $df(z) = 0$. Tas nozīmē, ka starpības $f(x)-f(z)$ zīme x vērtībām no pietiekami mazas punkta z apkārtnes ir atkarīga no diferenciāļa $d^2 f(z)$ zīmes. Tāpēc

$$f(x) - f(z) \geq 0,$$

ja punkts x ir pietiekami tuvs z punktam. No minimuma definīcijas seko, ka punkts z ir funkcijas f (lokālā) minimuma punkts.◀

1. secinājums. Ja funkcijas $f(x)$ stacionārā punktā z diferenciālis

$$d^2 f(z) < 0,$$

tad z ir funkcijas $f(x)$ (lokālā) maksimuma punkts. Lai to pierādītu, ir pietiekami aplūkot funkciju $-f(x)$, kurai otrās kārtas diferenciālis ir nenegatīvs, un tad pielietot 1.2. teorēmu.

1.2. teorēmas un 1. secinājuma pielietošanai stacionārā punkta rakstura pētīšanā ir nepieciešama prasme rēķināt otrās kārtas diferenciāli dotajā punktā.

Divu argumentu funkcijas $f(x_1;x_2)$ otrās kārtas diferenciāli dotajā punktā $z = (z_1;z_2)$ aprēķina šādi:

$$d^2 f(z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\Delta x_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\Delta x_1 \Delta x_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}\Delta x_2 \Delta x_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\Delta x_2^2,$$

kur

$$\Delta x_1 = x_1 - z_1, \quad \Delta x_2 = x_2 - z_2.$$

Tātad diferenciālis $d^2 f(z)$ ir kvadrātiska forma attiecībā pret mainīgajiem Δx_1 un Δx_2. Parciālie atvasinājumi tiek aprēķināti punktā z.

Apzīmējot parciālos atvasinājumus:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = f_{x_1 x_1}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} = f_{x_1 x_2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} = f_{x_2 x_1}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = f_{x_2 x_2},$$

apskatīsim kvadrātisku matricu

$$A = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} \end{bmatrix}.$$

No matemātiskas analīzes kursa ir zināms, ka jauktie atvasinājumi ir vienādi savā starpā, ja tie ir nepārtraukti [7, 5. nodaļa, §4], tāpēc

$$\det A = f_{x_1x_1} f_{x_2x_2} - f_{x_1x_2}^2.$$

No kvadrātisko formu teorijas ir zināms [7, 198. lpp.]:

- ja $\det A > 0$ un $f_{x_1x_1} > 0$, tad kvadrātiskā forma ir pozitīva;
- ja $\det A > 0$ un $f_{x_1x_1} < 0$, tad kvadrātiskā forma ir negatīva;
- ja $\det A < 0$, tad kvadrātiskā forma pieņem gan pozitīvas, gan negatīvas vērtības.

Formulēsim *divu argumentu funkcijas ekstrēma punktu meklēšanas shēmu*:

1. atrast stacionārus punktus, risinot sistēmu (1.1);
2. katrā stacionārā punktā noteikt determinanta $\det A$ zīmi;
3. ja stacionārā punktā z ir spēkā $\det A > 0$ un $f_{x_1x_1} > 0$, tad $d^2 f(z) > 0$ un z ir (stingrā) minimuma punkts;
4. ja stacionārajā punktā z ir spēkā $\det A > 0$ un $f_{x_1x_1} < 0$, tad $d^2 f(z) < 0$ un z ir (stingrā) maksimuma punkts;
5. ja stacionārajā punktā z ir spēkā $\det A < 0$, tad $d^2 f(z)$ pieņem gan pozitīvas, gan negatīvas vērtības kādā punkta z apkārtnē un z nav ekstrēma punkts;
6. ja stacionārajā punktā z ir spēkā $\det A = 0$, tad ir nepieciešama tālāka analīze.

1.7. piezīme. 6. gadījumā, kad $\det A = 0$, stacionārā punkta z rakstura analīze var būt saistīta ar augstākas kārtas diferenciāļu rēķināšanu, protams, ja funkcijai eksistē attiecīgās kārtas atvasinājumi. Tiešām,

$$f(x) - f(z) = df(z) + \frac{1}{2} d^2 f(z) + \frac{1}{3!} d^3 f(z) + \frac{1}{4!} d^4 f(z) + \cdots$$

un starpības zīme vienādības kreisajā pusē ir atkarīga no pirmā no nulles atšķirīgā diferenciāļa vienādības labajā pusē.

Apskatīsim dažus piemērus saistībā ar iepriekšējo piezīmi.

1.1. piemērs. Apskatīsim funkciju

$$f(x_1; x_2) = x_1^3 + x_2^3.$$

Punkts $(0; 0)$ ir funkcijas f stacionārs punkts, jo šajā punktā diferenciāļi df un $d^2 f$ ir vienādi ar nulli. Tai pašā laikā

$$d^3 f = 6\Delta x_1^3 + 6\Delta x_2^3.$$

Tā kā funkcija f jebkurā punkta $(0; 0)$ apkārtnē pieņem abu zīmju vērtības, tad funkcijai f punktā $(0; 0)$ ekstrēma nav.

1.2. piemērs. Apskatīsim funkciju

$$f(x_1; x_2) = x_1^4 + x_2^4.$$

Punkts $(0; 0)$ ir funkcijas f stacionārs punkts. Šajā punktā $\det A = 12^2 x_1^2 x_2^2 = 0$ un, lai noskaidrotu stacionārā punkta raksturu, ir nepieciešama tālāka pētīšana. Var pārbaudīt, ka $d^3 f = 0$ punktā $(0; 0)$, bet

$$d^4 f = 24\Delta x_1^4 + 24\Delta x_2^4$$

ir pozitīva forma. Tādējādi punkts $(0; 0)$ ir funkcijas f minimuma punkts.

1.1.6. Problēmas par peļņas maksimumu atrisinājums

Noskaidrosim stacionārā punkta $q_1 = 2$, $q_2 = 1,5$ raksturu problēmā par peļņas maksimimumu. Tā kā

$$\begin{aligned} &P_{q_1 q_1} = -4, \quad P_{q_1 q_2} = -2, \quad P_{q_2 q_2} = -6, \\ &\det A = (-4)(-6) - (-2)2 = 20 > 0, \end{aligned}$$

tad punkts $(2; 1,5)$ ir ekstrēma punkts. Tā kā $P_{q_1 q_1}$ ir negatīvs, bet $\det A > 0$, tad apskatāmais punkts ir minimuma punkts. Noteiksim cenas p_1 un p_2, pēc kurām ir jāpārdod preces katrā tirgū, lai iegūtu maksimālo peļņu:

$$p_1 = 10 - q_1 = 8, \quad p_2 = 12 - 2q_1 = 9.$$

1.1.7. Uzdevumi

1. Monopolists nosaka preču cenas divos tirgos. Tirgū A pieprasījuma funkcija (sakarība starp cenu un daudzumu) ir $p_1 = 100 - q_1$, tirgū B attiecīgi $p_2 = 84 - q_2$, kur p_i - cenas, q_i - daudzumi. Izdevumus izsaka funkcija

$$C = 600 + 4(q_1 + q_2).$$

Cik daudz preču (un par kādām cenām) jāpardod katrā tirgū, lai peļņa būtu maksimālā?

2. Noteikt funkcijas

$$f(x_1; x_2) = 3x_1^2 + x_2^3 + 3x_1x_2 + 3x_2^2$$

stacionāros punktus un to raksturu.

3. Atrast stacionāros punktus un noteikt to raksturu:

3a. $f(x_1; x_2) = x_1^3 + 2x_1^2 - x_1x_2 - \frac{1}{2}x_2^2;$

3b. $f(x_1; x_2) = x_1^3 + x_2^3 + 6x_1x_2;$

3c. $f(x_1; x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 + 4x_1 + 2x_2;$

3d. $f(x_1; x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 4x_1 + 8.$

1.2. Nosacītais ekstrēms

1.2.1. Uzdevumi

1. problēma (joks). Meitenei patīk saņemt dāvanas no jaunekļa, kas dāvina viņai puķes, maksājot Ls 1 par vienu pušķi, un šokolādi, kuras cena ir Ls $0,5$ par vienu tāfelīti. Nedēļas laikā jauneklis var atļauties iztērēt Ls 10. Kāda dāvanu kombinācija ir visefektīvākā, ja efektivitāti izsaka funkcija

$$U = S^{\frac{1}{2}} \cdot F^{\frac{1}{2}},$$

kur S - šokolādes tāfelīšu daudzums, F - puķu pušķu daudzums.

Risinājums. Šokolādes pirkšanai vajadzīgi Ls $0,5S$, puķu pirkšanai Ls F. Kopā

$$0,5S + F = 10. \tag{1.2}$$

Līdz ar to problēma reducējas uz funkcijas U maksimuma atrašanu pie ierobežojuma (1.2). Risināsim problēmu ar mainīgo izslēgšanas metodi. No vienādības (1.2) atrodam

$$F = 10 - 0,5S$$

un iegūstam maksimuma problēmu viena argumenta funkcijai

$$U(S) = S^{\frac{1}{2}}(10 - 0,5S)^{\frac{1}{2}}.$$

Aprēķinot šīs funkcijas atvasinājumu un pielīdzinot to nullei, iegūstam vienādojumu, no kura izriet, ka $S = 10$, $F = 10 - 0,5 \cdot S = 5$. Tātad jauneklis var nopirkt 5 puķu pušķus un 10 šokolādes plāksnītes, gan iekļaujoties budžetā.

Aplūkosim analoģisku problēmu ar nopietnāku saturu.

2. problēma. Firma iegulda \$ L personāla apmaksai un \$ K tehnisko līdzekļu pirkšanai. Saražotās produkcijas apjoms ir atkarīgs no ieguldītajiem līdzekļiem:

$$P = L^{\frac{2}{5}} \cdot K^{\frac{3}{5}}.$$

Kopējais līdzekļu apjoms ir \$ 20000. Cik daudz līdzekļu ir jāizlieto personāla apmaksai (un cik tehnisko līdzekļu iegādei), lai maksimizētu ražošanas apjomu?

Risinājums. Lietosim mainīgo izslēgšanas metodi. Tā kā

$$L + K = 20000,$$

tad

$$K = 20000 - L$$

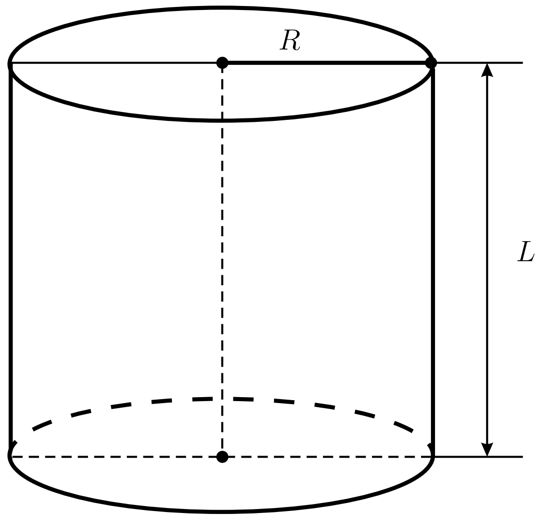
un problēma reducējas uz funkcijas

$$P(L) = L^{\frac{2}{5}}(20000 - L)^{\frac{3}{5}}$$

maksimuma atrašanu. Aprēķinot atvasinājumu $P'(L)$ un pielīdzinot to nullei, iegūstam vienādojumu

$$2 \cdot 20000 - 5L = 0,$$

no kura izriet, ka $L = 8000$, $K = 12000$. Tātad, lai maksimizētu ražošanu, personāla apmaksai ir jāpiešķir \$ 8000, bet tehnisko līdzekļu iegādei - \$ 12000.



1.3. zīm.

3. problēma. Cilindriskas formas degvielas krātuves tilpums ir vienāds ar V. Kādiem R (- cilindra rādiuss) un L (- cilindra augstums) virsmas laukums S (un līdz ar to arī materiāla patēriņš) būs minimāls (skat. 1.3. zīm.)?

Risinājums. Virsmas laukums

$$S = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot L.$$

Tātad problēma reducējas uz funkcijas

$$S = 2\pi R(R + L)$$

minimuma atrašanu, ja

$$\pi R^2 \cdot L = V.$$

Ievietojot $L = \frac{V}{\pi R^2}$ lieluma S aprēķināšanas formulā, iegūstam brīvā ekstrēma problēmu (par *brīvā ekstrēma problēmu* sauc ekstrēmu problēmu bez ierobežojumiem) viena argumenta funkcijai

$$S(R) = 2\pi R^2 + \frac{2V}{R}.$$

Aprēķinot šīs funkcijas atvasinājumu un pielīdzinot to nullei, iegūstam vienādojumu

$$4\pi R - 2VR^{-2} = 0,$$

no kura atrodam, ka

$$R = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

1.2.2. Definīcijas

Par *nosacītā ekstrēma problēmu* sauc vairāku argumentu funkcijas $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, ekstrēmu atrašanas uzdevumu pie ierobežojumiem, kuri var būt gan vienādību, gan nevienādību formā.

Par pieļaujamo punktu (attiecība uz doto problēmu) sauc tādu punktu, kas atbilst visiem problēmas ierobežojumiem.

Par pieļaujamo apgabalu (attiecība uz doto problēmu) sauc visu pieļaujamo punktu kopu.

Tā, piemēram, problēmā par degvielas krātuvi pieļaujamie punkti ir visi tie punkti, kuri apmierina vienādību $\pi R^2 \cdot L = V$.

1.2.3. Mainīgo izslēgšanas metode

Mainīgo izslēgšanas metode faktiski jau tika lietota, risinot iepriekšējā apakšparagrāfā apskatītās problēmas. Metodes ideja ir izslēgt daļu no argumentiem, izmantojot ierobežojumus, un risināt minimuma problēmu bez ierobežojumiem. Iepriekšējā piemērā par virsmas laukuma minimumu mainīgais L tika izslēgts no virsmas laukuma S formulas un lielums S kļuva par viena reāla argumenta funkciju.

Minimizējot vairāku argumentu funkciju $f(x)$, kur $x \in \mathbb{R}^n$, un

$$g_i(x) = 0 \;\; (i = 1, 2, \ldots, m;\; m < n),$$

mainīgo izslēgšanas metode, vispārīgi runājot, nozīmē, ka m argumenti (teiksim, $x_1, x_2, \ldots, x_m$) tiek izteikti ar pārējiem mainīgajiem $x_{m+1}, \ldots, x_n$:

$$\begin{aligned} x_1 = &\varphi_1(x_{m+1}; \ldots; x_n), \\ &\ldots \\ x_m = &\varphi_m(x_{m+1}; \ldots; x_n), \end{aligned}$$

un pēc to ievietošanas funkcijas f formulā iegūstam $(n-m)$ argumentu funkciju

$$f\big(\varphi_1(x_{m+1}; \ldots; x_n); \ldots; \varphi_m(x_{m+1}; \ldots; x_n); x_{m+1}; \ldots; x_n\big),$$

kurai meklējam brīvo minimumu.

Noteiktības labad visur runa ir par minimumu, bet viss teiktais attiecas arī uz maksimizēšanas problēmām.

1.8. piezīme. Netriviāls ir jautājums, kad daļu argumentu (teiksim, $x_1, x_2, \ldots, x_m$) var izteikt ar pārējiem mainīgajiem $x_{m+1}, \ldots, x_n$ kādā punkta M_0 apkārtnē. No matemātiskas analīzes kursa ir zināms [7, 208. lpp.], ka tas ir iespējams, ja visi g_i un $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$ ir nepārtraukti un

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} \neq 0$$

punkta M_0 apkārtnē.

1.2.4. Lagranža reizinātāju metode, kad ierobežojumi ir vienādību veidā

Mainīgo izslēgšanas metode ne vienmēr ir ērta, jo dažkārt argumentu izslēgšana prasa vienādojumu un vienādojumu sistēmu analītisku risinājumu, kas, vispārīgi runājot, ir iespējams tikai retos gadījumos.

Nosaukumā minētā metode dodiespēju sākotnējo nosacītā minimuma problēmu reducēt uz brīvā ekstrēma problēmu.

1.3. piemērs. [Divi argumenti, viens ierobežojums]

Minimizēt funkciju $f(x; y) = x^2 + y^2$, ja $y = x + 1$.

Funkcijas f grafiks ir eliptiskais paraboloīds, un x un y vērtības atrodas uz taisnes $y = x + 1$ divdimensiju telpā $\mathbb{R}^2$. No ğeometriskā viedokļa ir skaidrs, ka minimuma punktam ir jāeksistē.

Saskaņā ar Lagranža metodi ir jāieved vienu (pēc ierobežojumu skaita!) parametru λ un jāsastāda tā saucamā *Lagranža funkcija*

$$L(x; y; \lambda) = f(x; y) + \lambda(y - x - 1).$$

Tālāk jāmeklē Lagranža funkcijas stacionārie punkti ar ieceri, ka tie dos sākotnējās problēmas atrisinājumu. Lagranža funkcijas stacionārie punkti apmierina vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} L_x &= & 2x - \lambda &= & 0, \\ L_y &= & 2y + \lambda &= & 0, \\ L_\lambda &= & y - x - 1 &= & 0, \end{cases}$$

kuras atrisinājums ir $x = -0,5$, $y = 0,5$, $\lambda = -1$.

1.9. piezīme. Nav jēgas aplūkot divu argumentu funkcijas minimizēšanas problēmu pie diviem ierobežojumiem, jo divi ierobežojumi, vispārīgi runājot, nosaka vienīgo punktu, un tad minimizēšanas problēma kļūst triviāla. Tā, piemēram, iepriekš aplūkotā problēma ar papildnosacījumu $y = 1$ reducējas uz funkcijas $f(x; y)$ minimizēšanas problēmu kopā $\{(x; y) : \; y = x + 1, \; y = 1\}$, kura sastāv, acīmredzot, no vienīgā punkta $(0; 1)$.

1.4. piemērs. [Trīs argumenti, divi ierobežojumi]

Minimizēt funkciju

$$f(x; y; z) = x^2 + y^2 + z^2,$$

ja

$$\begin{aligned} x + y + z &= 7, \\ x - y &= 2. \end{aligned}$$

Sastādām Lagranža

$$L(x; y; z; \lambda_1; \lambda_2) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(x + y + z - 7) + \lambda_2(x - y - 2).$$

Tā kā ir divi ierobežojumi, tad tiek ievesti divi Lagranža reizinātāji λ_1 un λ_2 jeb *Lagranža vektors* $(\lambda_1; \lambda_2)$. Tālāk ir jārisina standarta brīvā ekstrēma problēma. Lagranža funkcijas stacionārie punkti apmierina vienādojumu sistēmu

$$\left\{ \begin{array}{lcl} L_x &=& 2x + \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ L_y &=& 2y + \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \\ L_z &=& 2z + \lambda_1 = 0, \\ L_{\lambda_1} &=& x + y + z - 7 = 0, \\ L_{\lambda_2} &=& x - y - 2 = 0, \end{array} \right.$$

kuras atrisinājums ir:

$$x = \frac{10}{3}, \;\; y = \frac{4}{3}, \;\; z = \frac{7}{3}, \;\; \lambda_1 = -\frac{14}{3}, \;\; \lambda_2 = -2.$$

Tātad nosacītā ekstrēma punkts (no ģeometriskā viedokļa ir skaidrs, ka tas ir minimuma punkts) ir punkts $\left(\frac{10}{3}; \frac{4}{3}; \frac{7}{3}\right)$.

1.10. piezīme. Risinot vienādojumu sistēmu, var neinteresēties (pagaidām) par Lagranža reizinātāju vērtībām.

Risināšanas shēma. Aplūkosim vairāku argumentu funkcijas $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, minimizēšanas problēmu, kad ir uzdoti m $(m < n)$ ierobežojumi vienādību veidā:

$$g_i(x) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Jāsastāda $(n + m)$ argumentu Lagranža funkcija

$$L(x; \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$$

un jāaplūko brīva ekstrēma problēma šai Lagranža funkcijai. Tātad, problēmas atrisinājumi atrodas starp $(n + m)$ vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} L_{x_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n), \\ L_{\lambda_j} = 0 \quad (j = 1, \ldots, m), \end{cases}$$

atrisinājumiem.

1.2.5. Lagranža reizinātāju metode, kad ierobežojumi ir nevienādību veidā

Paskaidrosim Lagranža metodes būtību šajā gadījumā ar piemēru palīdzību.

1.5. piemērs. [Divi argumenti, viens ierobežojums]

Minimizēt funkciju $f(x; y) = x^2 + y^2$ pie nosacījuma $x + y \geq 1$.

Mēģināsim atrast minimuma punktu, lietojot Lagranža reizinātāju metodi. Ievedīsim fiktīvu mainīgo z un ar tā palīdzību līdzsvarosim ierobežojumu $x + y \geq 1$, pārrakstot to vienādības veidā:

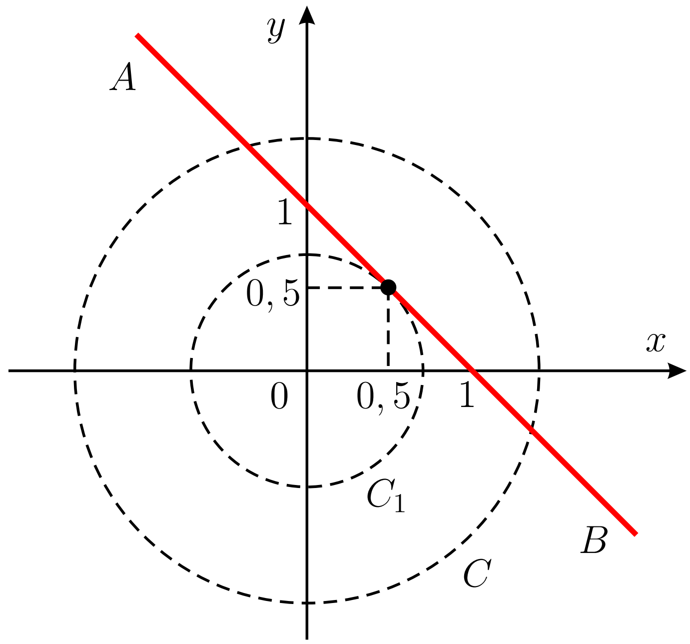
$$x + y = 1 + z^2.$$

Tagad jāminimizē funkcija f, ja nosacījums ir vienādības veidā. Sastādīsim Lagranža funkciju formā

$$L(x; y; z; \lambda) = f(x; y) + \lambda(x + y - z^2 - 1)$$

un atradīsim tās stacionāros punktus. Risinot vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} L_x &= 2x + \lambda = 0, \\ L_y &= 2y + \lambda = 0, \\ L_z &= -2z\lambda = 0, \\ L_\lambda &= x + y - z^2 - 1 = 0, \end{cases}$$



1.4. zīm. Funkcijas $f(x;y) = x^2+y^2$ līmeņlīnijas $x^2+y^2 = C_1$ un $x^2+y^2 = C$ un taisne AB ar vienādojumu $x+y = 1$, kura pieskaras pirmajai līmeņlīnijai.

iegūsim x, y, z un λ vērtības:

$$x = 0,5, \quad y = 0,5, \quad z = 0, \quad \lambda = -1.$$

Tātad nosacītā ekstrēma punkts (no ģeometriskā viedokļa ir skaidrs, ka tas ir minimuma punkts) ir punkts $(0,5; 0,5)$. Pie šī paša secinājuma varēja nonākt, izmantojot tikai ģeometriskus spriedumus. 1.4. zīmējumā ir attēlota $(x;y)$-plakne, taisne AB, kuras vienādojums ir $x + y = 1$, un divas funkcijas f līmeņlīnijas. Atgādināsim, ka par funkcijas *līmeņlīnijām* sauc līnijas, uz kurām dotās funkcijas vērtības ir konstantas. Pieņemsim, ka līmeņlīnija C_1 pieskaras taisnei AB. Pieskaršanās punkta koordinātas ir $(0,5; 0,5)$. No ģeometriskā viedokļa ir skaidrs, ka tieši līmeņlīnijas C_1 un taisnes AB pieskarpunkts ir dotās problēmas atrisinājums.

1.11. piezīme. Fakts, ka z vērtība ir nulle, norāda uz to, ka ekstrēma punkts atrodas uz pieļaujamā apgabala robežas, kur izpildās vienādība $x + y = 1$.

Risināšanas shēma. Aplūkosim vairāku argumentu funkcijas $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, minimizēšanas problēmu, kad ir uzdoti m ierobežojumi nevienādību veidā:

$$g_i(x) \leq 0 \quad (i = 1, \dots, m).$$

Ievedīsim m fiktīvus mainīgos $z_1, \dots, z_m$ (tie līdzsvaro ierobežojumus nevienādību veidā):

$$g_i(x) + z_i^2 = 0 \quad (i = 1, \dots, m).$$

Tālāk jāminimizē funkciju f pie nosacījumiem vienādību veidā. Sastādām Lagranža $(n + 2m)$ argumentu funkciju formā

$$L(x; z; \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \big(g_i(x) + z_i^2\big)$$

un atrodam tās stacionāros punktus. Tātad problēmas atrisinājumi atrodas starp $(n + 2m)$ vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} L_{x_i} = 0 & (i = 1, \dots, n), \\ L_{z_j} = 0 & (j = 1, \dots, m), \\ L_{\lambda_j} = 0 & (j = 1, \dots, m), \end{cases}$$

atrisinājumiem.

1.12. piezīme. Atšķirībā no gadījuma, kad ierobežojumi ir vienādību formā un kad, kā jau tika iepriekš minēts, nav jēgas aplūkot problēmas, kurās ierobežojumu skaits m ir lielāks vai vienāds ar mainīgo skaitu n, problēmas, kurās ierobežojumi ir nevienādību formā, var būt saturīgas arī tad, ja ierobežojumu skaits m ir lielāks par minimizējamas funkcijas f argumentu skaitu n. Iedomājieties, piemēram, regulāru sešstūri ar centru punktā $(0; 0)$, tā iekšieni kā pieļaujamo apgabalu (ko var uzdot ar 6 ierobežojumiem nevienādību formā) un aplūkojiet funkcijas $f(x; y) = x^2 + y^4$ (argumentu skaits $n = 2$) minimizēšanas problēmu (sešstūri var arī aizvietot ar m-stūri).

1.2.6. Lagranža reizinātāju metode, kad ierobežojumi ir gan vienādību, gan nevienādību veidā

Kā rīkoties, ja daļa ierobežojumu ir vienādību veidā un daļa - nevienādību veidā? Aplūkosim problēmu:

$$f(x) \to ekstr, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$
$$g_i(x) \leq \quad (i = 1, \dots, m),$$
$$h_j(x) = 0, \quad (j = 1, \dots, k).$$

Risināšanas shēma. Ievedīsim m fiktīvus mainīgos $z_1, \ldots, z_m$ (tie līdzsvaro ierobežojumus nevienādību veidā):

$$g_i(x) + z_i^2 = 0 \ \ (i = 1, \ldots, m).$$

Tālāk jāminimizē funkciju f pie nosacījumiem vienādību veidā. Sastādām Lagranža $(n + m + m + k)$ argumentu funkciju formā

$$L(x, z, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \big(g_i(x) + z_i^2\big) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_{m+j} h_j(x)$$

un atrodam tās stacionāros punktus. Tātad problēmas atrisinājumi, ja tie eksistē, atrodas starp $(n + m + m + k)$ vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} L_{x_i} &= 0 \ \ (i = 1 \ldots, n), \\ L_{z_j} &= 0 \ \ (j = 1, \ldots, m), \\ L_{\lambda_j} &= 0 \ \ (j = 1, \ldots, m + k) \end{cases}$$

atrisinājumiem.

1.2.7. Lagranža reizinātāju metodes pamatojums

Kādēļ Lagranža reizinātāju metode dod labus (pareizus) rezultātus? Lai atbildētu uz šo dabisko jautājumu, jāveic analīze. Vēsturiski tā bija lietota tieši tāpat, kā mūsu tekstā: sākumā praktiski, un tikai pēc kāda laika bija dots metodes pamatojums.

Sākumā aplūkosim vienkāršu gadījumu, kad minimizējamai funkcijai ir divi argumenti un ir viens ierobežojums vienādības formā:

$$f(x; y) \longrightarrow min, \ \ g(x; y) = 0.$$

Pieņemsim, ka abām funkcijām ir nepārtraukti parciālie atvasinājumi. Ja problēmai ir atrisinājums, t.i., lokālā minimuma punkts, kuru apzīmēsim ar $M_0(x_0; y_0)$, tad kādas punkta M_0 apkārtnes šķēlumā ar pieļaujamo apgabalu $\{(x, y) : \ g(x; y) = 0\}$ izpildās vienādība

$$\Delta f(x_0; y_0) = f(x; y) - f(x_0; y_0) = df(x_0; y_0) + \varepsilon,$$

kur $df(x_0; y_0) = f_x(x_0; y_0)dx + f_y(x_0; y_0)dy$, bet ε apzīmē augstākas kārtas (attiecībā pret dx un dy) elementus. Tā ka $(x_0; y_0)$ ir lokālā minimuma punkts, tad funkcijas pieaugums $\Delta f(x_0; y_0)$ ir nenegatīvs. Tātad $df(x_0; y_0)$ ir vienāds ar nulli visiem pieļaujamiem dx un dy (jo pretējā gadījumā

$df(x_0; y_0)$ un līdz ar to $\Delta f(x_0; y_0)$ pieņemtu gan pozitīvas, gan negatīvas vērtības). Diferencējot saiti $g(x; y) = 0$ punktā M_0, iegūstam *pieļaujamo diferenciāļu* kritēriju: pieļaujamiem diferenciāļiem ir jāapmierina nosacījums

$$dg(x_0; y_0) = g_x(x_0; y_0)dx + g_y(x_0; y_0)dy = 0. \tag{1.3}$$

Tātad lokālā minimuma punktā ir jāizpildās vienādojumu sistēmai:

$$\begin{cases} df(x_0; y_0) & = & f_x(x_0; y_0)dx + f_y(x_0; y_0)dy = 0, \\ dg(x_0; y_0) & = & g_x(x_0; y_0)dx + g_y(x_0; y_0)dy = 0, \\ g(x_0; y_0) & = & 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

1.13. piezīme. Tā kā diferenciāļi dx un dy nav patvaļīgi, tad no vienādības $df(x_0, y_0) = 0$ nevar secināt, ka $f_x(x_0, y_0) = 0$ un $f_y(x_0, y_0) = 0$. Piemēram, aplūkosim problēmu:

$$x^2 + y^2 \longrightarrow min, \quad x + y = 1,$$

kuras minimuma punkta koordinātas ir $(0,5; 0,5)$. Minimuma punktā diferenciāļi apmierina vienādību $dx + dy = 0$. Funkcijas diferenciālis minimuma punktā ir

$$2x|_{x=0,5} \cdot dx + 2y|_{y=0,5} \cdot dy = dx + dy$$

un tas, protams, ir vienāds ar nulli visiem pieļaujamiem diferenciāļiem $(dx + dy = 0)$, kaut arī funkcijas $f(x; y) = x^2 + y^2$ parciālie atvasinājumi minimuma punktā nav vienādi ar nulli ($f_x = f_y = 1$ minimuma punktā).

Lagranža ideja ir ievest pagaidām nenoteiktu parametru λ un aplūkot lielumu

$$dL = df(x; y) + \lambda dg(x; y).$$

Tad

$$\begin{aligned} dL &= f_x(x_0; y_0)dx + f_y(x_0; y_0)dy + \lambda\big[g_x(x_0; y_0)dx + g_y(x_0; y_0)dy\big] = \\ &= \big[f_x(x_0; y_0) + \lambda g_x(x_0; y_0)\big]dx + \big[f_y(x_0; y_0) + \lambda g_y(x_0; y_0)\big]dy. \end{aligned}$$

Tā kā $df(x_0; y_0)$ un $dg(x_0; y_0)$ ir vienādi ar nulli, tad $dL = 0$ minimuma punktā. Sekojot Lagranža idejai, jāaizvēlas tādu parametru λ, lai viena no iekavām (teiksim, pirmā) iepriekšējās izteiksmes pēdējā rindiņā būtu vienāda ar nulli (tas ir iespējams, ja $g_x(x_0; y_0) \neq 0$). Tad

$$f_x(x_0; y_0) + \lambda g_x(x_0, y_0) = 0.$$

Tā kā dL minimuma punktā ir vienāds ar nulli un diferenciālis dy var būt izvēlēts patvaļīgi, tad koeficientam pie dy arī ir jābūt vienādam ar nulli. Tātad

$$f_y(x_0; y_0) + \lambda g_y(x_0; y_0) = 0.$$

Minimuma punktā jāizpildās arī vienādībai

$$g(x_0; y_0) = 0.$$

Nosacītā minimuma problēmā minimuma punkta noteikšanai iegūstam trīs vienādojumu sistēmu, kura sakrīt ar sistēmu (1.4). Tātad minimuma punkta atrašanai jārisina sistēma (1.4) attiecībā pret x, y, λ.

1.14. piezīme. Ja mēs no paša sākuma sastādītu funkciju

$$L(x; y; \lambda) = f(x; y) + \lambda g(x; y)$$

un meklētu tai brīvā ekstrēma punktu, tad iegūtu sistēmu:

$$\begin{cases} L_x &= f_x(x, y) + \lambda g_x(x, y) = 0, \\ L_y &= f_y(x, y) + \lambda g_y(x, y) = 0, \\ L_\lambda &= g(x, y) = 0. \end{cases}$$

Tagad aplūkosim gadījumu, kad nosacītā ekstrēma problēma ir formā:

$$\begin{array}{l} f(x) \longrightarrow ekstr, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ g_i(x) = 0 \;\; (i = 1, \ldots, m). \end{array}$$

Nepieciešamais nosacījums lokālam ekstrēmam ir vienādība

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx = 0,$$

kurai jāizpildās visiem pieļaujamiem diferenciāļiem dx_i.

Savukārt pieļaujamiem diferenciāļiem jāapmierina vienādības

$$dg_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_j}{\partial x_i}\, dx_i = 0 \;\; (j = 1, \ldots, m). \tag{1.5}$$

Tagad reizinām (1.5) katram j ar pagaidām nenoteiktiem skaitļiem λ_j un sastādām izteiksmi

$$dL = df + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j\, dg_j. \tag{1.6}$$

Ievietojot lielumu df un dg_i izteiksmes vienādībā (1.6) un sagrupējot locekļus, iegūstam

$$dL = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right) dx_i.$$

Lielumam dL ir jābūt vienādam ar nulli visiem pieļaujamiem diferenciāļiem dx_i, jo dL saskaņā ar (1.6) sastāv no divām daļām, katra no kurām ir vienāda ar nulli visiem pieļaujamiem diferenciāļiem. Tātad

$$dL = 0$$

visiem pieļaujamiem argumentu pieaugumiem dx_i. No tiem tikai $n - m$ diferenciāļi var būt izvēlēti patvaļīgi, jo argumentu pieaugumi dx_i ir saistīti savā starpā ar m ierobežojumiem. Izvēlēsimies Lagranža reizinātājus λ_j $(j = 1, \ldots, m)$ tā, lai pirmās m iekavas lieluma dL izteiksmē būtu vienādas ar nulli. Iegūsim m vienādojumu sistēmu attiecībā pret λ_j:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, m),$$

kura ir atrisināma, ja determinants $\det \left\| \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right\| \neq 0$. Pārējās $n - m$ iekavas ir koeficienti pie atlikušajiem $n - m$ diferenciāļiem, kuri var būt izvēlēti patvaļīgi, un līdz ar to šie koeficienti arī ir nulles. Iegūsim vēl $n - m$ vienādojumus

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0 \quad (i = m + 1, \ldots, n).$$

Visbeidzot, minimuma punktā ir jāizpildās arī ierobežojumiem

$$g_i(x) = 0 \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Kopā $n+m$ nezināmajiem x_i, λ_j $(i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m)$ ir jāapmierina $n + m$ vienādojumu sistēmu.

1.15. piezīme. Vienādojumu sistēmu nezināmo x_i, λ_j atrašanai var iegūt arī, sastādot Lagranža funkciju

$$L(x; \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x)$$

un meklējot tai brīvā ekstrēma punktu.

1.2.8. Uzdevumi

4. Atrast punktam $(3;4)$ vistuvāko punktu uz riņķa līnijas $x^2+y^2=1$.

5. Atrast koordinātu sākumpunktam vistuvāko punktu uz līknes $5x^2+6xy+5y^2=8$.

6. Izmantojot Lagranža reizinātāju metodi, atrast iespējamos ekstrēma punktus:

6a. $f(x;y)=x^4+y^2 \longrightarrow ekstr$, $xy=1$;

6b. $f(x;y;z)=xy+xz \longrightarrow ekstr$, $x+2y-z=0$, $x-y=0$;

6c. $f(x;y)=x^2+y^2 \longrightarrow ekstr$, $y \leq x-2$;

6d. $f(x;y)=x^2-xy+y^2 \longrightarrow ekstr$, $x \geq y+1$;

6e. $f(x;y)=x^2+2x+y^2+2y \longrightarrow ekstr$, $x+y \geq 1$, $x=y$;

6f. $f(x;y)=x^2-2x+y \longrightarrow ekstr$, $y+2x \geq 2$, $y=5$.

1.2.9. Nosacītā ekstrēma pietiekamie nosacījumi

Vispirms atzīmēsim, ka, ja nosacītā ekstrēma problēmu var reducēt uz brīvā ekstrēma meklēšanas problēmu (piemēram, izslēdzot atkarīgos mainīgos), tad ir spēkā visi brīvā ekstrēma pietiekamie nosacījumi.

1.6. piemērs. Aplūkosim nosacītā ekstrēma problēmu:

$$f(x;y)=x^2+y^2 \longrightarrow ekstr, \quad x-y=1.$$

Acīmredzot, šī problēma ir ekvivalenta brīvā ekstrēma meklēšanas problēmai:

$$F(x)=x^2+(x-1)^2 \longrightarrow ekstr.$$

Funkcijas $F(x)$ stacionārais punkts ir $x=\frac{1}{2}$ (vienādojuma $F'(x)=0$ atrisinājums). Tā kā $F''(x)=4>0$, tad stacionārais punkts ir minimuma punkts. Sākotnējās problēmās atrisinājums ir punkts $x=\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{2}$, kurā funkcija $f(x;y)$ pieņem minimālo vērtību.

Ja nevar izteikt atkarīgos mainīgos ar neatkarīgiem, vai arī iegūtie vienādojumi ir grūti atrisināmi, ir jāmeklē cita pieeja.

Aplūkosim vispārīgu gadījumu (pēc grāmatas [3]):

$$f(x) \longrightarrow ekstr, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.7}$$

$$g_i(x)=0 \;\; (i=1,\ldots,m). \tag{1.8}$$

Pieņemsim, ka x_0 ir Lagranža funkcijas

$$L(x;\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$$

stacionārais punkts, bet $\lambda = (\lambda_1; \ldots; \lambda_m)$ ir attiecīgais Lagranža reizinātāju vektors. Stacionārā punkta raksturs ir atkarīgs no funkcijas pieauguma $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ zīmes, kur x apmierina saites (1.8). Atzīmēsim, ka

$$\Delta L = L(x) - L(x_0) = f(x) - f(x_0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \big(g_i(x) - g_i(x_0)\big) = f(x) - f(x_0)$$

visiem x, kuri apmierina nosacījumus (1.8), jo tad $g(x) - g(x_0) = 0$. Tas nozīmē, ka funkcijas pieauguma Δf vietā var analizēt ΔL. Iegūstam

$$\Delta L = dL(x_0) + \frac{1}{2} d^2 L(x_0) + \varepsilon,$$

kur ε ir augstākas kārtas loceklis attiecībā pret argumentu pieaugumu. Tā kā $dL(x_0) = 0$, tad pieauguma ΔL zīme ir atkarīga no kvadrātiskās formas $d^2L(x_0)$ zīmes, kura savukārt ir atkarīga no n mainīgajiem dx_i^2 $(i = 1 \ldots, n)$. Diferencējot saites, iegūstam sakarības

$$dg_1 = \frac{\partial g_1}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial g_1}{\partial x_n},$$

$$\cdots$$

$$dg_m = \frac{\partial g_m}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial g_m}{\partial x_n}.$$

Pieņemot, ka matricas $\left\| \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right\|$ rangs ir m (tas nozīmē, ka vismaz viens šīs matricas m-tās kārtas minors punktā x_0 nav vienāds ar nulli, bet katrs šīs matricas $(m+1)$-tās kārtas minors punktā x_0 ir vienāds ar nulli), varam izteikt m atkarīgo mainīgo diferenciāļus ar $n-m$ neatkarīgo mainīgo diferenciāļiem. Tad n mainīgo kvadrātiskā forma $d^2L(x_0)$ kļūs par $n-m$ neatkarīgo mainīgo formu Q. Šo kvadrātisku formu var pētīt standarta veidā (skat. 1.1.5. apakšparagrāfu) un spriest par stacionārā punkta raksturu. Atgādināsim, ka, ja forma Q ir pozitīva, tad punktā x_0 ir minimums (nosacītais!), bet, ja Q ir negatīva, tad punkts x_0 ir nosacītā maksimuma punkts.

1.7. piemērs.

$$f(x;y) = e^x + e^y \longrightarrow max, \;\; g = e^{2x} + e^{2y} - 2e^2 = 0.$$

a) Lagranža funkcija

$$L(x;y;\lambda) = e^x + e^y + \lambda(e^{2x} + e^{2y} - 2e^2).$$

Risinot sistēmu

$$\begin{cases} L_x &= & e^x + 2\lambda e^{2x} = 0, \\ L_y &= & e^y + 2\lambda e^{2y} = 0, \\ L_\lambda &= & e^{2x} + e^{2y} - 2e^2 = 0, \end{cases}$$

iegūstam stacionāro punktu $x = 1$, $y = 1$, $\lambda = \frac{1}{2e}$.

b) Diferencējot saiti $g = 0$, iegūstam sakarību $2e^{2x}dx + 2e^{2y}dy = 0$, un punktā $(1;1)$ ir spēkā vienādība

$$dx + dy = 0.$$

c) Noskaidrojam stacionārā punkta $(1;1)$ raksturu. Atrodam:

$$d^2L = L_{xx}dx^2 + 2L_{xy}dxdy + L_{yy}dy^2 = (e^x + 4\lambda e^{2x})dx^2 + (e^x + 4\lambda e^{2x})dy^2.$$

Ja $x = 1$, $y = 1$, $\lambda = -\frac{1}{2e}$, tad

$$d^2L = -e\,dx^2 - e\,dy^2.$$

Pieņemam x par neatkarīgo mainīgo, bet y - par atkarīgo. Tā kā $dy^2 = dx^2$, tad

$$d^2L = -2e\,dx^2,$$

un, acīmredzot, kvadrātiskā forma $-2e\,dx^2$ ir negatīva.

Secinājums: punktā $(1;1)$ funkcijai f ir nosacītais maksimums.

1.8. piemērs. Problēma par cilindru ar minimālo virsmas laukumu pie dotā tilpuma (skat. 1.2.1. apakšparagrāfu) reducējas uz nosacītā ekstrēma problēmu:

$$f(x;y) = xy + y^2 \longrightarrow min, \;\; xy^2 = const.$$

Pieņemsim, ka $const = 2$ un atradīsim problēmas:

$$f(x;y) \longrightarrow min, \;\; xy^2 = 2,$$

atrisinājumu.

a) Lagranža funkcija

$$L(x;y;\lambda) = xy + y^2 + \lambda(xy^2 - 2).$$

Risinot sistēmu

$$\begin{cases} L_x &= y + \lambda y^2 = 0, \\ L_y &= x + 2y + 2\lambda xy = 0, \\ L_\lambda &= xy^2 - 2 = 0, \end{cases}$$

iegūstam stacionāro punktu: $x = 2$, $y = 1$, $\lambda = -1$.

b) Diferencējot saiti $g = 0$, punktā (2;1) iegūstam sakarību

$$d(xy^2 - 2) = y^2dx + 2xydy = dx + 4dy = 0.$$

c) Noskaidrojam stacionārā punkta raksturu.

$$d^2L = L_{xx}dx^2 + 2L_{xy}dxdy + L_{yy}dy^2 = 2(1+2\lambda y)dxdy + (2+2\lambda x)dy^2.$$

Ja $x = 2$, $y = 1$, $\lambda = -1$, tad

$$d^2L = -2dxdy - 2dy^2.$$

Uzskatīsim y par neatkarīgo mainīgo, bet x - par atkarīgo. Tā kā $dx = -4dy$, tad

$$d^2L = 8dy^2 - 2dy^2 = 6dy^2,$$

un, acīmredzot, kvadrātiskā forma ir pozitīva.

Secinājums: punkts $(2;1)$ ir nosacītā maksimuma punkts.

1.9. piemērs.

$$xyz \longrightarrow ekstr, \quad x + y + z = 1.$$

a) Lagranža funkcija

$$L(x;y;z;\lambda) = xyz + \lambda(x + y + z - 1).$$

Sistēmai

$$\begin{cases} L_x &= yz + \lambda = 0, \\ L_y &= xz + \lambda = 0, \\ L_y &= xz + \lambda = 0, \\ L_\lambda &= x + y + z - 1 = 0, \end{cases}$$

ir šādi atrisinājumi $(x; y; z; \lambda)$:

$$\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{9}\right), \quad (0; 0; 1; 0), \quad (1; 0; 0; 0), \quad (0; 1; 0; 0).$$

b) Diferencējot saiti $g = 0$, iegūstam sakarību starp mainīgo diferenciāļiem

$$dx + dy + dz = 0.$$

c) Noskaidrojam stacionārā punkta $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ pie $\lambda = -\frac{1}{9}$ raksturu.

$$\begin{aligned} d^2L &= 2zdxdy + 2ydxdy + 2xdydz = \\ &= 2z\,dxdy + 2y\,dx(-dx - dy) + 2x\,dy(-dx - dy) = \\ &= -2y\,dx^2 + (2z - 2y - 2x)dxdy - 2x\,dy^2. \end{aligned}$$

Punktā $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ iegūsim:

$$d^2L = -\frac{2}{3}dx^2 - \frac{2}{3}dxdy - \frac{2}{3}dy^2.$$

Šī kvadrātiskā forma ir negatīva.

Secinājums: punkts $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ ir funkcijas f nosacītā minimuma punkts.

Pārējos stacionārajos punktos formas d^2L determinants ir vienāds ar nulli. Viegli saprast, ka funkcija f jebkura cita stacionāra punkta apkārtnē pieņem gan negatīvas, gan pozitīvas vērtības, un līdz ar to funkcijai f šajos punktos ekstrēma nav.

Sakarā ar to, ka nosacītā minimuma pietiekamie nosacījumi dažādos avotos ir izklāstīti dažādi, pievērsīsim uzmanību dažām izplatītām kļūdām.

1. kļūda. Aplams ir apgalvojums, ka, lai noskaidrotu Lagranža funkcijas stacionārā punkta raksturu, pietiek ar Lagranža funkcijas pētīšanu uz brīvo ekstrēmu pie atrastās parametra λ vērtības. Apskatīsim 1.8. piemēru:

$$xy + y^2 \longrightarrow ekstr,\ xy^2 = 2,$$

un izpētīsim Lagranža funkcijas

$$L_1(x; y) = L(x; y; -1) = xy + y^2 - (xy^2 - 2)$$

raksturu stacionārā punktā $(2; 1)$ pie $\lambda = -1$. Atrodam:

$$d^2L_1 = 2(1 + 2\lambda y)dxdy + (2 + 2\lambda x)dy^2 = -2dxdy - 2dy^2.$$

Kvadrātiskās formas determinants ir vienāds ar -1, un no tā seko aplams apgalvojums, ka ekstrēma dotajā problēmā nav.

2. kļūda. Aplams ir apgalvojums, ka, lai noskaidrotu Lagranža funkcijas stacionārā punkta raksturu, pietiek izpētīt uz ekstrēmu funkciju f, ņemot vērā lineārās sakarības starp mainīgo diferenciāļiem, kuras iegūst, diferencējot saites. Tā 1.7. piemērā

$$df = e^x dx + e^y dy = \boxed{\text{ņemot vērā, ka } dx + dy = 0} = (e^x - e^y)dx = 0$$

stacionārā punktā $(1;1)$. Kvadrātiskā forma

$$d^2 f = e^x dx^2 + e^y dy^2 = \boxed{\text{ņemot vērā, ka } dx^2 = dy^2} = (e^x + e^y)dx^2$$

ir pozitīva visiem x un y, bet secinājums, ka funkcijai f punktā $(1;1)$ ir nosacītais minimums, ir aplams.

1.2.10. Uzdevumi

7. Atrast ekstrēma punktus un noteikt to raksturu, izmantojot mainīgo izslēgšanas metodi, šādās problēmās:

7a. $f(x;y;z) = xyz \longrightarrow ekstr$, $x + y + z = 5$, $xy + yz + zx = 8$;

7b. $f(x;y) = e^{xy} \longrightarrow ekstr$, $x + y = a$;

7c. $f(x;y) = x^2 + xy + y^2 \longrightarrow ekstr$, $x - y = 2$;

7d. $f(x;y;z) = x^2 + y^2 + 2z^2 \longrightarrow ekstr$, $z = y + 1$;

7e. $f(x;y;z) = x^2 + y^2 + z^2 \longrightarrow ekstr$, $x + y + z = 1$, $x + y - z = 0$.

8. Atrast ekstrēma punktus un noteikt to raksturu, izmantojot Lagranža reizinātāju metodi, šādās problēmās:

8a. $f(x;y) = y - x^2 \longrightarrow ekstr$, $x^2 + y^2 = 1$;

8b. $f(x;y) = xy \longrightarrow ekstr$, $x^2 + y^2 = 1$;

8c. $f(x;y) = 6 - 4x - 3y \longrightarrow ekstr$, $x^2 + y^2 = 1$;

8d. $f(x;y;z) = xy + xz + yz \longrightarrow ekstr$, $xyz = 8$.

9. Starp visiem taisnstūra paralēlskaldņiem (ar šķautnēm x, y, z) ar doto šķautņu summu ($x+y+z = 3c$) atrast to, kuram tilpums ir vislielākais.

II nodaļa

SKAITLISKĀS METODES

Funkcijas, kuras tika aplūkotas pirmajā nodaļā, bija diferencējamas un tāpēc varēja izmantot tādus līdzekļus, kā atvasinājumi un diferenciāļi. Vispārīgi runājot, praktiskos uzdevumos funkcijas var nebūt diferencējamas, vēl vairāk, funkcijas var būt pārtrauktas vai diskrētas (funkciju sauc par *diskrētu*, ja tā ir definēta galīgā vai sanumurējamā kopā). Nediferencējamu funkciju ekstrēmu meklēšanai ir vajadzīgas speciālas metodes. Dažas no šīm metodēm tiks apskatītas šajā nodaļā.

2.1. Unimodālas funkcijas jēdziens

Nepārtrauktas funkcijas jēdziens ir zināms no matemātiskās analīzes kursa. Nepārtrauktas funkcijas grafiks ir nepārtraukta līnija viena argumenta funkcijas gadījumā vai nepārtraukta virsma (hipervirsma) divu un vairāku argumentu funkcijas gadījumā. *Pārtrauktas* funkcijas grafikam var būt pārtraukumi vai lēcieni. Diskrētu funkciju var uzdot ar savu vērtību tabulu pie atsevišķām argumenta vērtībām.

Negludo (nediferencējamo) funkciju ekstrēmu punktu meklēšanas metodes var ilustrēt ar unimodālo funkciju piemēru. Par *unimodālām* sauc viena argumenta funkcijas, kurām definīcijas intervālā $(a; b)$ ir tikai viens ekstrēma punkts (noteiktības labad pieņemsim, ka tas ir minimums). Unimodālās funkcijas var būt arī pārtrauktas.

Apskatīsim unimodālo funkciju piemērus.

2.1. piemērs. Nepārtrauktu unimodālu funkciju piemēri:

$$f(x) = x^2, \quad x \in (-\infty, +\infty);$$
$$f(x) = \sin x, \quad x \in (0, \pi);$$
$$f(x) = |x|, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Funkcija $f(x) = 1$ nav unimodāla nevienā intervālā, jo tai jebkurā intervālā ir vairāki ekstrēma punkti.

2.2. piemērs. Pārtraukto unimodālo funkciju piemēri:

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{ja} \quad x \neq 0, \\ -1, & \text{ja} \quad x = 0; \end{cases}$$

$$f(x) = \big|E(x)\big| + |x|,$$

kur $E(x)$ ir lielākais veselais skaitlis, kas nepārsniedz x (t.i., $E(x)$ ir reālā skaitļa x veselā daļa, kuru apzīmē arī ar $[x]$).

No unimodālas funkcijas īpašībām izriet šāds

Apgalvojums. *Ja f ir unimodāla funkcija un ja kādiem $x_1 < x_2$ ir spēkā $f(x_1) < f(x_2)$, tad minimuma punkts x_{min} apmierina nosacījumu $x_{min} < x_2$. Savukārt, ja kādiem $x_1 < x_2$ ir spēkā $f(x_1) > f(x_2)$, tad minimuma punkts x_{min} apmierina nosacījumu $x_{min} > x_2$.*

Šis apgalvojums ir dažu *minimuma punktu meklēšanas stratēģiju* pamatā.

2.2. Minimuma punkta meklēšanas metodes

2.2.1. Dihotomijas metode (jeb intervāla dalīšanas uz pusēm metode)

Uzdevums. Atrast unimodālas funkcijas minimuma punktu ar precizitāti $\varepsilon > 0$.

Te nepieciešams paskaidrojums. Atrast funkcijas minimuma punktu x_{min} (kura vērtība nav zināma) ar precizitāti ε nozīme atrast tādu punkta x_{min} tuvināto vērtību x_{tuv}, kura apmierina nosacījumu $|x_{min} - x_{tuv}| < \varepsilon$.

Uzdevuma risinājums. Pieņemsim, ka unimodāla funkcija f ir definēta segmentā $[a; b]$. Sadalīsim segmentu $[a; b]$ trīs daļās

$$[a; x_1], \quad (x_1; x_2), \quad [x_2; b],$$

kur punkti x_1 un x_2 apmierina nosacījumus

$$x_1 = \frac{a+b}{2} - \delta \quad \text{un} \quad x_2 = \frac{a+b}{2} + \delta;$$

δ - pietiekami mazs skaitlis ($2\delta < \varepsilon$). Atzīmēsim, ka punkts $\frac{a+b}{2}$ ir intervāla $[a;b]$ viduspunkts, un punkti x_1 un x_2 atrodas gandrīz intervāla vidū (ja δ ir mazs), taču dažādās pusēs no viduspunkta.

Salīdzināsim funkcijas $f(x)$ vērtības punktos x_1 un x_2. Gadījumā, ja $f(x_1) = f(x_2)$, meklētais minimuma punkts noteikti atrodas intervālā $(x_1;x_2)$ (jo pretējā gadījumā funkcija f nebūtu unimodāla). Tā kā intervāla garums ir $2\delta < \varepsilon$, tad par minimuma punkta tuvinājumu var izvēlēties intervāla viduspunktu. Gadījumā, ja $f(x_1) < f(x_2)$, no *Apgalvojuma* izriet, ka minimuma punkts x_{min} (tas ir viens vienīgs, jo f ir unimodāla) atrodas intervālā (a, x_2). Ja $f(x_1) > f(x_2)$, tad $x_{min} \in (x_1;b)$. Abos gadījumos jaunā intervāla, kuru apzīmēsim ar $[a_1;b_1]$, garums ir viens un tas pats:

$$b_1 - a_1 = x_2 - a = \frac{a+b}{2} + \delta - a = \frac{b-a}{2} + \delta;$$
$$b_1 - a_1 = b - x_1 = b - \frac{a+b}{2} + \delta = \frac{b-a}{2} + \delta.$$

Atkārtojot analoģisku procedūru jaunajā intervālā $[a_1;b_1]$, iegūstam jaunus dalījuma punktus:

$$y_1 = \frac{a_1+b_1}{2} - \delta, \quad y_2 = \frac{a_1+b_1}{2} + \delta.$$

Ja $f(y_1) < f(y_2)$, tad jaunais intervāls $[a_2;b_2] = [a_1, y_2]$, bet, ja $f(y_1) > f(y_2)$, tad jaunais intervāls $[a_2;b_2] = [y_1;b_1]$. Abos gadījumos jauniegūtā intervāla garums ir viens un tas pats:

$$\begin{aligned} b_2 - a_2 = y_2 - a_1 = \frac{a_+ b_1}{2} + \delta - a_1 = \frac{b_1 - a_1}{2} + \delta = \\ = \frac{\frac{b-a}{2} + \delta}{2} + \delta = \frac{b-a}{2^2} + \frac{\delta}{2} + \delta; \\ b_2 - a_2 = b_1 - y_1 = b_1 - \frac{a_+ b_1}{2} + \delta = \frac{b_1 - a_1}{2} + \delta = \frac{b-a}{2^2} + \frac{\delta}{2} + \delta. \end{aligned}$$

Nākamajā (trešajā) solī iegūstam intervālu $[a_3;b_3]$ ar garumu

$$b_3 - a_3 = \frac{b_2 - a_2}{2} + \delta = \frac{b-a}{2^3} + \frac{\delta}{2^2} + \frac{\delta}{2} + \delta.$$

Pēc indukcijas, n-tajā solī

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} + \frac{\delta}{2^{n-1}} + \frac{\delta}{2^{n-2}} + \dots + \delta <$$
$$< \frac{b-a}{2^n} + \delta\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots\right) = \frac{b-a}{2^n} + 2\delta.$$

Pēdējās izteiksmes iegūšanai tika lietota bezgalīgi dilstošas ģeometriskās progresijas locekļu summas formula. Aprēķini ir jābeidz, ja $b_n - a_n < \varepsilon$, iegūstot minimuma punkta tuvinājumu ar vajadzīgo precizitāti.

Viens no svarīgākajiem metodes efektivitātes parametriem - aprēķinu apjoms. Metode skaitās *efektīva*, ja ir jāaprēķina pēc iespējas mazāk funkciju vērtību utt. Lietojot dihotomijas metodi, funkcijas f vērtības ir jāaprēķina $2n$ reizes.

2.2.2. Fibonači skaitļu metode

Dotā metode balstās uz Fibonači skaitļu izmantošanu. Fibonači skaitļi ir veseli skaitļi, kurus iegūst pēc rekurentas formulas:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \ (n \geq 2), \quad F_1 = F_2 = 1.$$

Pirmie Fibonači skaitļi ir uzrādīti tabulā.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$F(n)$	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Ar matemātiskas indukcijas metodi var pierādīt, ka Fibonači skaitli F_n var aprēķināt pēc formulas

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Pieņemsim, ka $f(x)$ ir unimodāla funkcija intervālā $[a; b]$. Minimuma punkta meklēšanas shēma saskaņā ar Fibonači metodi ir šāda.

Dalām intervālu $[a; b]$ trīs daļās ar punktiem

$$x_1 = a + (b-a)\frac{F_n}{F_{n+2}}, \quad y_1 = a + (b-a)\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$$

(uzskatām, ka $n \geq 2$). Punkti x_1 un y_1 ir novietoti simetriski intervālā $[a, b]$, jo

$$x_1 - a = \frac{(b-a)F_n}{F_{n+2}}$$

un

$$b - y_1 = (b-a) - (b-a)\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}} = (b-a)\frac{(F_{n+2} - F_{n+1})}{F_{n+2}} = (b-a)\frac{F_n}{F_{n+2}}.$$

Tālāk izvēlēsimies jaunu intervālu $[a_2; b_2]$ atkarībā no tā, kura vērtība, $f(x_1)$ vai $f(y_1)$, ir lielāka:

a) ja $f(x_1) < f(x_2)$, tad jaunais intervāls ir $[a_2; b_2] = [a; y_1]$;

b) ja $f(x_1) > f(x_2)$, tad jaunais intervāls ir $[a_2; b_2] = [x_1; b]$.

Abos gadījumos iegūto intervālu garumi ir vienādi, jo

$$y_1 - a = (b-a) - (b - y_1)(b-a) - (x_1 - a) = b - x_1.$$

Jaunā intervāla $[a_2; b_2]$ garums ir

$$b_2 - a_2 = y_1 - a = (b-a)\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}.$$

Aplūkosim a) gadījumu, kad $[a_2; b_2] = [a; y_1]$. Jaunie dalījuma punkti ir

$$x_2 = a_2 + (b-a)\frac{F_{n-1}}{F_{n+2}}, \quad y_2 = a_2 + (b-a)\frac{F_n}{F_{n+2}}.$$

Atzīmēsim, ka

$$y_2 = a + (b-a)\frac{F_n}{F_{n+2}} = x_1,$$

tātad jaunajā intervālā lielākais sadalījuma punkts sakrīt ar iepriekšējā intervāla mazāko sadalījuma punktu. Tālāk salīdzinām vērtības $f(x_2)$ un $f(y_2)$ un, atkarībā no salīdzināšanas rezultātiem, par jauno minimuma punkta lokalizācijas intervālu $[a_2; b_2]$ izvēlamies vai nu intervālu $[a_2; y_2]$ (ja $f(x_2) < f(y_2)$), vai arī intervālu $[x_2; b_2]$ (ja $f(x_2) > f(y_2)$). Iesakām lasītājam patstāvīgi pārliecināties, ka jaunā intervāla garums ir

$$b_3 - a_3 = (b-a)\frac{F_n}{F_{n+2}}.$$

Aplūkosim b) gadījumu, kad $[a_2; b_2] = [x_1; b]$. Jaunie dalījuma punkti ir

$$x_2 = a_2 + (b-a)\frac{F_{n-1}}{F_{n+2}}, \quad y_2 = a_2 + (b-a)\frac{F_n}{F_{n+2}},$$

bet tagad $a_2 = x_1$ atšķirībā no a) gadījuma. Atzīmēsim, ka

$$x_2 = x_1 + (b-a)\frac{F_{n-1}}{F_{n+2}} = (b-a)\frac{F_n}{F_{n+2}} + (b-a)\frac{F_{n-1}}{F_{n+2}} = (b-a)\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}} = y_1,$$

t.i., jaunajā intervālā mazākais dalījuma punkts sakrīt ar iepriekšējā intervāla lielāko dalījuma punktu. Salīdzinām vērtības $f(x_2)$ un $f(y_2)$ un, atkarībā no salīdzināšanas rezultāta, par jauno minimuma punkta lokalizācijas intervālu $[a_2; b_2]$ izvēlamies vai nu intervālu $[a_2; y_2]$ (ja $f(x_2) < f(y_2)$), vai arī intervālu $[x_2; b_2]$ (ja $f(x_2) > f(y_2)$). Jaunā intervāla $[a_3; b_3]$ garums ir

$$b_3 - a_3 = (b-a)\frac{F_n}{F_{n+2}}.$$

Rezumēsim iegūtos rezultātus. Solī ar numuru i iegūstam jaunu lokalizācijas intervālu $[a_i; b_i]$ (uzskatām ka $a_1 = a$, $b_1 = b$), kura garums ir

$$b_i - a_i = (b-a)\frac{F_{n-i+3}}{F_{n+2}}.$$

Dalījuma punkti:

$$x_i = a_i + (b-a)\frac{F_{n-i+1}}{F_{n+2}}, \quad y_i = a_i + (b-a)\frac{F_{n-i+2}}{F_{n+2}}.$$

Pēc n soļiem

$$x_n = a_n + (b-a)\frac{F_1}{F_{n+2}}, \quad y_n = a_n + (b-a)\frac{F_2}{F_{n+2}},$$

un $x_n = y_n$. Intervāla $[a_n; b_n]$ garums ir

$$(b-a)\frac{F_3}{F_{n+2}} = 2(b-a)\frac{1}{F_{n+2}}.$$

Aprēķinu algoritms ir skaidrs, paliek viens neatrisināts jautājums: kādu n izvēlēties?

Jo lielāks ir n, jo precīzāk varam atrast minimuma punktu, bet līdz ar to būs jāveic vairāk aprēķinu. Tātad, ja ir uzdots skaitlis $\varepsilon > 0$ (- precizitāte) un ir jāaprēķina minimuma punkta x_{min} tuvinājumu x_{tuv} tā, lai izpildītos nevienādība $|x_{min} - x_{tuv}| < \varepsilon$, tad n ir jāizvēlās tā, lai

$$\frac{2(b-a)}{F_{n+2}} < \varepsilon.$$

Šajā gadījumā intervāla $[a_n; b_n]$ garums nepārsniegs ε, un par minimuma punkta tuvinājumu var ņemt jebkuru šī intervāla punktu, piemēram, tā viduspunktu $\frac{b_n+a_n}{2}$.

2.3. piemērs. Aprēķināt funkcijas $f(x) = \big|E(x)\big| + |x|$ minimuma punktu intervālā $[-1, 1]$ ar precizitāti $\varepsilon = 0,2$.

1. solis. Skaitļa n izvēle.

Izvēlēsimies tādu n, lai

$$2(b-a)\frac{1}{F_{n+2}} = \frac{2 \cdot 2}{F_{n+2}} < 0,2.$$

Ja $n = 6$, tad

$$\frac{2 \cdot 2}{F_{6+2}} = \frac{2 \cdot 2}{21} < 0,2.$$

2. solis. Dalījuma punkti:

$$x_1 = a + (b-a) \cdot \frac{F_6}{F_8} = -1 + 2 \cdot \frac{F_6}{F_8} = -\frac{5}{21},$$

$$y_1 = a + (b-a) \cdot \frac{F_7}{F_8} = -1 + 2 \cdot \frac{F_7}{F_8} = \frac{5}{21},$$

pie tam

$$f(x_1) = |-1| + \left|-\frac{5}{21}\right| > \left|\frac{5}{21}\right| = f(y_1).$$

Jaunais intervāls

$$[a_2; b_2] = [x_1; b] = \left[-\frac{5}{21}; 1\right], \quad x_2 = y_1 = \frac{5}{21}.$$

3. solis. Dalījuma punkti

$$x_2 = (a_2 + (b-a) \cdot \frac{F_5}{F_8} = -\frac{5}{21} + 2 \cdot \frac{F_5}{F_8} = \frac{5}{21},$$

$$y_2 = a_2 + (b-a) \cdot \frac{F_6}{F_8} = -\frac{5}{21} + 2 \cdot \frac{F_6}{F_8} = \frac{11}{21},$$

pie tam

$$f(x_2) = \frac{5}{21} < \frac{11}{21} = f(y_2).$$

Jaunais intervāls

$$[a_3; b_3] = [a_2; y_2] = \left[-\frac{5}{21}; \frac{11}{21}\right], \quad y_3 = x_2 = \frac{5}{21}.$$

4. solis. Dalījuma punkti

$$x_3 = a_3 + (b-a) \cdot \frac{F_4}{F_8} = -\frac{5}{21} + 2 \cdot \frac{3}{21} = \frac{1}{21},$$

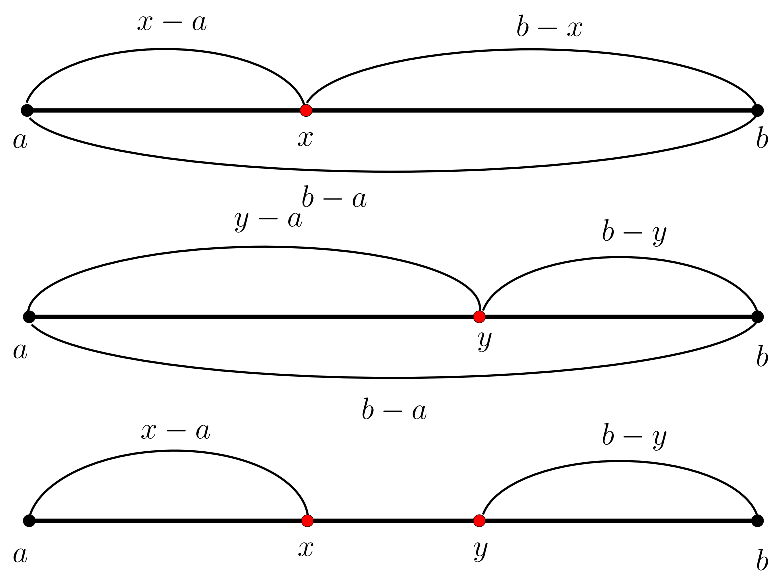
$$y_3 = a_3 + (b-a) \cdot \frac{F_5}{F_8} = -\frac{5}{21}1 + 2 \cdot \frac{5}{21} = \frac{5}{21},$$

pie tam
$$f(x_3) = \frac{1}{21} < \frac{5}{21} = f(y_3).$$
Jaunais intervāls
$$[a_4; b_4] = [a_3; y_3] = \left[-\frac{5}{21}; \frac{5}{21}\right], \quad y_4 = x_3 = \frac{1}{21}.$$

5. solis. Dalījuma punkti
$$x_4 = a_4 + (b-a) \cdot \frac{F_3}{F_8} = -\frac{5}{21} + 2 \cdot \frac{2}{21} = -\frac{1}{21},$$
$$y_4 = a_4 + (b-a) \cdot \frac{F_4}{F_8} = -\frac{5}{21} + 2 \cdot \frac{3}{21} = \frac{1}{21},$$
pie tam
$$f(x_4) = \frac{22}{21} > \frac{1}{21} = f(y_4).$$
Jaunais intervāls
$$[a_5; b_5] = [x_4; b_4] = \left[-\frac{1}{21}; \frac{5}{21}\right], \quad x_5 = y_4 = \frac{1}{21}.$$

6. solis. Dalījuma punkti
$$x_5 = (a_5 + (b-a) \cdot \frac{F_2}{F_8} = -\frac{1}{21} + 2 \cdot \frac{1}{21} = \frac{1}{21},$$
$$y_5 = a_5 + (b-a) \cdot \frac{F_3}{F_8} = -\frac{1}{21} + 2 \cdot \frac{2}{21} = \frac{3}{21},$$
pie tam
$$f(x_5) = \frac{1}{21} < \frac{3}{21} = f(y_5).$$
Jaunais intervāls
$$[a_6; b_6] = [a_5; y_5] = \left[-\frac{1}{21}; \frac{3}{21}\right].$$

7. solis. Pēdējā intervāla garums $\frac{4}{21} < \varepsilon = 0,2$. Prasītā precizitāte ir sasniegta. Procesu var beigt. Par funkcijas minimuma punktu var ņemt intervāla viduspunktu $\frac{1}{21}$. Viegli redzēt, ka reālais minimuma punkts ir nulle, un tuvinājums atšķiras no tā par vērtību, kas ir mazāka par ε.



2.1. zīm. Nogriežņa $[a;b]$ zelta šķēluma punkti x un y.

2.2.3. Zelta šķēluma metode

Iepriekšējā apakšparagrāfā unimodālas funkcijas ekstrēma meklēšanas procesā nogrieznis $[a;b]$ tika sadalīts trīs daļās $[a;x]$, $[x;y]$ un $[y;b]$, kur punkti x un y tika definēti ar Fibonači skaitļu palīdzību. Lietojot zelta šķēluma metodi, izmanto tā saucamos zelta šķēluma punktus. Aplūkosim zīmējumā attēloto nogriezni $[a;b]$ ar dalījuma punktiem x un y. Nogriežņa $[a;b]$ punktu x sauc par *zelta šķēluma punktu*, ja mazākā nogriežņa $[a;x]$ attiecība pret lielāko nogriezni $[x;b]$ ir vienāda ar lielākā nogriežņa attiecību pret visu nogriezni $[a;b]$ (skat. 2.1. zīm.), t.i.,

$$\frac{x-a}{b-x} = \frac{b-x}{b-a}.$$

Analoģiski punkts y tiek definēts tā, lai

$$\frac{b-y}{y-a} = \frac{y-a}{b-a}.$$

Viegli redzēt, ka

$$x = a + (b-a)\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \quad y = a + (b-a)\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Var pārbaudīt, ka punkti x un y ir novietoti nogrieznī $[a,b]$ simetriski, t.i., $b-y = x-a$.

Zelta šķēluma metodes būtību izsaka nākamā teorēma.

2.1. teorēma. *Nogriežņa $[a;b]$ zelta šķēluma punkts x ir zelta šķēluma punkts lielākajam no nogriežņiem, kuros nogriezni $[a;b]$ sadala otrs zelta šķēluma punkts, t.i., x ir zelta šķēluma punkts nogrieznim $[a;y]$. Analoģiski y ir zelta šķēlums nogrieznim $[x;b]$.*

▶ Jāpierāda, ka

$$x = a + (y-a)\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Tiešām,

$$\begin{aligned}
x &= a + (b-a)\frac{3-\sqrt{5}}{2} = \\
&= a + (b-a)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 - (b-a)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 + (b-a)\frac{3-\sqrt{5}}{2} = \\
&= a + \left[a + (b-a)\frac{\sqrt{5}-1}{2} - a\right]\frac{\sqrt{5}-1}{2} + \\
&\qquad\qquad + (b-a)\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2\right] = \\
&= a + (y-a)\frac{\sqrt{5}-1}{2}. \blacktriangleleft
\end{aligned}$$

Analoģiski var pierādīt, ka y ir nogriežņa $[x,b]$ zelta šķēluma punkts.

Minimuma punkta meklēšana saskaņā ar zelta šķēluma metodi notiek šādi.

Salīdzina funkcijas $f(x)$ vērtības zelta šķēluma punktos x un y. Ir iespējami divi gadījumi:

a) ja $f(x) < f(y)$, tad $[a;y]$ ir minimuma punkta lokalizācijas intervāls;

b) ja $f(x) > f(y)$, tad $[x;b]$ ir minimuma punkta lokalizācijas intervāls.

a) gadījumā jaunais intervāls ir $[a_1;b_1] = [a;y]$ un lielākais zelta šķēluma punkts $y_1 = x$ ir zināms, bet otro, mazāko, var aprēķināt pēc formulas

$$x_1 = a_1 + (b_1 - a_1)\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Tālāk salīdzina $f(x_1)$ un $f(y_1)$ un atkārto procedūru.

b) gadījumā jaunais intervāls ir $[a_1;b_1] = [x;b]$ un $x_1 = y$ ir jaunā intervāla mazākais zelta šķēluma punkts. Otrais, lielākais, zelta šķēluma punkts ir

$$y_1 = a_1 + (b_1 - a_1)\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Tālāk salīdzina $f(x_1)$ un $f(y_1)$ un atrod jauno lokalizācijas intervālu.

Aprēķinu precizitāte. Cik iterāciju jāņem, lai ekstrēma punkts būtu aprēķināts ar doto precizitāti, t.i., lai lielums $|x_{min} - a_n|$ (vai lielums $|x_{min} - b_n|$) būtu mazāks par doto precizitāti ε?

Lai sniegtu atbildi uz šo jautājumu, ievērosim, ka

$$\frac{y-a}{b-a} = \frac{(b-a)\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{(b-a)} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} < \frac{2}{3}.$$

Analoģiski iegūsim

$$\frac{b-x}{b-a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} < \frac{2}{3}.$$

Tas nozīmē, ka, gan a) gadījumā, gan b) gadījumā, jaunā lokalizācijas intervāla $[a_1; b_1]$ garums ir mazāks par $\frac{2}{3}$ no iepriekšējā intervāla garuma. Nākamajā solī intervāla $[a_2; b_2]$ garums apmierina nevienādību

$$b_2 - a_2 < \frac{2}{3}(b_1 - a_1) < \left(\frac{2}{3}\right)^2 (b-a).$$

Acīmredzot, ir spēkā novērtējums

$$b_n - a_n < \left(\frac{2}{3}\right)^n (b-a).$$

Tas nozīmē, ka, lai aprēķinātu x_{min} ar precizitāti ε, pietiek ar tādu n, lai izpildītos nevienādība

$$b_n - a_n < \left(\frac{2}{3}\right)^n (b-a) < \varepsilon.$$

Tas ir iespējams: par x_{min} tuvinājumu var ņemt gan a_n, gan b_n, gan intervāla viduspunktu $\frac{b_n + a_n}{2}$.

2.4. piemērs. Atradīsim funkcijas f(x) $= \big|E(x)\big| + |x|$ minimumu intervālā $[a; b] = [-1; 1]$.

Pirmajā solī

$$x = -1 + 2\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{2} = 2 - \sqrt{5}, \quad y = -1 + 2\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$
$$f(x) = 1 + \left(\sqrt{5} - 2\right) = \sqrt{5} - 1 > 0 + \left(\sqrt{5} - 2\right) = f(y).$$

Jaunais intervāls

$$[a_1; b_1] = [x, b] = \left[2 - \sqrt{5}; 1\right].$$

Nākamajā solī

$$x_1 = y = \sqrt{5} - 2, \quad y_1 = a_1 + (b_1 - a_1)\frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 5 - 2\sqrt{5}.$$

Salīdzinot funkcijas vērtības, iegūstam

$$f(x_1) = f\left(\sqrt{5} - 2\right) = 0 + \left(\sqrt{5} - 2\right) = \sqrt{5} - 2 < f(y_1) = \\ = f\left(5 - 2\sqrt{5}\right) = 5 - 2\sqrt{5}.$$

Jaunais intervāls

$$[a_2; b_2] = [a_1; y_1] = \left[2 - \sqrt{5}; 5 - 2\sqrt{5}\right].$$

Jaunie dalījuma punkti

$$y_2 = x_1 = \sqrt{5} - 2,$$
$$x_2 = a_2 + (b_2 - a_2)\frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \left(2 - \sqrt{5}\right) + \left(3 - \sqrt{5}\right)\frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 9 - 4\sqrt{5}.$$

Salīdzinot $f(x_2) = f\left(9 - 4\sqrt{5}\right)$ un $f(y_2) = f\left(\sqrt{5} - 2\right)$, iegūstam jaunu lokalizācijas intervālu utt., kamēr minimuma punkts nebūs atrasts ar vajadzīgo precizitāti.

2.3. Minimuma punkta meklēšanas metodes vairāku argumentu funkcijām

2.3.1. Gradientu metode

Aplūkosim funkciju $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, kurai eksistē nepārtraukti pirmās kārtas parciālie atvasinājumi. Par *funkcijas gradientu* sauc vektoru

$$\operatorname{grad} f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}; \ldots; \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

No matemātiskas analīzes kursa ir zināms [3, 184. lpp.], ka $\operatorname{grad} f(x)$ ir vektors, kas vērsts funkcijas straujākās augšanas virzienā.

Piemēram, aplūkosim divu argumentu funkciju $f(x_1; x_2)$ un tās pieaugumu punktā $(u_1; u_2)$:

$$f(u_1 + h_1; u_2 + h_2) - f(u_1; u_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(u_1; u_2) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(u_1; u_2) \cdot h_2 + o\big(|h|\big),$$

kur $o\big(|h|\big)$ ir augstākas kārtas loceklis nekā $|h| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$, t.i.,

$$\frac{o(|h|)}{|h|} \xrightarrow[|h|\to 0]{} 0.$$

Ir spēkā formula

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot h_2 = \big\langle \operatorname{grad} f(u); h \big\rangle = \big|\operatorname{grad} f(u)\big| \cdot |h| \cdot \cos\varphi,$$

kur φ ir leņķis starp vektoriem $\operatorname{grad} f(u)$ un $h = (h_1; h_2)$. Pieņemsim, ka vektors $(h_1; h_2)$ ir normēts, t.i., $|h| = 1$. Viegli redzēt, ka summa

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(u_1; u_2) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(u_1; u_2) \cdot h_2$$

būs vislielākā tad, kad pieauguma vektors $(h_1; h_2)$ ir vērsts funkcijas f gradienta virzienā (t.i., vektori $\operatorname{grad} f(u)$ un $(h_1; h_2)$ ir kolineāri), jo tad $\cos\varphi = 1$.

2.1. piezīme. Atzīmēsim, ka vektors $-\operatorname{grad} f(u)$, kuru sauc par *antigradientu*, ir vērsts funkcijas straujākās dilšanas virzienā.

2.5. piemērs. Funkcijas $f(x; y) = x^2 + y^2$, kuras grafiks ir eliptiskais paraboloīds ar virsotni koordinātu sākumpunktā, antigradienta vektors $(-2x; -2y)$ jebkurā nenulles punktā $(x; y)$ ir vērsts uz koordinātu sākumpunktu.

Gradientu metodes *centrālā ideja* - virzīties uz funkcijas iespējamo minimuma punktu pa lauztu līniju tā, lai katrā lūzuma punktā kustības virziens sakristu ar antigradienta virzienu.

Gradientu metodes *iteratīva formula*:

$$u_{n+1} = u_n - \alpha_{n+1} \cdot \operatorname{grad} f(u_n),$$

kur α_{n+1} - pozitīvs skaitlis.

Parametra α izvēle. Katrā solī ir jāizvēlas parametra α vērtība. Ja skaitļa α vērtība ir pārāk liela, tad funkcijas f vērtība punktā u_{n+1} var kļūt lielāka par $f(u_n)$.

2.6. piemērs. Apskatīsim problēmu

$$f(x;y) = x^2 + y^2 \longrightarrow min.$$

Pieņemsim, ka sākumpunkts ir $u_0 = (1;1)$. Tad $\operatorname{grad} f(1;1) = (2;2)$. Ja $\alpha_1 = 2$, tad tuvinājums

$$u_1 = u_0 - \alpha_1 \cdot \operatorname{grad} f(1;1) = (1;1) - 2 \cdot (2;2) = (-3;-3).$$

Acīmredzot,

$$f(u_1) = f(-3;-3) = 9 + 9 > f(u_0) = 2.$$

Var arī gadīties, ka process kļūs oscilējošs. Tā, pieņemsim, ka iepriekšējā piemērā

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = 1, \quad u_0 = (1;1).$$

Tad

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 - \alpha_1 \cdot \operatorname{grad} f(u_0) = (1;1) - (2;2) = (-1;-1),\\ f(u_1) &= 2,\\ u_2 &= u_1 - \alpha_2 \cdot \operatorname{grad} f(u_1) = (-1;-1) - (-2;-2) = (1;1),\\ f(u_2) &= 2 \ \text{ utt.} \end{aligned}$$

Katrā solī parametrs α ir jāizvēlās tā, lai funkcijas f vērtība punktā u_{n+1} būtu pēc iespējas mazāka. Meklējam α kā viena argumenta funkcijas minimizēšanas problēmas

$$f(u_{n+1}) = F(\alpha) = f\big(u_n - \alpha \operatorname{grad} f(u_n)\big) \longrightarrow min$$

atrisinājumu.

2.7. piemērs. Apskatīsim problēmu

$$f(x;y) = x^2 + y^2 \longrightarrow min.$$

Pieņemsim, ka sākumpunkts ir $u_0 = (1,1)$. Tad

$$f(u_1) = f\big(u_0 - \alpha_1 \cdot \operatorname{grad} f(u_0)\big) = f(1 - 2\alpha_1; 1 - 2\alpha_1),$$

kur α_1 ir problēmas

$$f(1 - 2\alpha; 1 - 2\alpha) \longrightarrow min$$

atrisinājums. Funkcijas

$$f(1-2\alpha;1-2\alpha)=(1-2\alpha)^2+(1-2\alpha)^2$$

minimuma punkts ir $\alpha=\frac{1}{2}$. Tad

$$f(u_1)=f\left(1-2\cdot\frac{1}{2};1-2\cdot\frac{1}{2}\right)=f(0;0)=0$$

un funkcijas f minimums (un minimuma punkts) ir atrasts jau pirmajā solī.

2.8. piemērs. Apskatīsim problēmu

$$f(x;y)=2x^2+xy+y^2\longrightarrow min.$$

Funkcijas f gradients $\operatorname{grad} f=(4x+y;x+2y)$. Pieņemsim, ka sākumpunkts ir $u_0=(1;1)$.

Pirmajā solī

$$u_1=u_0-\alpha_1\cdot\operatorname{grad} f(u_0),$$

no kurienes izriet

$$x_1=x_0-\alpha_1\cdot(4x_0+y_0)=1-5\alpha_1,$$
$$y_1=y_0-\alpha_1\cdot(x_0+2y_0)=1-3\alpha_1.$$

Meklējam optimālo α_1, risinot minimizēšanas problēmu

$$f(x_1;y_1)=2(1-5\alpha_1)^2+(1-5\alpha_1)(1-3\alpha_1)+(1-3\alpha_1)^2\longrightarrow min.$$

Pēc $\alpha_1=\frac{17}{74}$ atrašanas aprēķinām

$$x_1=-\frac{17}{74},\quad y_1=\frac{23}{74}.$$

Atrodam

$$f(u_1)=2\left(-\frac{11}{74}\right)^2+\left(-\frac{11}{74}\right)\left(\frac{23}{74}\right)+\left(\frac{23}{74}\right)^2=5\frac{27}{74}$$

un aprēķinus var turpināt tālāk.

2.9. piemērs. Apskatīsim problēmu

$$f(x;y)=x^2+xy+y^2\longrightarrow min.$$

Funkcijas f gradients $\operatorname{grad} f = (2x + y; x + 2y)$. Pieņemsim, ka sākumpunkts ir $u_0 = (1; 1)$.

Pirmajā solī

$$u_1 = u_0 - \alpha_1 \cdot \operatorname{grad} f(u_0),$$

no kurienes izriet

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \alpha_1 \cdot (2x_0 + y_0) = 1 - 3\alpha_1, \\ y_1 &= y_0 - \alpha_1 \cdot (x_0 + 2y_0) = 1 - 3\alpha_1. \end{aligned}$$

Meklējam optimālo α_1, risinot minimizēšanas problēmu

$$f(x_1; y_1) = (1 - 3\alpha_1)^2 + (-3\alpha_1)(1 - 3\alpha_1) + (1 - 3\alpha_1)^2 \longrightarrow min.$$

Pēc $\alpha_1 = \frac{1}{3}$ atrašanas aprēķinām

$$x_1 = y_1 = 1 - 3 \cdot \frac{1}{3} = 0.$$

Atrodam

$$f(u_1) = f(0; 0) = 0$$

un, acīmredzot, tā ir funkcijas f minimālā vērtība.

2.2. piezīme. Gadījumos, kad antigradienta vektors sākumpunktā u_0 ir vērsts uz minimuma punktu, gradientu metode dod precīzu atbildi jau pirmajā solī.

2.3. piezīme. Izvērstāku informāciju par gradientu metodi var iegūt grāmatās [1], [3], [5].

2.3.2. Šķēlumu metode

Problēma:

$$f(x) = f(x_1; \dots; x_n) \longrightarrow min.$$

1. solis. Izvēlamies sākumpunktu $y = (y_1; y_2; \dots; y_n)$. Ja y nav funkcijas f minimuma punkts, tad var mēģināt samazināt funkcijas vērtības.

2. solis. Fiksējam koordinātas $y_2, \dots, y_n$ un iegūstam viena argumenta funkcijas $\varphi_1(x_1) = f(x_1; y_2; \dots; y_n)$ minimizēšanas problēmu. Ar kādu no vienargumenta funkcijas minimizēšanas metodēm atrodam problēmas

$$\varphi_1(x_1) \longrightarrow min$$

minimuma punktu, teiksim, v_1.

3. solis. Tālāk risinām problēmu

$$\varphi_2(x_2) = f(v_1; x_2; \ldots; y_n) \longrightarrow min$$

un atrodam koordināti v_2.

4. solis. Analoģiski atrodam pārējās koordinātas $v_3, \ldots, v_n$ un iegūstam jaunu minimuma punkta tuvinājumu - punktu $v = (v_1; v_2; \ldots; v_n)$.

Tālāk, procedūru cikliski atkārtojot, iegūstam nākamos funkcijas f minimuma punkta tuvinājumus. Tuvināšanās funkcijas $f(x)$ minimuma punktam notiek pa lauztu līniju, kuras atsevišķie posmi ir paralēli koordinātu asīm. Procesu beidzam, kad pēc dažiem cikliem funkcijas $f(x)$ tuvinātās vērtības vairs neuzlabojas.

2.10. piemērs. Apskatīsim problēmu:

$$f(x_1; x_2) = -3 - 6x_1 - 7x_2 + 7x_1^2 - 2x_2 + 16x_2^2 \longrightarrow min.$$

Pieņemsim, ka sākumpunkts ir $y = (1,2; -0,2)$. Tad

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1) = f(x_1; -0,2) &= -3 - 6x_1 + 1,4 + 7x_1^2 + 0,4x_1 + 0,64 = \\ &= -0,96 - 5,6x_1 + 7x_1^2 \longrightarrow min; \\ x_{1min} &= 0,3857; \\ \varphi_2(x_2) = f(y_1; x_2) &= f(0,3857; x_2) \longrightarrow min \quad \text{u.t.t.} \end{aligned}$$

2.4. piezīme. Sīkāku informāciju par šķēlumu metodi var iegūt grāmatā [1], no kuras ir ņemts iepriekšējais piemērs.

2.3.3. Soda funkciju metode vairāku argumentu funkcijas nosacītā minimuma meklēšanai

Soda funkciju metodes (saīsināti S.F.M.) pamatā ir ideja par funkcijas f nosacītās minimizēšanas uzdevuma aizvietošanu ar brīvās minimizēšanas uzdevumu virkni $F_N \longrightarrow min.$

2.11. piemērs. Apskatīsim nosacītās minimizēšanas problēmu:

$$\begin{aligned} f(x; y) &= 4x^2 + 5y^2 \longrightarrow min, \\ g(x; y) &= 2x + 3y - 6 = 0. \end{aligned}$$

Izmantojot Lagranža metodi (skat. 1.2.4. apakšparagrāfu), var iegūt šīs problēmas atrisinājumu:

$$x = \frac{15}{14}, \;\; y = \frac{18}{14}.$$

Pielietosim S.F.M. Sastādīsim jaunu funkciju

$$F_N(x;y) = f(x;y) + N(2x+3y-6)^2,$$

kura ir atkarīga no parametra N. Locekli $N(2x+3y-6)^2$ sauc par *sodu* par nosacījuma neizpildīšanos: jo tālāk punkts $(x;y)$ ir no taisnes $2x+3y-6=0$, jo lielāks ir elements $N(2x+3y-6)^2$.

Meklējam problēmas

$$F_N(x,y) \longrightarrow min$$

atrisinājumu, lietojot jebkuru brīva ekstrēma meklēšanas metodi. Risinot sistēmu

$$\begin{cases} \frac{\partial F_N}{\partial x} = 8x + 4N(2x+3y-6) = 0, \\ \frac{\partial F_N}{\partial y} = 10y + 6N(2x+3y-6) = 0, \end{cases}$$

atrodam

$$\begin{cases} 2x+3y-6 = -\frac{2x}{N}, \\ 2x+3y-6 = -\frac{5y}{3N}, \end{cases}$$

no kurienes seko, ka $x = \frac{5y}{6}$. Ievietojot x pēdējās vienādojumu sistēmas otrajā vienādojumā, iegūsim

$$y = \frac{18}{14+\frac{5}{N}}.$$

Tad

$$x = \frac{15}{14+\frac{5}{N}}.$$

Kad N tiecas uz bezgalību, tad

$$x \longrightarrow \frac{15}{14} \;\text{ un }\; y \longrightarrow \frac{15}{14},$$

t.i., x un y tiecas uz sākotnējā uzdevuma atrisinājumu.

S.F.M. apraksts. Problēma:

$$F(x) \longrightarrow min, \;\; g_k = 0 \;\; (k = 1, \ldots, m).$$

Nosacījumi $g_k = 0$ definē pieļaujamo apgabalu U. Par *soda funkciju* sauc funkciju $P_N(x)$ ar šādām īpašībām:

1) $P_N(x) \geq 0$, $x \in U$, $N > 0$;

2) $\lim\limits_{N\to\infty} P_N(x) = \begin{cases} 0, & \text{ja } x \in U, \\ +\infty, & \text{ja } x \notin U, \end{cases}$

Iespējamās soda funkcijas:

$$P_N(x) = \sum_{i=1}^{m} g_i^2(x),$$

$$P_N(x) = \frac{1}{N} \cdot e^{N\cdot\sum\limits_{i=1}^{m} g_i^2(x)},$$

$$P_N(x) = N \cdot \sum_{i=1}^{m} \left|g_i(x)\right|.$$

Nobeigumā apskatīsim vēl vienu piemēru.

2.12. piemērs.

$$f(x;y) = x^2 + xy + y^2 \longrightarrow min,$$
$$g(x;y) = x + y - 2 = 0.$$

Soda funkcija: $P_N(x;y) = N(x+y-2)^2$. Meklējam problēmas

$$F_N(x;y) = x^2 + xy + y^2 + N(x+y-2)^2 \longrightarrow min$$

atrisinājumu. Risinot sistēmu

$$\begin{cases} \frac{\partial F_N}{\partial x} = 2x + y + N(x+y-2) = 0, \\ \frac{\partial F_N}{\partial y} = 2y + x + N(x+y-2) = 0, \end{cases}$$

atrodam, ka $2x + y = 2y + x$ jeb $x = y$. Tāpēc no pirmā vienādojuma izriet, ka

$$x = \frac{2}{2 + \frac{3}{N}}.$$

Tad

$$y = \frac{2}{2 + \frac{3}{N}}.$$

Acīmredzams, ja $N \to \infty$, tad $x \to 1$ un $y \to 1$. Problēmas atrisinājums - punkts $(1;1)$, kurā funkcija f iegūst nosacītu minimumu.

2.5. piezīme. Izvērstāku informāciju par soda funkciju metodi var atrast grāmatās [1], [3], [5].

III nodaļa

LINEĀRĀS PROGRAMMĒŠANAS UZDEVUMI

3.1. Ievads

1. problēma. Aplūkosim $(x_1; x_2)$-plaknes apgabalu, kuru nosaka nevienādības:

$$5x_1 + 3x_2 \leq 105, \tag{3.1}$$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 70, \tag{3.2}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \tag{3.3}$$

Šis apgabals ir attēlots 3.1. zīmējumā. Plaknes $(x_1; x_2)$ punkti, kuri apmierina nevienādību $5x_1 + 3x_2 \leq 105$, atrodas zem taisnes DB, kuras vienādojums ir $5x_1 + 3x_2 = 105$; punkti, kuri apmierina nevienādību $2x_1 + 4x_2 \leq 70$, atrodas zem taisnes AE, kuras vienādojums ir $2x_1 + 4x_2 = 70$. Ņemot vērā nosacījumus $x_1 \geq 0$ un $x_2 \geq 0$, secinām, ka apgabals, kuru nosaka nevienādības (3.1), (3.2) un (3.3), ir daudzstūris $ACDO$.

Aplūkosim taišņu saimi

$$200x_1 + 160x_2 = \alpha, \tag{3.4}$$

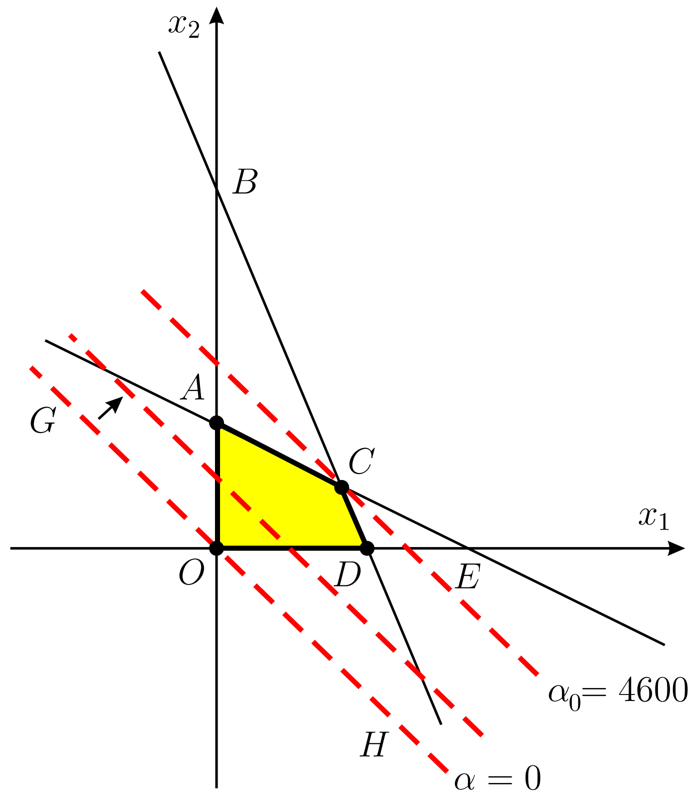
parametram α piešķirot dažādas vērtības. Ja $\alpha = 0$, tad (3.4) nosaka taisni ar vienādojumu

$$200x_1 + 160x_2 = 0$$

jeb

$$5x_1 + 4x_2 = 0.$$

Šī taisne iet caur punktu O un 3.1. zīmējumā ir apzīmēta ar GH.



3.1. zīm.

Jautājums. Kādām parametra α vērtībām taisne (3.4) satur kopējus punktus ar apgabalu $ACDO$?

Atrisinājums. Ja $\alpha = 0$, tad taisne (3.4) ir attēlota 3.1. zīmējumā. Palielinot parametru α, šī taisne virzās paralēli sev bultiņas virzienā, šķērsojot apgabalu $ACDO$. Acīmredzami eksistē parametra α vērtība α_0, kurai taisne (3.4) iet caur punktu C (punkts C ir daudzstūra $ACDO$ virsotne). Pie turpmākas parametra α palielināšanas taisne pārvietojas uz augšu - bultiņas virzienā - un tai vairs nav kopēju punktu ar apgabalu $ACDO$.

Atbilde. Maksimālā parametra α vertība, kurai taisnei $200x_1 + 160x_2 = \alpha$ ir kopējie punkti ar apgabalu $ACDO$, ir vērtība α_0, kurai taisne (3.4) iet caur punktu C.

Lai atrastu α_0 vērtību, vispirms aprēķināsim punkta C koordinātas. Tā kā C ir taišņu $5x_1+3x_2 = 105$ un $2x_1+4x_2 = 70$ krustpunkts, tad, atrisinot lineāru vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 &= 0, \\ 2x_1 + 4x_2 &= 0, \end{cases}$$

atrodam, ka punkta C koordinātas ir $x_1 = 15$, $x_2 = 10$. Ievietojot šīs koordinātas vienādojumā (3.4), iegūsim:

$$\alpha_0 = 200 \cdot 15 + 160 \cdot 10 = 4600.$$

2. problēma. Uzņēmums ražo 2 veidu izstrādājumus, kurus apzīmēsim ar X_1 un X_2. Lai saražotu izstrādājuma X_1 vienību, ir vajadzīgas 5 darba stundas konveijeru cehā un 2 darba stundas komplektēšanas cehā. Lai saražotu izstrādātu izstrādājuma X_2 vienību, ir vajadzīgas 3 darba stundas konveijeru cehā un 4 darba stundas komplektēšanas cehā. Tehnoloģisku iemeslu dēļ mēnesī ir iespējams izmantot tikai 105 darba stundas konveijeru cehā un 70 darba stundas komplektēšanas cehā. Izstrādājuma X_1 vienības cena ir Ls 200, bet izstrādājuma X_2 vienības cena ir Ls 160.

Jautājums. Cik izstrādājumu X_1 un X_2 vienību ir jasaražo, lai ienākums būtu maksimāls?

Kas saista 1. problēmu, kurai ir ģeometriski-algebrisks raksturs, un 2. problēmu, kurai ir ekonomisks raksturs? Abās problēmās figurē vienādi skaitļi 2, 3, 4, 5, 70, 105. Un vēl?

No pirmā acu uzmetiena liekas, ka ir jāražo tikai izstrādājumi X_1, jo tie maksā dārgāk. Dalām skaitli 105 ar 5 un iegūstam, ka mēnesī konveijeru cehā var apstrādāt 1. izstrādājuma 21 vienību. Dalot 70 ar 2, iegūstam, ka komplektēšanas cehā var apstrādāt x_1 izstrādājuma 35 vienības. Izrādās, ka uzņēmums mēneša laikā var saražot 1. izstrādājuma 21 vienību, noslogojot konveijeru cehu, bet tad komplektēšanas cehs nebūs noslogots 28 stundas (aprēķins: $21 \cdot 2 = 42$, $70 - 42 = 28$). Ienākuma aprēķins: $21 \cdot 2000 = 4200$ Ls. Bet vai nevarētu kopā ar 1. izstrādājumu ražot arī zināmu daudzumu 2. izstrādājuma, lai noslogotu ražošanu? Vai tādā gadījumā ienākums nebūtu lielāks?

Tagad formulēsim 2. problēmu matemātiski. Apzīmēsim saražoto izstrādājuma X_1 daudzumu ar x_1, bet saražoto izstrādājuma X_2 daudzumu ar x_2. Tad ienākumu var aprēķināt pēc šādas formulas:

$$P = 200x_1 + 160x_2.$$

Acīmredzot, x_1, x_2 un P nevar pieņemt pēc patikas lielas vērtības, jo ražošanas procesam ir ierobežojumi. Pirmais ierobežojums:

$$5x_1 + 3x_2 \leq 105,$$

jo konveijeru cehā abu izstrādājumu ražošanai var izmantot ne vairāk kā 105 darba stundas mēnesī. Otrais ierobežojums:

$$2x_1 + 4x_2 \leq 70,$$

jo komplektēšanas cehu abu izstrādājumu ražošanai var izmantot ne vairāk ka 70 darba stundas mēnesī. Papildus ierobežojumi:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

(nevar saražot negatīvu daudzumu izstrādājumu).

Tātad ir jāatrisina šāda matemātiska problēma:

$$\begin{gathered} P = 200x_1 + 160x_2 \longrightarrow max, \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 105, \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 70, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \end{gathered} \tag{3.5}$$

t.i., jāatrod lineāras funkcijas maksimums ar ierobežojumiem lineāru nevienādību formā, citiem vārdiem sakot, ir jāatrisina tā saucamais lineārās programmēšanas uzdevums.

Par *lineārās programmēšanas uzdevumu* sauc lineāras funkcijas ekstrēma atrašanu, t.i.,

$$Lx = k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_nx_2 \longrightarrow \; ekstr\bar{e}ms, \tag{3.6}$$

pie lineāriem ierobežojumiem:

$$\begin{array}{lccc} a_{11}x_1+ & \cdots & +a_{1n}x_n & \leq & b_1, \\ a_{21}x_1+ & \cdots & +a_{2n}x_n & \leq & b_2, \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{n1}x_1+ & \cdots & +a_{nn}x_n & \leq & b_n. \end{array} \tag{3.7}$$

Funkciju (3.6) sauc par *mērķa funkciju.*

Piemēram, 1. problēmā funkcija

$$L = 200x_1 + 160x_2$$

ir mērķa funkcija, kurai tiek meklēts minimums pie lineāriem ierobežojumiem:

$$\begin{array}{rcrcr} 5x_1 & + & 3x_2 & \leq & 105, \\ 2x_1 & + & 4x_2 & \leq & 70, \\ -x_1 & & & \leq & 0, \\ & & -x_2 & \leq & 0. \end{array}$$

Šeit $n = 2$ (- mainīgo skaits), $m = 4$ (- ierobežojumu skaits), nevienādību (3.7) labajā pusē atrodošies skaitļi veido vektoru $b = (105; 70; 0; 0)$, bet nevienādību (3.7) koeficienti a_{ij} veido 2×4 matricu

$$A = \begin{Vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

3.2. Lineārās programēšanas uzdevumu risināšanas grafiskā metode

3.2.1. Apraksts

Meģināsim analizēt lineārās programmēšanas uzdevuma ģeometrisko saturu. Nevienādības (3.7) definē daudzskaldņa tipa apgabalu n-dimensiju telpā $\mathbb{R}^n$. Tiešam, pirmā no nevienādībam (3.7) definē telpas $\mathbb{R}^n$ pustelpu, kura atrodas vienā pusē attiecībā pret hiperplakni

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1.$$

Apzīmēsim šo hiperplakni ar G_1. Otrā no nevienādībam (3.7) definē pustelpu G_2 utt. Rezultātā iegūstam telpisku figūru $F = G_1 \cap \cdots \cap G_n$, kura veido daudzskaldni telpā $\mathbb{R}^n$. Šī daudzskaldņa robeža sastāv no hiperplakņu

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_i \ \ (i = 1, 2, \ldots, m)$$

segmentiem. Kopu F sauc par *pieļaujamo apgabalu*, jo par lineārās programmēšanas uzdevuma atrisinājumu var būt tikai punkts $p = (x_1; \ldots; x_n)$, kurš pieder kopai F.

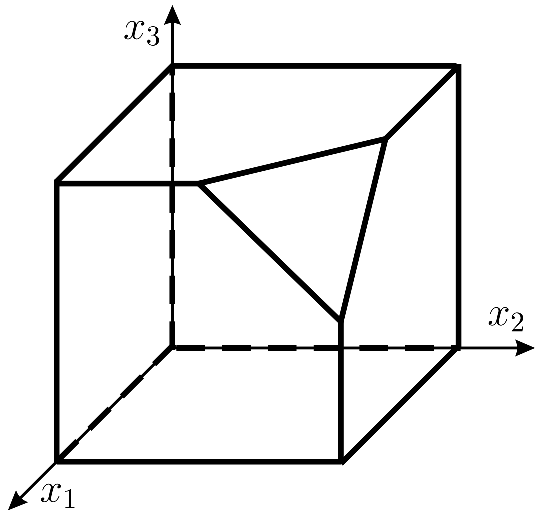
Piemēram, 1. problēmā kopas G_n ir šādas:

$$\begin{aligned} G_1 &= \{(x_1; x_2) : \ 5x_1 + 3x_2 \leq 105\}, \\ G_2 &= \{(x_1; x_2) : \ 2x_1 + 4x_2 \leq 70\}, \\ G_3 &= \{(x_1; x_2) : \ x_1 \geq 0, \ -\infty < x_2 < +\infty\}, \\ G_4 &= \{(x_1; x_2) : \ x_2 \geq 0, \ -\infty < x_1 < +\infty\}. \end{aligned}$$

Katra no šīm kopām ir $(x_1; x_2)$-plaknes pusplakne. Pieļaujamais apgabals $F = G_1 \cap G_2 \cap G_3 \cap G_4$ ir daudzstūris $ACDO$ (skat. 3.1. zīm.).

3. problēma. Sniegsim vēl vienu pieļaujamā apgabala piemēru. Aplūkosim problēmu 3-dimensiju telpā

$$Lx = k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 \longrightarrow \ \text{ekstrēms}$$



3.2. zīm.

ar 7 ierobežojumiem nevienādību veidā:

$$\begin{aligned} &x_1 \geq 0, \quad x_1 \leq 1, \\ &x_2 \geq 0, \quad x_2 \leq 1, \\ &x_2 \geq 0, \quad x_2 \leq 1, \\ &x_1 + x_2 + x_3 \leq \tfrac{5}{2}. \end{aligned}$$

Katra no šīm nevienādībām definē pustelpu 3-dimensiju Eiklīda telpā $\mathbb{R}^3$. Šo 7 pustelpu kopējā daļa ir vienības kubs bez virsotnes (skat. 3.2. zīm.).

Gadījumā, kad telpas dimensiju skaits lielāks nekā 3, izpildīt 2-dimensionālu zīmējumu ir sarežģīti, un tas nebūtu informatīvs (pamēģiniet izveidot 3-dimensionāla kuba 1-dimensionālu zīmējumu). Tāpēc lineārās programmēšanas uzdevuma risināšanas grafiskā metode pārsvarā tiek lietota, risinot uzdevumus 2 vai 3 dimensiju gadījumā.

Grafiskās metodes lietošanas shēma ir šāda. Tiek attēlots pieļaujamais apgabals F, kuru veido daudzstūris 2 dimensiju gadījumā, un daudzskaldnis 3 dimensiju gadījumā. Tiek attēlota mērķa funkcijas *līmeņlīniju* kopa 2 dimensiju gadījumā un *līmeņvirsmu* kopa 3 dimensiju gadījumā, t.i., punktu $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, kuriem

$$Lx = k_1x_1 + \cdots + k_nx_n = c = const.,$$

kopa, ja $n = 2$ vai $n = 3$. Ja kāda līmeņlīnija (vai attiecīgi līmeņvirsma) dotajam c ir konstruēta, tad pārējās līmeņlīnijas (vai attiecīgi līmeņvirsmas) iegūst no dotās ar paralēlās pārneses palīdzību. Mainot c, nosaka mērķa funkcijas vērtību palielināšanās virzienu (ja ir jāatrod mērķa funkcijas maksimums) vai mērķa funkcijas vērtību samazināšanās virziens (ja ir jāatrod mērķa funkcijas minimums). Visbeidzot, maksimuma problēmas gadījumā nosaka maksimālo parametra c vērtību c_{max}, pie kuras līmeņlīnijai (vai attiecīgi līmeņvirsmai) ir kopīgs punkts ar pieļaujamo apgabalu. Šī kopīgā punkta koordinātas arī ir apskatāmās maksimuma problēmas atrisinājums. Ievietojot atrastās koordinātas mērķa funkcijas izteiksmē, iegūst tās maksimālo vērtību pie dotajiem ierobežojumiem. Minimuma problēmas gadījumā nosaka minimālo parametra c vērtību c_{min}, pie kuras līmeņlīnijai (vai attiecīgi līmeņvirsmai) ir kopīgs punkts ar pieļaujamo apgabalu. Šī kopīgā punkta koordinātas arī ir apskatāmās minimuma problēmas atrisinājums. Ievietojot atrastās koordinātas mērķa funkcijas izteiksmē, iegūst tās minimālo vērtību pie dotajiem ierobežojumiem.

3.2.2. Minimuma gadījums

Atrisināsim grafiski šādu problēmu.

Problēma par optimālu pirkšanas plānu. Kādas valsts pieprasījums pēc naftas produktiem (miljonos tonnu) ir šāds:

Naftas produkts	Daudzums (miljonos tonnu)
Aviācijas degviela	1
Benzīns	5,5
Dīzeļdegviela	7

Tiek sastādīts šķidrās naftas pirkšanas plāns nākamajam gadam. Naftu iepērk no diviem atsevišķiem avotiem (apzīmēsim tos ar A un B). Naftas A un B sastāvs (procentos) ir šāds.

	Aviācijas degviela (%)	Benzīns (%)	Dīzeļdegviela (%)
Nafta no A avota	5	50	45
Nafta no B avota	15	35	50

Naftas no avota A cena par vienu tonnu ir \$ 300, bet naftas no avota B cena par tonnu - \$ 280. Cik jānopērk naftas no abiem avotiem, lai nodrošinātu valsti ar nepieciešamo degvielas daudzumu un samaksa par šķidro naftu būtu minimālā?

Atrisinājums. Formalizēsim doto problēmu.

Apzīmēsim:

x_1 - naftas no avota A daudzums (miljonos tonnu),

x_2 - naftas no avota B daudzums (miljonos tonnu).

Pirkšanas ierobežojumi:

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{aviācijas degvielai -} & 0,05x_1 & + & 0,15x_2 & \geq & 1; \\ \text{benzīnam -} & 0,5x_1 & + & 0,35x_2 & \geq & 5,5; \\ \text{dīzeļdegvielai -} & 0,45x_1 & + & 0,5x_2 & \geq & 7. \end{array}$$

Mērķa funkcija - pirktās naftas cena:

$$L = 300x_1 + 280x_2. \tag{3.8}$$

Tātad matemātiski doto problēmu var formulēt šādi:

$$\begin{array}{l} L = 300x_1 + 280x_2 \longrightarrow min, \\ 0,05x_1 + 0,15x_2 \geq 1, \\ 0,5x_1 + 0,35x_2 \geq 5,5, \\ 0,45x_1 + 0,5x_2 \geq 7, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{array} \tag{3.9}$$

Nav būtiski, ka nevienādībās (3.9) figurē zīme $\geq$. Ja nevienādību (3.9) abas puses pareizinātu ar "-1", tad šīs nevienādības būtu formā (3.7).

Konstruējot pieļaujamo apgabalu ir mērķtiecīgi nevienādības (3.9) pārrakstīt šādi:

$$\begin{array}{l} 5x_1 + 15x_2 \geq 100, \\ 50x_1 + 35x_2 \geq 550, \\ 45x_1 + 50x_2 \geq 700, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

jeb

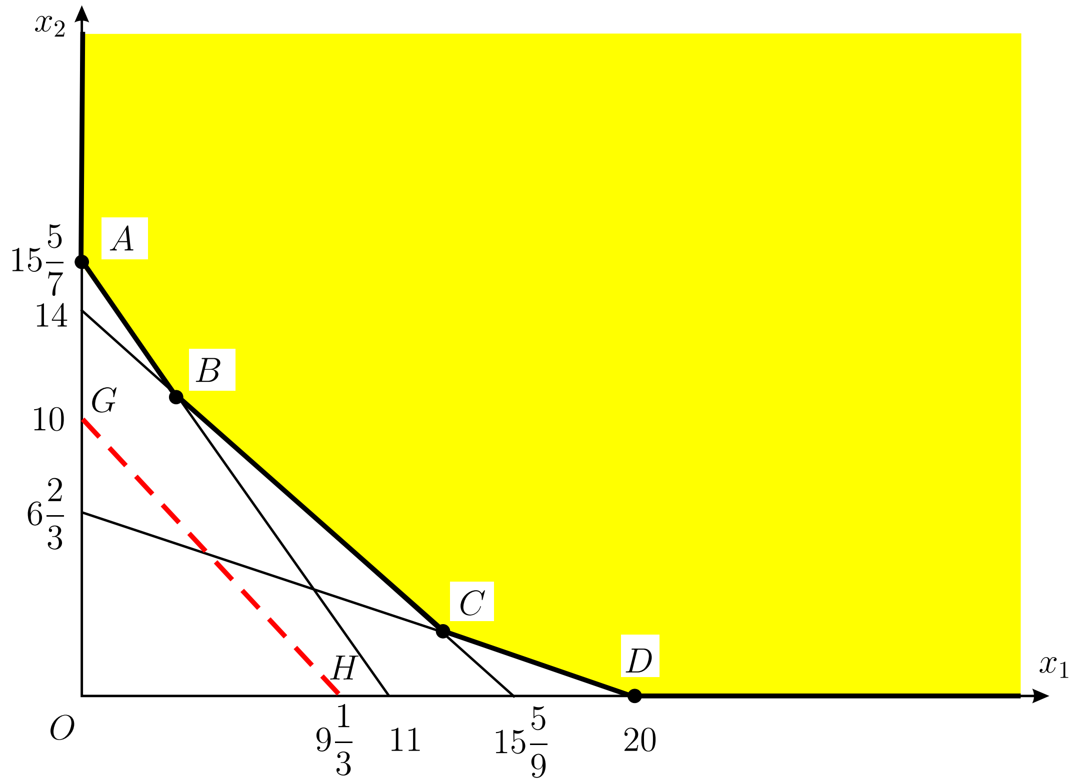
$$\begin{array}{l} x_2 \geq -\frac{1}{3}x_1 + \frac{20}{3}, \\ x_2 \geq -\frac{10}{7}x_1 + \frac{110}{7}, \\ x_2 \geq -\frac{9}{10}x_1 + 14, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{array}$$

Pieļaujamais apgabals ir attēlots 3.3. zīmējumā.

Tātad pieļaujamā apgabala robežu veido divas koordinātu līnijas un šādas taisnes:

taisne CD ar vienādojumu $x_2 = -\frac{1}{3}x_1 + \frac{20}{3}$;
taisne AB ar vienādojumu $x_2 = -\frac{10}{7}x_1 + \frac{110}{7}$;
taisne BC ar vienādojumu $x_2 = -\frac{9}{10}x_1 + 14$.

Ierobežojumiem atbilst kopas:



3.3. zīm.

G_1 - pusplakne virs taisnes CD;
G_2 - pusplakne virs taisnes AB;
G_3 - pusplakne virs taisnes BC;
G_4 - pusplakne, kurā $x_1 \geq 0$;
G_5 - pusplakne, kurā $x_2 \geq 0$.

Pieļaujamais apgabals - kopu G_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ šķēlums $F = \bigcap_{i=1}^{5} G_i$ - bezgalīgs daudzstūris.

Mērķa funkcijas līmeņlīniju vienādojums

$$300x_1 + 280x_2 = c_1$$

vai

$$x_2 = -\frac{15}{14}x_1 + c.$$

Kad $c = 0$, līmeņlīnija iet caur punktu O, kad $c = 10$, līmeņlīnija ieņem stāvokli GH. *Secinājums*: palielinot parametru c, līmeņlīnijas tiek paralēli pārnestas uz augšu. Ir skaidrs, ka eksistē parametra c vērtība, kuru apzīmēsim ar c_*, kurai līmeņlīnija

$$x_2 = -\frac{15}{14}x_1 + c_*$$

pieskarsies apgabalam F no apakšas un šis pieskaršanās punkts arī būs mūsu problēmas minimuma punkts. Lai atrastu pieskaršanās punktu, sakārtosim koeficientus pie x_1 taišņu CD, AB, BC, GH vienādojumos augošā secībā:

$$-\frac{10}{7} < -\frac{15}{14} < -\frac{9}{10} < -\frac{1}{3}.$$

Jo mazāks ir koeficients (bet lielāks pēc moduļa), jo attiecīgā taisne ir slīpāka. Acīmredzot, taisne ar koeficientu $-\frac{15}{14}$ pieskaras apgabalam F taišņu

$$\begin{aligned} x_2 &= -\frac{10}{7}x_1 + \frac{110}{7}, \\ x_2 &= -\frac{9}{10}x_1 + 14 \end{aligned}$$

krustpunktā. Risinot divu lineāro vienādojumu sistēmu, iegūstam atbildi (un līdz ar to arī optimālo šķidrās naftas pirkšanas plānu):

$$\begin{aligned} x_1 &= 3\frac{9}{37} \ \text{(miljonu tonnu)}, \\ x_2 &= 11\frac{3}{37} \ \text{(miljonu tonnu)}. \end{aligned}$$

3.2.3. Maksimuma gadījums

Atrisināsim grafiski šādu problēmu par maksimuma atrašanu.

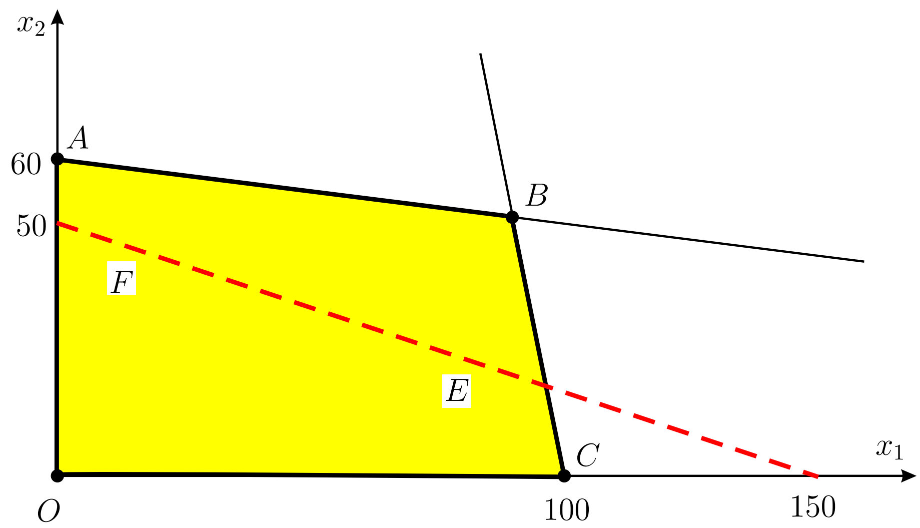
Problēma par optimālu ražošanas plānu. Uzņēmums ražo divu veidu izstrādājumus A un B. Lai saražotu vienu izstrādājuma A vienību ir nepieciešams 1 kg metāla un 5 kg plastmasas, bet, lai saražotu vienu izstrādājuma B vienību, ir vajadzīgi 9 kg metāla un 1 kg plastmasas. Noliktavā atrodas 540 kg metāla un 500 kg plastmasas. Vienas izstrādājuma A vienības cena ir \$ 60, bet vienas B izstrādājuma vienības cena ir \$ 180.

Cik daudz jāsaražo A un B izstrādājumu vienību, lai peļņa būtu maksimālā?

Risinājums. Formalizēsim problēmu.

Apzīmēsim:

x_1 - produkcijas A vienību daudzums (gabalos);
x_2 - produkcijas B daudzums (gabalos).



3.4. zīm.

Formulēsim nosacījumus, ka materiālu noliktavā ir pietiekamā daudzumā:

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & 9x_2 & \leq & 540; \\ 5x_1 & + & x_2 & \leq & 500. \end{array}$$

Mērķa funkcija - saražotās produkcijas cena:

$$L = 60x_1 + 180x_2.$$

Doto problēmu matemātiski var formulēt šādi:

$$\begin{array}{l} L = 60x_1 + 180x_2 \longrightarrow max, \\ x_1 + 9x_2 \leq 540, \\ 5x_1 + x_2 \leq 500, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{array}$$

Lai konstruētu pieļaujamo apgabalu, pārrakstīsim ierobežojumus formā:

$$\begin{array}{l} x_2 \leq -\frac{1}{9}x_1 + 60, \\ x_2 \leq -5x_1 + 500, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{array}$$

Pieļaujamais apgabals (skat. 3.4. zīm.) ir četrstūris $ABCO$, kuru veido koordinātu asis un taisnes:

taisne AB ar vienādojumu $x_2 = -\frac{1}{9}x_1 + 60$;

taisne BC ar vienādojumu $x_2 = -5x_1 + 500$.

Mērķa funkcijas līmeņlīniju vienādojums:

$$60x_1 + 180x_2 = c_1$$

vai
$$x_2 = -\frac{1}{3}x_1 + c.$$

3.4. zīmējumā līmeņlīnija $FE: \ x_2 = -\frac{1}{3}x_1 + 50$ ir attēlota ar raustītu līniju. Parametram c pieaugot, līmeņlīnijas virzās paralēli uz augšu. Skaidrs, ka punkts B ir pēdējais punkts, kurš ir kopīgs līmeņlīnijai un pieļaujamajam apgabalam. Par to var arī pārliecināties, salīdzinot koeficientus pie x_1 taišņu AB, BC un FE vienādojumos:
$$-5 < -\frac{1}{3} < -\frac{1}{9}.$$

Lai atrastu punkta B koordinātas, risinām vienādojumu sistēmu
$$\begin{cases} x_2 &= -\frac{1}{9}x_1 + 60, \\ x_2 &= -5x_1 + 500. \end{cases}$$

Atrisinājums: $x_1 = 90$, $x_2 = 50$.

Iegūtā peļņa (mērķa funkcijas vērtība):
$$L = 60 \cdot 90 + 180 \cdot 50 = 14400.$$

Salīdzinājumam,
$$L = 180 \cdot 60 = 10800,$$
ja ražotu tikai dārgāko produkciju B. Tad metāls tiktu izmantots pilnībā, bet daļa plastmasas paliktu neizmantota. Šim variantam 3.4. zīmējumā atbilst punkts A. Ja ražotu tikai produkciju A, tad peļnas apjoms
$$L = 60 \cdot 100 = 6000.$$

Šim gadījumam 3.4. zīmējumā atbilst punkts C.

3.2.4. Speciālgadījumi

Problēmai nav atrisinājuma.

Problēma.

$$L = x_1 + x_2 \longrightarrow min,$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 10,$$
$$2x_1 + x_2 \leq 4,$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Dotajai problēmai nav atrisinājuma, jo tās pieļaujamais apgabals

$$F = \bigcap_{i=1}^{4} G_i = \emptyset,$$

kur

$$\begin{aligned}
G_1 &= \{(x_1; x_2): \ x_1 + 2x_2 \geq 10\},\\
G_2 &= \{(x_1; x_2): \ 2x_1 + x_2 \leq 4\},\\
G_3 &= \{(x_1; x_2): \ x_1 \geq 0, \ -\infty < x_2 < +\infty\},\\
G_4 &= \{(x_1; x_2): \ x_2 \geq 0, \ -\infty < x_1 < +\infty\}.
\end{aligned}$$

Bezgalīgs pieļaujamais apgabals.

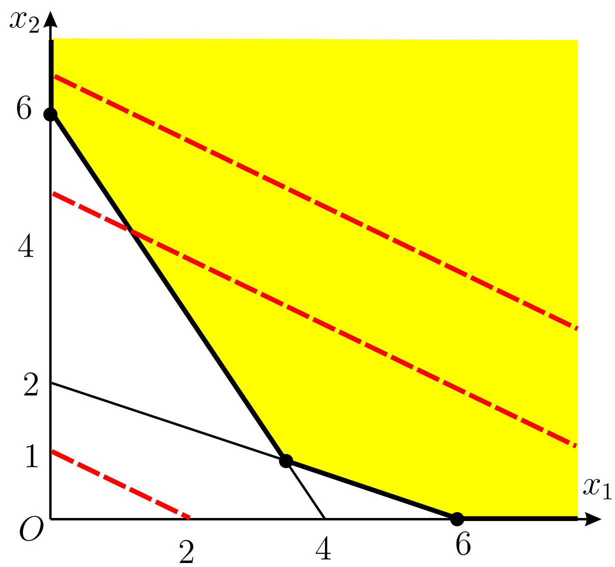
Problēma.

$$L = x_1 + 2x_2 \longrightarrow max,$$
$$x_1 + 3x_2 \geq 6,$$
$$3x_1 + 2x_2 \geq 12,$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

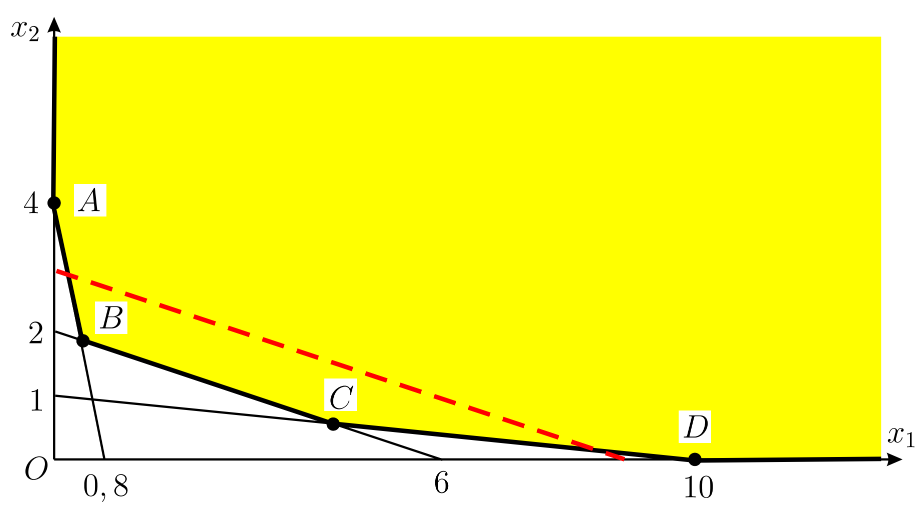
Dotajai problēmai nav atrisinājuma, jo mērķa funkcija nav ierobežota pieļaujamajā apgabalā, kurš ir attēlots 3.5. zīmējumā. Atzīmēsim, ka minimizācijas problēmai

$$L = x_1 + 2x_2 \longrightarrow min$$

ar tiem pašiem ierobežojumiem ir atrisinājums.



3.5. zīm.



3.6. zīm.

Problēmai ir bezgalīgi daudz atrisinājumu

Problēma.

$$L = 10x_1 + 30x_2 \longrightarrow min,$$
$$x_1 + 10x_2 \geq 10,$$
$$x_1 + 3x_2 \geq 6,$$
$$5x_1 + x_2 \geq 4,$$
$$x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0.$$

Dotās problēmas pieļaujamo apgabalu (skat. 3.6. zīm.) nosaka koordinātu asis un taisnes:

$$CD: \; x_2 = -\frac{1}{10}x_1 + 1,$$
$$BC: \; x_2 = -\frac{1}{3}x_1 + 2,$$
$$AB: \; x_2 = -5x_1 + 4.$$

Mērķa funkcijas līmeņlīniju vienādojums

$$10x_1 + 30x_2 = c_1$$

vai

$$x_2 = -\frac{1}{3}x_1 + c.$$

Tātad mērķa funkcijas līmeņlīnijas ir paralēlas taisnei BC, un līdz ar to arī pati taisne BC ir mērķa funkcijas līmeņlīnija. Jebkurš nogriežņa BC punkts (tai skaitā arī virsotnes B un C) ir dotās problēmas atrisinājums. Tā kā nogrieznis BC satur bezgalīgi daudz punktu (jo $B \neq C$), tad dotajai problēmai ir bezgalīgi daudz atrisinājumu.

3.2.5. Uzdevumi

10. Atrisināt uzdevumu

$$L = x_1 + x_2 \longrightarrow max,$$
$$x_1 \leq 4,$$
$$x_2 \leq 5,$$
$$2x_1 + x_2 \leq 1,$$
$$x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0.$$

11. Atrisināt uzdevumu

$$L = x_1 + x_2 \longrightarrow min$$

ar iepriekšējā uzdevuma ierobežojumiem.

12. Atrisināt uzdevumu

$$\begin{gathered} L = 5x_1 + 12x_2 \longrightarrow min, \\ x_1 + 2x_2 \geq 6, \\ x_1 + 3x_2 \geq 8, \\ x_1 + 6x_2 \geq 11, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{gathered}$$

13. Atrisināt uzdevumu

$$L = 3x_1 + 12x_2 \longrightarrow min$$

ar iepriekšējā uzdevuma ierobežojumiem.

14. Pieņemsim, ka uzdevumā par naftas pirkšanu nosacījumos naftas B cena par 1 tonnu ir \$ 280. Kādās robežās var mainīties cena par naftas A vienu tonnu, lai atrisinājums būtu iepriekšējais?

15. Pieņemsim, ka problēmā par naftas pirkšanu mainījušās cenas: naftas A cena par vienu tonnu ir \$ 250, naftas B cena par vienu tonnu ir \$ 290. Atrisināt uzdevumu pie šiem nosacījumiem.

16. Atrisināt uzdevumu

$$\begin{gathered} L = 12x_1 + 3x_2 \longrightarrow min, \\ x_2 - 3x_1 \leq 1, \\ 4x_1 + x_2 \geq 8, \\ x_2 \geq 0. \end{gathered}$$

17. Atrisināt uzdevumu

$$\begin{gathered} L = x_2 - x_1 \longrightarrow max, \\ 2x_2 - x_1 \leq 3, \\ 2x_1 + x_2 \leq 9, \\ x_1 + 3x_2 \geq 7. \end{gathered}$$

18. Firma ražo divu veidu izstrādājumus A un B. Ražošanai nepieciešamie materiāli, α un β, tiek piegādāti ierobežotā daudzumā. Cik vajag saražot izstrādājumu A un cik izstrādājumu B, lai ienākums būtu maksimālais? Apzīmējumi:

x_1 - produkcijas A daudzums,
x_2 - produkcijas B daudzums,
$a_{\alpha,A}$ - materiāla α daļa vienā izstrādājuma A vienībā,
$a_{\alpha,B}$ - materiāla α daļa vienā izstrādājuma B vienībā,
$a_{\beta,A}$ - materiāla β daļa vienā izstrādājuma A vienībā,
$a_{\beta,B}$ - materiāla β daļa vienā izstrādājuma B vienībā,
c_A - izstrādājuma A vienas vienības cena,
c_B - izstrādājuma B vienas vienības cena,
b_α - piegādātais materiāla α daudzums.
b_β - piegādātais materiāla β daudzums.

Sastādiet ražošanas procesa matemātisko modeli (formulējiet lineārās programēšanas uzdevumu).

19. Lietojiet grafisko metodi, lai atrisinātu iepriekšējo uzdevumu šādām parametru vērtībam:

$a_{\alpha,A} = 1$	$b_\alpha = 3$
$a_{\alpha,B} = 1$	$b_\beta = 4$
$a_{\beta,A} = 2$	$c_A = 3$
$a_{\beta,B} = 1$	$c_B = 2$

3.3. Simpleksa metode

3.3.1. Izliektas kopas un lineāras programēšanas problēmu atrisināmība

Saskaņā ar iepriekšējā nodaļā teikto lineārās programmēšanas problēmas atrisinājums (divu dimensiju gadījumā) vienmēr atrodas vienā no pieļaujamā apgabala virsotnēm. Analoģisks rezultāts ir spēkā arī vispārīgā gadījumā. Aplūkosim minimizācijas problēmu mērķa funkcijai

$$Lx = \sum_{i=1}^{n} k_j x_j \longrightarrow min$$

ar m ierobežojumiem (3.7), kurus pierakstīsim matricu formā:

$$Ax \leq b, \tag{3.10}$$

kur A ir $n \times m$ matrica, $b = (b_1; \ldots; b_m) \in \mathbb{R}^n$. Pieļaujamais apgabals F, kuru nosaka nevienādība (3.10), ir izliekts daudzskaldnis telpā $\mathbb{R}^n$.

Pierādīsim, ka kopa $F \subset \mathbb{R}^n$ ir izliekta, t.i., kopa F reizē ar jebkuriem diviem saviem punktiem x_1 un x_2 satur arī nogriezni ar galapunktiem x_1 un x_2:

$$[x_1; x_2] = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \ 0 \le \alpha \le 1\}. \tag{3.11}$$

Tiešām, ja $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$, kur $0 < \alpha < 1$, tad

$$Ax = A[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2] = \alpha A x_1 + (1-\alpha)Ax_2 \le \alpha b + (1-\alpha)b = b,$$

un, tā kā apgabals F ir definēts ar nevienādību (3.10), tad visi nogriežņa (3.11) punkti pieder kopai F.

Viegli redzēt, ka kopas F robeža sastāv no hiperplakņu

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \ \ (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.12}$$

segmentiem.

Par n-dimensionāla daudzskaldņa F *virsotnēm* sauc punktus, kuri pieder vismaz n hiperplaknēm (3.12).

Triju (vai divu) dimensiju gadījumā, t.i., ja $n = 3$ (vai $n = 2$), var sniegt uzskatāmu daudzskaldņa ģeometrisko interpretāciju. Ja $n = 3$, tad F ir daudzskaldnis, un vismaz triju plakņu, kuras veido F robežu, kopējais punkts ir daudzskaldņa F virsotne. Piemēram, 3.2. zīmējumā attēlotā kopa F - vienības kubs ar nošķeltu virsotni - izliekts daudzskaldnis ar 7 skaldnēm un 10 virsotnēm. Katra F virsotne ir triju plakņu, kuras veido F robežu, kopīgais punkts. Protams, var iedomāties daudzskaldni (3-dimensiju telpā) ar virsotni, kura ir vairāk nekā triju plakņu kopīgais punkts, piemēram, piramīdu, kuras pamatā ir četrstūris.

Lineārās programmēšanas teorijas pamatrezultāts saka, ka, ja lineārās programmēšanas problēmai ir atrisinājums, tad obligāti atradīsies šīs problēmas pieļaujamā apgabala F virsotne, kas sakrīt ar šo atrisinājumu.

Šim faktam var sniegt uzskatāmu ģeometrisko interpretāciju, apskatot lineārās programmēšanas problēmas divu un triju dimensiju gadījumā. Tiešām, iedomāsimies 3-dimensionālu izliektu daudzskaldni (- pieļaujamais apgabals F), kuru šķeļ plakne (- mērķa funkcijas līmeņvirsma). Paralēli pārnesot šo plakni, tā "pēdējā momentā" pieskaras apgabala F robežai. Šis "moments", precīzāk sakot, pieskaršanās punkta koordinātas, atbilst ekstremālās problēmas atrisinājumam. Pārvietojot līmeņvirsmu (plakni) vienā virzienā, iegūstam minimizācijas problēmas atrisinājumu, bet, pārvietojot to pretējā virzienā, iegūstam maksimizācijas problēmas atrisinājumu. Mērķa funkcijas līmeņvirsmas pieskaršanās pieļaujamajam apgabalam var notikt šādi:

līmeņvirsma pieskaras pieļaujamā apgabala virsotnei,
līmeņvirsma pieskaras pieļaujamā apgabala šķautnei,
līmeņvirsma pieskaras pieļaujamā apgabala skaldnei.

Otrajā un trešajā gadījumā ekstrēmu problēmai ir bezgalīgi daudz atrisinājumu, taču starp tiem noteikti ir arī pieļaujamā apgabala virsotnes.

3.3.2. Simpleksa metodes algoritms

Balstoties uz iepriekšējā paragrāfā teikto, var piedāvāt šādu lineārās programmēšanas uzdevumu risināšanas algoritmu.

1. Aprēķināt virsotņu koordinātas.
2. Aprēķināt mērķa funkcijas vērtības katrā no šiem punktiem.
3. Salīdzināt mērķa funkcijas vērtības virsotnēs un izvēlēties lielāko, ja tiek meklēts maksimums, un mazāko, ja tiek meklēts minimums.

3.1. piemērs. Aplūkosim 1. problēmu (skat. šīs nodaļas ievadu). Virsotņu kopa:

$$O(0;0),\quad A(0;17,5),\quad C(15;10),\quad D(21;0).$$

Mērķa funkcijas

$$P = 200x_1 + 160x_2$$

vērtības šajos punktos:

$$P(O) = 0,\quad P(A) = 2800,\quad P(C) = 4600,\quad P(D) = 4200.$$

Secinājums: $P_{max} = 4600$ punktā (15;10).

Simpleksa metode pēc būtības ir pieļaujamā apgabala virsotņu pārlase, kurā tiek aplūkotas ne visas virsotnes, bet tikai tās, kurās mērķa funkcijas vērtības uzlabojas.

Apskatīsim jau iepriekš minēto 1. problēmu (skat. šīs nodaļas ievadu):

$$P = 200x_1 + 160x_2 \longrightarrow max, \tag{3.13}$$

$$5x_1 + 3x_2 \leq 105, \tag{3.14}$$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 70, \tag{3.15}$$

$$x_1 \geq 0,\quad x_2 \geq 0, \tag{3.16}$$

un atrisināsim to ar simpleksa metodi. Vispirms atzīmēsim divus būtiskus problēmas parametrus - mainīgo skaitu un ierobežojumu skaitu:

dotās problēmas mainīgo skaits - 2,

dotās problēmas ierobežojumu skaits - 2.

1. solis. Ievedīsim *papildmainīgos*, pārveidojot nevienādības vienādībās:

$$5x_1 + 3x_2 + x_3 = 105, \quad x_3 \geq 0, \tag{3.17}$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_4 = 70, \quad x_4 \geq 0. \tag{3.18}$$

Atzīmēsim, ka papildmainīgie ir nenegatīvi. Modificētās problēmas dimensionalitāte $N = 4$ (četri mainīgie), bet ierobežojumu skaits $m = 2$.

2. solis. Aprēķināsim pirmās virsotnes koordinātas. Noteiksim skaitļus x_1, x_2, x_3 un x_4 tā, lai divi ($N - m = 2$, problēmas dimensionalitātes un ierobežojumu skaita starpība) no tiem būtu vienādi ar nulli. Pārējo mainīgo vērtības aprēķināsim, izmantojot ierobežojumus. Mainīgo vērtības $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 105$, $x_4 = 70$ apmierina šīs prasības. Punkts $(x_1; x_2) = (0; 0)$ uz (x_1, x_2)-plaknes atbilst pieļaujamā apgabala virsotnei O.

3. solis. Izdalīsim bāzes mainīgos un izteiksim ar tiem pārējos mainīgos. Par bāzes mainīgajiem izvēlamies vienādos ar nulli mainīgos x_1 un x_2. Pārējie mainīgie veido nebāzes mainīgo kopu. Nebāzes mainīgo skaits ir vienāds ar ierobežojumu skaitu, mūsu gadījuma ar 2 ($m = 2$), un tie ir mainīgie x_3 un x_4. Izteiksim nebāzes mainīgos ar bāzes mainīgajiem:

$$x_3 = 105 - 5x_1 - 3x_2, \tag{3.19}$$

$$x_4 = 70 - 2x_1 - 4x_2. \tag{3.20}$$

Mērķa funkcija arī tiek izteikta ar bāzes mainīgajiem:

$$P = 200x_1 + 160x_2.$$

4. solis. Pāreja pie jaunas virsotnes. Tā kā tiek meklēts mērķa funkcijas maksimums, tad meģināsim uzlabot (palielināt) funkciju P, mainot vienu no mainīgajiem x_1 vai x_2. Ir svarīgi atzīmēt, ka x_1 (arī x_2) var mainīt tikai to pieaugšanas virzienā, jo $x_1 \geq 0$ un $x_2 \geq 0$. Mērķa funkcijas uzlabošanai ir izdevīgāk mainīt x_1, jo koeficients 200 pie x_1 ir lielāks par koeficientu 160 pie x_2. No nosacījuma (3.19) izriet ka x_1 var palielināt tikai līdz 21, jo pretējā gadījumā x_3 kļūs negatīvs. No nosacījuma (3.20) izriet, ka x_1 var palielināt tikai līdz 35, jo pretējā gadījumā x_4 kļūs negatīvs. Izvēlamies mazāko vērtību $x_1 = 21$, mainīgā x_2 vērtība paliek vienāda ar nulli, bet mainīgo x_3 un x_4 vērtības tiek aprēķinātas saskaņā ar formulām (3.19) un (3.20). Jaunā punkta koordinātas:

$$x_1 = 21, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 28.$$

Punkts $(x_1; x_2) = (21; 0)$ uz $(x_1; x_2)$-plaknes atbilst pieļaujamā apgabala virsotnei D.

5. solis. Pēc ierobežojumu pārveidošanas mainīgais x_2 ir vienāds ar nulli, mainīgais x_3 kļuva par nulli, tātad divi $(N - m = 2)$ jaunie bāzes mainīgie ir x_2 un x_3. Jaunie divi $(m = 2)$ nebāzes mainīgie ir x_1 un x_4. Izteiksim nebāzes mainīgos ar bāzes mainīgajiem:

$$\begin{aligned} x_1 &= 21 - \frac{3}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_3, \\ x_4 &= 70 - 2x_1 - 4x_2, \end{aligned}$$

jeb

$$\begin{aligned} x_1 &= 21 - \frac{3}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_3, \\ x_4 &= 70 - 2\left(21 - \frac{3}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_3\right) - 4x_2, \end{aligned}$$

jeb

$$x_1 = 21 - \frac{3}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_3, \tag{3.21}$$

$$x_4 = 28 - \frac{14}{5}x_2 + \frac{2}{5}x_3. \tag{3.22}$$

Mērķa funkcija arī tiek izteikta ar mainīgajiem x_2 un x_3:

$$\begin{aligned} P &= 200x_1 + 160x_2 \\ &= 200\left(21 - \frac{3}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_3\right) + 160x_2 \\ &= 4200 + 40x_2 - 40x_3 \longrightarrow max. \end{aligned}$$

6. solis. Pāreja pie jauna punkta. Tā kā koeficients pie x_3 ir negatīvs un $x_3 \geq 0$, tad uzlabot (palielināt) mērķa funkciju var tikai palielinot x_2. No (3.21) izriet, ka x_2 var tikt palielināts tikai līdz 35, jo pretējā gadījumā x_1 kļūtu negatīvs. No (3.20) izriet, ka x_2 var tikt palielināts tikai līdz 10, jo pretējā gadījumā x_4 kļūtu negatīvs. Izvēlamies mazāko vērtību $x_2 = 10$, mainīgā x_3 vērtība paliek vienāda ar nulli, bet mainīgo x_1 un

x_4 vērtības tiek aprēķinātas saskaņā ar formulām (3.21) un (3.22). Jaunā punkta koordinātas:

$$x_1 = 15, \quad x_2 = 10, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0.$$

Punkts $(x_1; x_2) = (15; 10)$ uz $(x_1; x_2)$-plaknes atbilst pieļaujamā apgabala virsotnei C.

7. solis. Divi jaunie bāzes mainīgie: x_3 un x_4. Divi jaunie nebāzes mainīgie: x_1 un x_2. Izmantojot (3.21) un (3.22), izteiksim nebāzes mainīgos ar bāzes mainīgajiem:

$$\begin{aligned} x_2 &= 10 + \frac{1}{7}x_3 - \frac{5}{14}x_4, \\ x_1 &= 21 - \frac{3}{5}\left(10 + \frac{1}{7}x_3 - \frac{5}{14}x_4\right) - \frac{1}{5}x_3 \\ &= 15 - \frac{2}{7}x_3 + \frac{3}{14}x_4. \end{aligned}$$

Mērķa funkcija arī tiek izteikta ar bāzes mainīgajiem x_3 un x_4:

$$\begin{aligned} P &= 4200x_1 + 40x_2 - 40x_3 \\ &= 4200 + 40\left(10 + \frac{1}{7}x_3 - \frac{5}{14}x_4\right) - 40x_3 \\ &= 4200 - \frac{240}{7}x_3 - \frac{100}{7}x_4 \longrightarrow max. \end{aligned}$$

8. solis. Tā kā koeficienti pie x_3 un x_4 ir negatīvi, tad uzlabot (palielināt) mērķa funkciju vairs nav iespējams, izmainot x_3 vai x_4 vērtības. Secinājums: $P_{max} = 4600$ punktā $(x_1; x_2) = (15; 10)$.

3.3.3. Minimizācijas problēma

Ilustrēsim simpleksa metodes lietošanu vēl vienas problēmas atrisināšanai. Problēma:

$$\begin{gathered} F = x_1 - 2x_2 \longrightarrow min, \\ x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1 - x_2 \geq -2, \\ 4x_1 + x_2 \leq 12, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{gathered}$$

1. solis. Ieved *papildmainīgos* x_3, x_4, x_5, pārveidojot nevienādības vienādībās:

$$x_1 + x_2 = 1 + x_3, \quad x_3 \geq 0,$$
$$x_1 - x_2 = -2 + x_4, \quad x_4 \geq 0,$$
$$4x_1 + x_2 + x_5 = 12, \quad x_5 \geq 0.$$

Modificētās problēmas dimensionalitāte $N = 5$ (pieci mainīgie), bet ierobežojumu skaits $m = 3$.

2. solis. Aprēķināsim pirmās virsotnes koordinātas. Noteiksim skaitļus x_1, x_2, x_3, x_4 un x_5 tā, lai divi ($N - m = 5 - 3 = 2$, problēmas dimensionalitātes un ierobežojumu skaita starpība) no tiem būtu vienādi ar nulli. Pārējo mainīgo vērtības tiks aprēķinātas, izmantojot ierobežojumus. Kombinācija $x_1 = x_2 = 0$ neder, jo tad $1 + x_3 = 0$, un x_3 ir negatīvs. Mēğinām citu kombināciju $x_1 = x_3 = 0$. Nosakām x_2, x_4 un x_5 no ierobežojumiem un iegūstam vērtības:

$$x_1 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_4 = 1, \quad x_5 = 11.$$

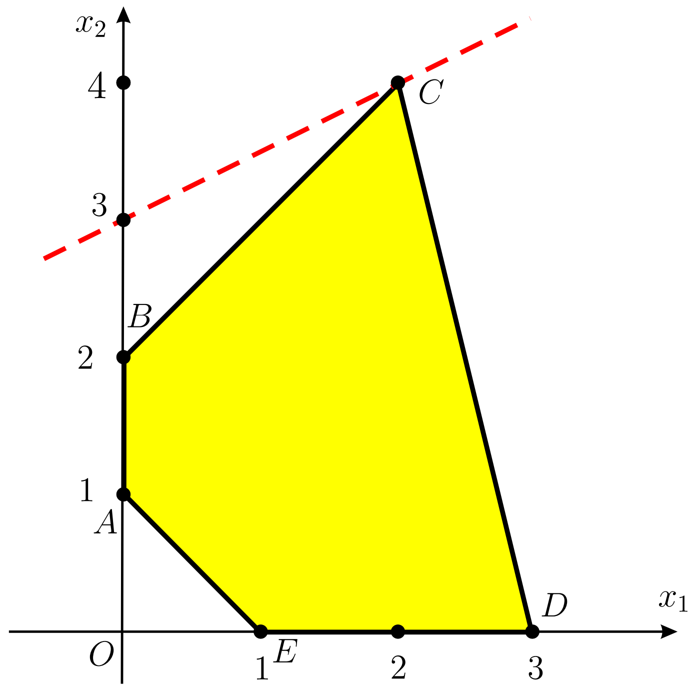
Visas vērtības ir nenegatīvas, tātad iegūstam pieļaujamu punktu. Punkts $(x_1; x_2) = (0; 1)$ uz $(x_1; x_2)$-plaknes atbilst pieļaujamā apgabala virsotnei A (skat. 3.7. zīm.). Tālāk, jāpārvietojas pa pieļaujamā apgabala robežu no virsotnes uz virsotni, uzlabojot mērķa funkcijas vērtības. Nav nozīmes, kura virsotne bija pirmā, ir svarīgi tikai, lai tā būtu pieļaujama (virsotne skaitās pieļaujama, ja skaitļi x_1 un x_2, kā arī no ierobežojumiem aprēķinātie skaitļi x_3, x_4 un x_5, būtu nenegatīvi).

3. solis. Ierobežojumu pārveidošana. Izdalīsim bāzes mainīgos un izteiksim ar tiem pārējos mainīgos. Par bāzes mainīgajiem izvēlamies vienādos ar nulli mainīgos x_1 un x_3. Pārējie mainīgie veido nebāzes mainīgo kopu. Nebāzes mainīgo skaits ir vienāds ar ierobežojumu skaitu, mūsu gadījuma ar 3 ($m = 3$), un tie ir x_2, x_4 un x_5. Izteiksim nebāzes mainīgos ar bāzes mainīgajiem:

$$x_2 = 1 - x_1 + x_3,$$
$$x_4 = x_1 - x_2 + 2,$$
$$x_5 = 12 - 4x_1 - x_2,$$

jeb

$$x_2 = 1 - x_1 + x_3,$$
$$x_4 = x_1 - (1 - x_1 + x_3) + 2,$$
$$x_5 = 12 - 4x_1 - (1 - x_1 + x_3),$$



3.7. zīm.

jeb

$$x_2 = 1 - x_1 + x_3, \tag{3.23}$$

$$x_4 = 1 + 2x_1 - x_3, \tag{3.24}$$

$$x_5 = 11 - 3x_1 - x_3. \tag{3.25}$$

Mērķa funkcija arī tiek izteikta ar bāzes mainīgajiem:

$$f = x_1 - 2x_2 = x_1 - 2(1 - x_1 + x_3) = -2 + 3x_1 - 2x_3 \longrightarrow min. \tag{3.26}$$

4. solis. Jaunas virsotnes meklēšana. Tā kā tiek meklēts mērķa funkcijas minimums, mēģināsim uzlabot (samazināt) funkciju f, mainot vienu no bāzes mainīgajiem x_1 vai x_3. Aplūkosim abus variantus. Tā kā $x_1 \geq 0$ un tekošā x_1 vērtība ir nulle, tad mainīt x_1 nevar, jo koeficients pie x_1 formulā (3.26) ir pozitīvs un tāpēc funkcijas f vērtības var tikai pieaugt. Samazināt mērķa funkciju var mainot x_3. No nosacījuma (3.24) izriet, ka x_3 var palielināt tikai līdz 1, jo pretējā gadījumā x_4 kļūs negatīvs. No nosacījuma (3.25) izriet, ka x_3 var palielināt tikai līdz 11, jo pretējā gadījumā x_5 kļūs negatīvs. Izvēlamies mazāko vērtību $x_3 = 1$ un aprēķinām jaunās x_2, x_4 un x_5 vērtības. Jaunā punkta koordinātas:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 10.$$

Punkts $(x_1; x_2) = (0; 2)$ uz $(x_1; x_2)$-plaknes atbilst pieļaujamā apgabala virsotnei B.

5. solis. Cikla atkārtošana. Pēc ierobežojumu pārveidošanas mainīgais x_1 ir vienāds ar nulli, mainīgais x_4 kļuva par nulli, tātad divi $(N - m = 2)$ jaunie bāzes mainīgie ir x_1 un x_4. Jaunie trīs $(m = 3)$ nebāzes mainīgie ir x_2, x_3 un x_5. Izteiksim nebāzes mainīgos ar mainīgajiem. Izmantojot (3.24), atrodam

$$x_3 = 1 + 2x_1 - x_4. \tag{3.27}$$

Izmantojot (3.23) un (3.27), iegūsim:

$$x_2 = 1 - x_1 + x_3 = 1 - x_1 + (1 + 2x_1 - x_4)$$

jeb

$$x_2 = 2 + x_1 - x_4. \tag{3.28}$$

Izmantojot (3.25) un (3.27), atrodam

$$x_5 = 11 - 3x_1 - x_3 = 11 - 3x_1 + (1 + 2x_1 - x_4)$$

jeb

$$x_5 = 10 - 5x_1 + x_4. \tag{3.29}$$

Mērķa funkcija arī tiek izteikta ar mainīgajiem x_1 un x_4:

$$\begin{aligned} f &= -2 + 3x_1 - 2x_3 \\ &= -2 + 3x_1 - 2(1 + 2x_1 - x_4) \\ &= -4 - x_1 + 2x_4 \longrightarrow min. \end{aligned}$$

6. solis. Pāreja pie jauna punkta. Tā kā koeficients pie x_4 ir pozitīvs un $x_4 \geq 0$, tad uzlabot (samazināt) mērķa funkciju var tikai palielinot x_1. No (3.29) izriet, ka x_1 var būt palielināts tikai līdz 2, jo pretējā gadījumā x_5 kļūs negatīvs. Vienādībās (3.27) un (3.28) mainīgais x_1 ietilpst ar pozitīviem koeficientiem un tāpēc var būt palielināts līdz bezgalībai. Izvēlamies mazāko vērtību $x_1 = 2$, x_4 paliek nulle, bet x_2, x_3 un x_5 tiek aprēķināti pēc formulām (3.27), (3.28) un (3.29). Jaunā punkta koordinātas:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 5, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 0.$$

Punkts $(x_1; x_2) = (2; 4)$ uz $(x_1; x_2)$-plaknes atbilst pieļaujamā apgabala virsotnei C.

7. solis. Divi jaunie bāzes mainīgie: x_4 un x_5. Trīs jaunie nebāzes mainīgie: x_1, x_2 un x_3. Izteiksim nebāzes mainīgos ar bāzes mainīgajiem.

Izmantojot formulas (3.27), (3.28) un (3.29), iegūstam:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 2 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{5}x_5,\\
x_2 &= 2 + x_1 - x_4\\
&= 2 + \left(2 + \frac{1}{5}x_4 - \frac{1}{5}x_5\right) - x_4\\
&= 4 - \frac{4}{5}x_4 - \frac{1}{5}x_5,\\
x_3 &= 1 + 2x_1 - x_4\\
&= 1 + 2\left(2 + \frac{1}{5}x_4 - \frac{1}{5}x_5\right) - x_4\\
&= 5 - \frac{3}{5}x_4 - \frac{2}{5}x_5.
\end{aligned}
$$

Mērķa funkcija arī tiek izteikta ar nebāzes mainīgajiem x_3 un x_4:

$$
\begin{aligned}
f =& -4 - x_1 + 2x_4\\
=& -4 - \left(2 + \frac{1}{5}x_4 - \frac{1}{5}x_5\right) + 2x_4\\
=& -6 + \frac{9}{5}x_4 + \frac{1}{5}x_5 \longrightarrow min.
\end{aligned}
$$

8. solis. Tā kā koeficienti pie x_4 un x_5 ir pozitīvi, tad uzlabot (samazināt) mērķa funkciju vairs nav iespējams, mainot x_4 vai x_5. Secinājums: $f_{min} = -6$ punktā $(x_1; x_2) = (2; 4)$.

3.1. piezīme. Simpleksa metodes aprakstu, analīzi, vēsturi un diskusijas par to var atrast grāmatā [1].

Uzdevumi

20. Atrisināt uzdevumu

$$
\begin{gathered}
f(x_1; x_2; x_3; x_4) = x_1 + 1,2x_2 + 2x_3 + 1,8x_4 \longrightarrow min,\\
x_1 + x_2 \le 15, \quad x_3 + x_4 \le 60, \quad x_1 + x_3 \ge 20, \quad x_2 + x_4 \ge 40,\\
x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0, \quad x_4 \ge 0.
\end{gathered}
$$

21. Atrisināt uzdevumu

$$
\begin{gathered}
f(x_1; x_2; x_3) = \longrightarrow max,\\
x_1 + x_2 + x_3 \le 1, \quad x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0.
\end{gathered}
$$

šādam funkcijām f:

21a. $f(x_1; x_2; x_3) = 2x_1 + x_2$;

21b. $f(x_1; x_2; x_3) = 3x_1 - 2x_2$;

21c. $f(x_1; x_2; x_3) = 3x_1 - x_2$;

21d. $f(x_1; x_2; x_3) = 2x_1 + 3x_2$;

21e. $f(x_1; x_2; x_3) = x_1 - 4x_3$;

21f. $f(x_1; x_2; x_3) = x_1 - x_2 + x_3$;

21g. $f(x_1; x_2; x_3) = 2x_1 - x_2 + x_3$;

21h. $f(x_1; x_2; x_3) = x_1 - x_2 + 3x_3$;

21i. $f(x_1; x_2; x_3) = 2x_1 - x_3$.

22. Atrisināt uzdevumu

$$\begin{gathered} L = 5x_1 + 12x_2 \longrightarrow min, \\ x_1 + 2x_2 \geq 6, \\ x_1 + 3x_2 \geq 8, \\ x_1 + 6x_2 \geq 11, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{gathered}$$

ar simpleksa metodi.

22. Atrisināt uzdevumu

$$L = 3x_1 + 12x_2 \longrightarrow min$$

ar iepriekšējā uzdevuma ierobežojumiem.

ATBILDES

1. $p_1 = 52$, $q_1 = 48$, $p_2 = 44$, $q_2 = 40$. **2.** $(0;0)$ ir minimuma punkts, punktā $\left(\frac{3}{4};-\frac{1}{2}\right)$ ekstrēma nav. **3a.** Punktā $(0;0)$ ekstrēma nav, $\left(-\frac{5}{3};\frac{5}{3}\right)$ ir maksimuma punkts. **3b.** Punktā $(0;0)$ ekstrēma nav, $(-2;-2)$ ir maksimuma punkts. **3c.** Punktā $\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$ ekstrēma nav. **3d.** $(3;1)$ ir minimuma punkts. **4.** $\left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$. **5.** $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. **6a.** $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{6}};\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{6}}\right)$ un $\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{6}};-\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{6}}\right)$. **6b.** $\left(\frac{3}{3};\frac{5}{3}\right)$, $\left(-\frac{5}{8};-\frac{5}{8};-\frac{7}{8}\right)$. **6c.** $(1;-1)$. **6d.** $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$. **6e.** $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. **6f.** $(1;5)$ un $\left(-\frac{3}{2};5\right)$. **7a.** $\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3};\frac{7}{3}\right)$, $\left(\frac{4}{3};\frac{7}{3};\frac{4}{3}\right)$ un $\left(\frac{7}{3};\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)$ ir maksimuma punkti; $(2;2;1)$, $(1;2;2)$ un $(2;1;2)$ ir minimuma punkti. **7b.** $\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$ ir maksimuma punkts. **7c.** $(1;-1)$ ir minimuma punkts. **7d.** $\left(0;-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$ ir minimuma punkts. **7e.** $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$ ir minimuma punkts. **8a.** $(0;1)$ un $(0;-1)$ ir maksimuma punkti; $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$ un $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$ ir minimuma punkti. **8b.** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ un $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ir maksimuma punkti; $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ un $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ir minimuma punkti. **8c.** $\left(\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right)$ ir minimuma punkts, $\left(-\frac{4}{5};-\frac{3}{5}\right)$ ir maksimuma punkts. **8d.** $(2;2;2)$ ir minimuma punkts. **9.** $x = y = z = c$. **10.** $f_{max} = 9$ punktā $(4;5)$. **11.** $f_{min} = 0,5$ punktā $(0,5;0)$. **12.** $f_{min} = 34$ punktā $(2;2)$. **12.** **13.** $f_{min} = 27$ punktā $(5;1)$. **14.** $[252;400]$. **15.** $x_1 = 12\frac{16}{17}$ mln. t., $x_2 = 2\frac{6}{17}$ mln. t. **16.** $f_{min} = 24$ visos segmenta $\{\alpha(2;0)+(1-\alpha)(1;4)\big|0\le\alpha\le1\}$ punktos. **17.** $f_{max} = 1$ punktā $(1;2)$. **18.** $f(x_1;x_2) = c_Ax_1 + c_Bx_2 \longrightarrow max$, $a_{\alpha,A}x_1 + a_{\alpha,B}x_2 \le b_\alpha$, $a_{\alpha,B}x_1 + a_{\beta,B}x_2 \le b_\beta x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$. **19.** $f_{max} = 7$ punktā $(1;2)$. **20.** $f_{min} = 97$ punktā $(15;0;5;40)$. **21a.** $f_{max} = 2$ punktā $(1;0;0)$. **21b.** $f_{max} = 3$ punktā $(1;0;0)$. **21c.** $f_{max} = 3$ punktā $(1;0;0)$. **21d.** $f_{max} = 3$ punktā $(0;1;0)$. **21e.** $f_{max} = 1$ punktā $(1;0;0)$. **21f.** $f_{max} = 1$ visos segmenta $\{\alpha(1;0;0)+(1-\alpha)(0;0;1)\big|0\le\alpha\le1\}$ punktos. **21g.** $f_{max} = 2$ punktā $(1;0;0)$. **21h.** $f_{max} = 3$ punktā $(0;0;1)$. **21i.** $f_{max} = 2$ punktā $(1;0;0)$. **22.** (2;2). **23.** (5;1).

LITERATŪRA

[1] G.S. Beveridge, R.S. Schechter. Optimization: Theory and Practise. - McGraw Hill, 1970. - 775 p.

[2] D.J. Wilde. Optimum Seeking Methods. - Prentice-Hall, Inc.Englewod Cliffs, N.J., 1964. - 202 p.

[3] L. Engelsons. Optimizācijas metodes. 1. d. - R.: LVU, 1985. - 100 lpp.

[4] Л. Шварц. Анализ, т. 1. - "Наука", Москва, 1972. - 824 с.

[5] Васильев Ф.П. Лекции по методам решения экстремальных задач. - МГУ, Москва, 1974. - 374 с.

[6] Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И. Вариационное исчисление. - "Наука", Москва, 1973. - 191 с.

[7] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1. - "Наука", Москва, 1970. - 607 с.

[8] The University of New South Wales. Department of Econometrics. Quantitative Methods. Final Examination. November, 1998.

SATURS