

DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
MATEMĀTISKĀS ANALĪZES KATEDRA

Armands Gricāns
Vjačeslavs Starcevs

**Lebega mērs un integrālis
(individuālie uzdevumi)**

Individuālie uzdevumi
par kursu "Lebega mērs un integrālis"

1. variants

1. Apskatīsim kopas $[0; 1]$ apakškopu E , kas sastāv no visiem tiem skaitļiem, kuri var tikt izteikti 5 skaitīšanas sistēmā, neizmantojot ciparus 1 un 3. Pierādīt, ka kopa E ir mērojama Lebega nozīmē un atrast tās Lebega mēru.

2. Vai funkcija f ir integrējama Rīmaņa nozīmē kopā $[0; 1]$? Vai funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā $[0; 1]$? Aprēķināt funkcijas f integrāli (Rīmaņa vai Lebega) kopā $[0; 1]$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ja } x \in \mathcal{P}, \\ \frac{1}{3^n}, & \text{ja } x \text{ pieder kādam Kantora kopas } \mathcal{P} \\ & \text{blakusintervālam ar garumu } \frac{1}{3^n}. \end{cases}$$

3. Aprēķināt funkcijas f Lebega integrāli kopā $[1; 2]$. Vai funkcija f ir summējama kopā $[1; 2]$?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x-1}}, & \text{ja } x \in [1; 2] \cap \mathbb{I}, \\ x^3, & \text{ja } x \in [1; 2] \cap \mathbb{Q}, \end{cases}$$

kur \mathbb{Q} - visu racionālo skaitļu kopa, bet \mathbb{I} - visu iracionālo skaitļu kopa.

Individuālie uzdevumi
par kursu "Lebega mērs un integrālis"

2. variants

1. Apskatīsim kopas $[0; 1]$ apakškopu E , kas sastāv no visiem tiem skaitļiem, kuri var tikt izteikti 2 skaitīšanas sistēmā tā, ka visās pāra pozīcijās atrodas vieninieki. Pierādīt, ka kopa E ir mērojama Lebega nozīmē un atrast tās Lebega mēru.

2. Vai funkcija f ir integrējama Rīmaņa nozīmē kopā $[0; 1]$? Vai funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā $[0; 1]$? Aprēķināt funkcijas f integrāli (Rīmaņa vai Lebega) kopā $[0; 1]$.

$$f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & \text{ja } x \in [0; \frac{1}{2}] \cap \mathcal{CP}, \\ x^2, & \text{ja } x \in (\frac{1}{2}; 1] \cap \mathcal{CP}, \\ \cos 5x, & \text{ja } x \in \mathcal{P}, \end{cases}$$

kur \mathcal{P} - Kantora kopa, $\mathcal{CP} = [0; 1] \setminus \mathcal{P}$ - Kantora kopas papildkopa līdz kopai $[0; 1]$.

3. Aprēķināt funkcijas f Lebega integrāli kopā $[0; 1]$. Vai funkcija f ir summējama kopā $[0; 1]$?

$$f(x) = \begin{cases} 10, & \text{ja } x \in \mathcal{P}, \\ \frac{1}{\sqrt[5]{x}}, & \text{ja } x \in [0; 1] \setminus \mathcal{P}. \end{cases}$$

Individuālie uzdevumi
par kursu "Lebega mērs un integrālis"

3. variants

1. No nogriežņa $[0; 1]$ izmet vaļēju intervālu $(\frac{3}{8}; \frac{5}{8})$; no pāri palikušajiem nogriežņiem izmet divus vaļējus intervālus ar centriem šo nogriežņu viduspunktos un kopējo garumu $\frac{1}{8}$; no pāri palikušajiem nogriežņiem izmet četrus vaļējus intervālus ar centriem šo nogriežņu viduspunktos un kopējo garumu $\frac{1}{16}$ u.t.t. Ar F apzīmēsim kopu, kas paliek pāri no nogriežņa $[0; 1]$, bezgalīgi turpinot šo konstrukciju. Pierādīt, ka kopa F ir mērojama Lebega nozīmē un atrast tās Lebega mēru.

2. Vai funkcija f ir integrējama Rīmaņa nozīmē kopā $[0; 1]$? Vai funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā $[0; 1]$? Aprēķināt funkcijas f integrāli (Rīmaņa vai Lebega) kopā $[0; 1]$.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{ja } x \in \mathcal{P}, \\ \frac{2}{7^{n-1}}, & \text{ja } x \text{ pieder kādam Kantora kopas } \mathcal{P} \\ & \text{blakusintervālam ar garumu } \frac{1}{3^n}. \end{cases}$$

3. Aprēķināt funkcijas f Lebega integrāli kopā $[4; 5)$. Vai funkcija f ir summējama kopā $[4; 5)$?

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5-x}}.$$

Individuālie uzdevumi
par kursu "Lebega mērs un integrālis"

4. variants

1. Apskatīsim kopas $[0; 1]$ apakškopu E , kas sastāv no visiem tiem skaitļiem, kuru pierakstā 5 skaitīšanas sistēmā pēc komata tiek izmantoti tikai cipari 1, 2, 3 un 4. Pierādīt, ka kopa E ir mērojama Lebega nozīmē un atrast tās Lebega mēru.

2. Vai funkcija f ir integrējama Rīmaņa nozīmē kopā $[0; 1]$? Vai funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā $[0; 1]$? Aprēķināt funkcijas f integrāli (Rīmaņa vai Lebega) kopā $[0; 1]$.

$$f(x) = \begin{cases} 10^x + 1, & \text{ja } x \in [0; \frac{1}{6}) \cap \mathbb{C}\mathcal{P}, \\ 10x + 1, & \text{ja } x \in [\frac{1}{6}; 1] \cap \mathbb{C}\mathcal{P}, \\ 0, & \text{ja } x \in \mathcal{P}, \end{cases}$$

kur \mathcal{P} - Kantora kopa, $\mathbb{C}\mathcal{P} = [0; 1] \setminus \mathcal{P}$ - Kantora kopas papildkopa līdz kopai $[0; 1]$.

3. Aprēķināt funkcijas f Lebega integrāli kopā $(3; 5]$. Vai funkcija f ir summējama kopā $(3; 5]$?

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}}.$$

Individuālie uzdevumi
par kursu "Lebega mērs un integrālis"

5. variants

1. Apskatīsim kopas $[0; 1]$ apakškopu E , kas sastāv no visiem tiem skaitļiem, kuri var tikt izteikti 5 skaitīšanas sistēmā, izmantojot tikai ciparus 0, 2, un 4. Pierādīt, ka kopa E ir mērojama Lebega nozīmē un atrast tās Lebega mēru.

2. Vai funkcija f ir integrējama Rīmaņa nozīmē kopā $[0; 1]$? Vai funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā $[0; 1]$? Aprēķināt funkcijas f integrāli (Rīmaņa vai Lebega) kopā $[0; 1]$.

$$f(x) = \begin{cases} 2^x, & \text{ja } x \in [0; 1] \cap \mathbb{I}, \\ 1, & \text{ja } x \in [0; 1] \cap \mathbb{Q}, \end{cases}$$

kur \mathbb{Q} - visu racionālo skaitļu kopa, bet \mathbb{I} - visu iracionālo skaitļu kopa.

3. Aprēķināt funkcijas f Lebega integrāli kopā $[1; 3]$. Vai funkcija f ir summējama kopā $[1; 3]$?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}, & \text{ja } x \in [1; 3] \cap \mathbb{I}, \\ x, & \text{ja } x \in [1; 3] \cap \mathbb{Q}, \end{cases}$$

kur \mathbb{Q} - visu racionālo skaitļu kopa, bet \mathbb{I} - visu iracionālo skaitļu kopa.

*Individuālie uzdevumi
par kursu "Lebega mērs un integrālis"*

6. variants

1. Pierādīt, ka kopa

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5^n} - \frac{1}{40}; \frac{1}{5^n} + \frac{1}{40} \right)$$

ir mērojama Lebega nozīmē un atrast tās Lebega mēru.

2. Vai funkcija f ir integrējama Rīmaņa nozīmē kopā $[0; 1]$? Vai funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā $[0; 1]$? Aprēķināt funkcijas f integrāli (Rīmaņa vai Lebega) kopā $[0; 1]$.

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{ja } x \in [0; \frac{1}{3}) \cap \mathbb{I}, \\ x^2 + 1, & \text{ja } x \in [\frac{1}{3}; 1] \cap \mathbb{I}, \\ 10, & \text{ja } x \in [0; 1] \cap \mathbb{Q}, \end{cases}$$

kur \mathbb{Q} - visu racionālo skaitļu kopa, bet \mathbb{I} - visu iracionālo skaitļu kopa.

3. Aprēķināt funkcijas f Lebega integrāli kopā $(1; 4]$. Vai funkcija f ir summējama kopā $(1; 4]$?

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Individuālie uzdevumi
par kursu "Lebega mērs un integrālis"

7. variants

1. Apskatīsim kopas $[0; 1]$ apakškopu E , kas sastāv no visiem tiem skaitļiem, kuri var tikt izteikti 7 skaitīšanas sistēmā, neizmantojot ciparu 5. Pierādīt, ka kopa E ir mērojama Lebega nozīmē un atrast tās Lebega mēru.

2. Vai funkcija f ir integrējama Rīmaņa nozīmē kopā $[0; 1]$? Vai funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā $[0; 1]$? Aprēķināt funkcijas f integrāli (Rīmaņa vai Lebega) kopā $[0; 1]$.

$$f(x) = \begin{cases} 10, & \text{ja } x \in [0; \frac{1}{2}) \cap \mathcal{P}, \\ -10, & \text{ja } x \in [\frac{1}{2}; 1] \cap \mathcal{P}, \\ \frac{1}{10^{n-1}}, & \text{ja } x \text{ pieder kādam Kantora kopas } \mathcal{P} \\ & \text{blakusintervālam ar garumu } \frac{1}{3^n}. \end{cases}$$

3. Aprēķināt funkcijas f Lebega integrāli kopā $[0; 1]$. Vai funkcija f ir summējama kopā $[0; 1]$?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{ja } x \in [0; 1] \setminus \mathcal{P}, \\ x^2, & \text{ja } x \in \mathcal{P}, \end{cases}$$

kur \mathcal{P} - Kantora kopa.

Individuālie uzdevumi
par kursu "Lebega mērs un integrālis"

8. variants

1. Apskatīsim kopas $[0; 1]$ apakškopu E , kas sastāv no visiem tiem skaitļiem, kuri var tikt izteikti 10 skaitīšanas sistēmā, neizmantojot ciparu 0 pēc komata (izmantojot ciparu 0 pēc komata). Pierādīt, ka kopa E ir mērojama Lebega nozīmē un atrast tās Lebega mēru.

2. Vai funkcija f ir integrējama Rīmaņa nozīmē kopā $[0; 1]$? Vai funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā $[0; 1]$? Aprēķināt funkcijas f integrāli (Rīmaņa vai Lebega) kopā $[0; 1]$.

$$f(x) = \begin{cases} x \ln(x + 1), & \text{ja } x \in \mathcal{P}, \\ \frac{2}{3^{2n}}, & \text{ja } x \text{ pieder kādam Kantora} \\ & \text{kopas } \mathcal{P} \text{ blakusintervālam} \\ & \text{ar garumu } \frac{1}{3^n}. \end{cases}$$

3. Aprēķināt funkcijas f Lebega integrāli kopā $[2; 3]$. Vai funkcija f ir summējama kopā $[2; 3]$?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x-2}}, & \text{ja } x \in [2; 3] \cap \mathbb{I}, \\ x^4, & \text{ja } x \in [2; 3] \cap \mathbb{Q}, \end{cases}$$

kur \mathbb{Q} - visu racionālo skaitļu kopa, bet \mathbb{I} - visu iracionālo skaitļu kopa.

Individuālie uzdevumi
par kursu "Lebega mērs un integrālis"

9. variants

1. Apskatīsim kopas $[0; 1]$ apakškopu E , kas sastāv no visiem tiem skaitļiem, kuri var tikt izteikti 10 skaitīšanas sistēmā, obligāti izmantojot katru ciparu no 1 līdz 9 ieskaitot. Pierādīt, ka kopa E ir mērojama Lebega nozīmē un atrast tās Lebega mēru.

2. Vai funkcija f ir integrējama Rīmaņa nozīmē kopā $[0; 1]$? Vai funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā $[0; 1]$? Aprēķināt funkcijas f integrāli (Rīmaņa vai Lebega) kopā $[0; 1]$.

$$f(x) = \begin{cases} \sin 3x, & \text{ja } x \in [0; \frac{1}{3}) \cap \mathbb{CP}, \\ x, & \text{ja } x \in [\frac{1}{3}; 1] \cap \mathbb{CP}, \\ \cos 3x, & \text{ja } x \in \mathcal{P}, \end{cases}$$

kur \mathcal{P} - Kantora kopa, $\mathbb{CP} = [0; 1] \setminus \mathcal{P}$ - Kantora kopas papildkopa līdz kopai $[0; 1]$.

3. Aprēķināt funkcijas f Lebega integrāli kopā $[2; 3]$. Vai funkcija f ir summējama kopā $[2; 3]$?

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x + 1), & \text{ja } x \in \mathcal{P}, \\ \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{ja } x \in \mathbb{CP}, \end{cases}$$

kur \mathcal{P} - Kantora kopa, $\mathbb{CP} = [0; 1] \setminus \mathcal{P}$ - Kantora kopas papildkopa līdz kopai $[0; 1]$.

Individuālie uzdevumi
par kursu "Lebega mērs un integrālis"

10. variants

1. Apskatīsim kopas $[0; 1]$ apakškopu E , kas sastāv no visiem tiem skaitļiem, kuri var tikt izteikti 7 skaitīšanas sistēmā, pēc komata neizmantojot ciparus 0 un 5. Pierādīt, ka kopa E ir mērojama Lebega nozīmē un atrast tās Lebega mēru.

2. Vai funkcija f ir integrējama Rīmaņa nozīmē kopā $[0; 1]$? Vai funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā $[0; 1]$? Aprēķināt funkcijas f integrāli (Rīmaņa vai Lebega) kopā $[0; 1]$.

$$f(x) = \begin{cases} 2^x, & \text{ja } x \in \mathcal{P}, \\ \frac{5}{3^{2n-1}}, & \text{ja } x \text{ pieder kādam Kantora kopas } \mathcal{P} \\ & \text{blakusintervālam ar garumu } \frac{1}{3^n}. \end{cases}$$

3. Aprēķināt funkcijas f Lebega integrāli kopā $(-5; 0)$. Vai funkcija f ir summējama kopā $(-5; 0)$?

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5+x}}.$$

Individuālie uzdevumi
par kursu "Lebega mērs un integrālis"

11. variants

1. Apskatīsim kopas $[0; 1]$ apakškopu E , kas sastāv no visiem tiem skaitļiem, kuri var tikt izteikti 2 skaitīšanas sistēmā tā, ka visās nepāra pozīcijās atrodas vieninieki. Pierādīt, ka kopa E ir mērojama Lebega nozīmē un atrast tās Lebega mēru.

2. Vai funkcija f ir integrējama Rīmaņa nozīmē kopā $[0; 1]$? Vai funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā $[0; 1]$? Aprēķināt funkcijas f integrāli (Rīmaņa vai Lebega) kopā $[0; 1]$.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{ja } x \in [0; \frac{5}{6}) \cap \mathbb{C}\mathcal{P}, \\ 2^x, & \text{ja } x \in [\frac{5}{6}; 1] \cap \mathbb{C}\mathcal{P}, \\ 1, & \text{ja } x \in \mathcal{P}, \end{cases}$$

kur \mathcal{P} - Kantora kopa, $\mathbb{C}\mathcal{P} = [0; 1] \setminus \mathcal{P}$ - Kantora kopas papildkopa līdz kopai $[0; 1]$.

3. Aprēķināt funkcijas f Lebega integrāli kopā $(-3; -2]$. Vai funkcija f ir summējama kopā $(-3; -2]$?

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{3+x}}.$$

Individuālie uzdevumi
par kursu "Lebega mērs un integrālis"

12. variants

1. No nogriežņa $[0; 1]$ izmet vaļēju intervālu $(\frac{7}{16}; \frac{9}{16})$; no pāri palikušajiem nogriežņiem izmet divus vaļējus intervālus ar centriem šo nogriežņu viduspunktos un kopējo garumu $\frac{1}{16}$; no pāri palikušajiem nogriežņiem izmet četrus vaļējus intervālus ar centriem šo nogriežņu viduspunktos un kopējo garumu $\frac{1}{32}$ u.t.t. Ar F apzīmēsim kopu, kas paliek pāri no nogriežņa $[0; 1]$, bezgalīgi turpinot šo konstrukciju. Pierādīt, ka kopa F ir mērojama Lebega nozīmē un atrast tās Lebega mēru.

2. Vai funkcija f ir integrējama Rīmaņa nozīmē kopā $[0; 1]$? Vai funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā $[0; 1]$? Aprēķināt funkcijas f integrāli (Rīmaņa vai Lebega) kopā $[0; 1]$.

$$f(x) = \begin{cases} xe^x, & \text{ja } x \in [0; 1] \cap \mathbb{I}, \\ e^x, & \text{ja } x \in [0; 1] \cap \mathbb{Q}, \end{cases}$$

kur \mathbb{Q} - visu racionālo skaitļu kopa, bet \mathbb{I} - visu iracionālo skaitļu kopa.

3. Aprēķināt funkcijas f Lebega integrāli kopā $[-2; -1]$. Vai funkcija f ir summējama kopā $[-2; -1]$?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{x+2}}, & \text{ja } x \in [-2; -1] \cap \mathbb{I}, \\ 2x, & \text{ja } x \in [-2; -1] \cap \mathbb{Q}, \end{cases}$$

kur \mathbb{Q} - visu racionālo skaitļu kopa, bet \mathbb{I} - visu iracionālo skaitļu kopa.

Individuālie uzdevumi
par kursu "Lebega mērs un integrālis"

13. variants

1. Apskatīsim kopas $[0; 1]$ apakškopu E , kas sastāv no visiem tiem skaitļiem, kuri var tikt izteikti 10 skaitīšanas sistēmā, pēc komata neizmantojot ciparus 0 un 9. Pierādīt, ka kopa E ir mērojama Lebega nozīmē un atrast tās Lebega mēru.

2. Vai funkcija f ir integrējama Rīmaņa nozīmē kopā $[0; 1]$? Vai funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā $[0; 1]$? Aprēķināt funkcijas f integrāli (Rīmaņa vai Lebega) kopā $[0; 1]$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{ja } x \in [0; \frac{1}{3}) \cap \mathbb{I}, \\ x^5, & \text{ja } x \in [\frac{1}{3}; 1] \cap \mathbb{I}, \\ 5^x, & \text{ja } x \in [0; 1] \cap \mathbb{Q}, \end{cases}$$

kur \mathbb{Q} - visu racionālo skaitļu kopa, bet \mathbb{I} - visu iracionālo skaitļu kopa.

3. Aprēķināt funkcijas f Lebega integrāli kopā $[1; 2)$. Vai funkcija f ir summējama kopā $[1; 2)$?

$$f(x) = \frac{3}{(x-2)^4}.$$

Individuālie uzdevumi
par kursu "Lebega mērs un integrālis"

14. variants

1. Apskatīsim kopas $[0; 1]$ apakškopu E , kas sastāv no visiem tiem skaitļiem, kuri var tikt izteikti 5 skaitīšanas sistēmā, pēc komata neizmantojot ciparus 0, 2 un 4. Pierādīt, ka kopa E ir mērojama Lebega nozīmē un atrast tās Lebega mēru.

2. Vai funkcija f ir integrējama Rīmaņa nozīmē kopā $[0; 1]$? Vai funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā $[0; 1]$? Aprēķināt funkcijas f integrāli (Rīmaņa vai Lebega) kopā $[0; 1]$.

$$f(x) = \begin{cases} 25 \sin \pi x, & \text{ja } x \in [0; \frac{5}{6}) \cap \mathcal{P}, \\ 25 \cos \pi x, & \text{ja } x \in [\frac{5}{6}; 1] \cap \mathcal{P}, \\ 9^{-n}, & \text{ja } x \text{ pieder kādam Kantora kopas } \mathcal{P} \\ & \text{blakusintervālam ar garumu } \frac{1}{3^n}. \end{cases}$$

3. Aprēķināt funkcijas f Lebega integrāli kopā $[0; 1]$. Vai funkcija f ir summējama kopā $[0; 1]$?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, & \text{ja } x \in [0; 1] \setminus \mathcal{P}, \\ x^3, & \text{ja } x \in \mathcal{P}, \end{cases}$$

kur \mathcal{P} - Kantora kopa.

*Individuālie uzdevumi
par kursu "Lebega mērs un integrālis"*

15. variants

1. Pierādīt, ka kopa

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} - \frac{1}{20}; \frac{1}{3^n} + \frac{1}{20} \right)$$

ir mērojama Lebega nozīmē un atrast tās Lebega mēru.

2. Vai funkcija f ir integrējama Rīmaņa nozīmē kopā $[0; 1]$? Vai funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā $[0; 1]$? Aprēķināt funkcijas f integrāli (Rīmaņa vai Lebega) kopā $[0; 1]$.

$$f(x) = \begin{cases} \sin 5x, & \text{ja } x \in [0; \frac{1}{4}] \cap \mathcal{CP}, \\ x^3, & \text{ja } x \in (\frac{1}{4}; 1] \cap \mathcal{CP}, \\ \cos 5x, & \text{ja } x \in \mathcal{P}, \end{cases}$$

kur \mathcal{P} - Kantora kopa, $\mathcal{CP} = [0; 1] \setminus \mathcal{P}$ - Kantora kopas papildkopa līdz kopai $[0; 1]$.

3. Aprēķināt funkcijas f Lebega integrāli kopā $[0; 1]$. Vai funkcija f ir summējama kopā $[0; 1]$?

$$f(x) = \begin{cases} 10x^2, & \text{ja } x \in \mathcal{P}, \\ \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{ja } x \in [0; 1] \setminus \mathcal{P}, \end{cases}$$

kur \mathcal{P} - Kantora kopa.

Individuālie uzdevumi
par kursu "Lebega mērs un integrālis"

16. variants

1. Apskatīsim kopas $[0; 1]$ apakškopu E , kas sastāv no visiem tiem skaitļiem, kuri var tikt izteikti 2 skaitīšanas sistēmā tā, ka visās nepāra pozīcijās atrodas nulles. Pierādīt, ka kopa E ir mērojama Lebega nozīmē un atrast tās Lebega mēru.

2. Vai funkcija f ir integrējama Rīmaņa nozīmē kopā $[0; 1]$? Vai funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā $[0; 1]$? Aprēķināt funkcijas f integrāli (Rīmaņa vai Lebega) kopā $[0; 1]$.

$$f(x) = \begin{cases} \lg x, & \text{ja } x \in \mathcal{P}, \\ \frac{2}{11^{n-1}}, & \text{ja } x \text{ pieder kādam Kantora kopas } \mathcal{P} \\ & \text{blakusintervālam ar garumu } \frac{1}{3^n}. \end{cases}$$

3. Aprēķināt funkcijas f Lebega integrāli kopā $[6; 7]$. Vai funkcija f ir summējama kopā $[6; 7]$?

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{7-x}}.$$

Individuālie uzdevumi
par kursu "Lebega mērs un integrālis"

17. variants

1. Apskatīsim kopas $[0; 1]$ apakškopu E , kas sastāv no visiem tiem skaitļiem, kuri var tikt izteikti 5 skaitīšanas sistēmā, pēc komata izmantojot tikai ciparus 1 un 3. Pierādīt, ka kopa E ir mērojama Lebega nozīmē un atrast tās Lebega mēru.

2. Vai funkcija f ir integrējama Rīmaņa nozīmē kopā $[0; 1]$? Vai funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā $[0; 1]$? Aprēķināt funkcijas f integrāli (Rīmaņa vai Lebega) kopā $[0; 1]$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ja } x \in \mathcal{P}, \\ \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}, & \text{ja } x \text{ pieder Kantora kopas } \mathcal{P} \\ & \text{blakusintervālam } (\alpha; \beta). \end{cases}$$

3. Aprēķināt funkcijas f Lebega integrāli kopā $(0; 5]$. Vai funkcija f ir summējama kopā $(0; 5]$?

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

Individuālie uzdevumi
par kursu "Lebega mērs un integrālis"

18. variants

1. Apskatīsim kopas $[0; 1]$ apakškopu E , kas sastāv no visiem tiem skaitļiem, kuri var tikt izteikti 10 skaitīšanas sistēmā, neizmantojot ciparu 9 pēc komata (izmantojot ciparu 9 pēc komata). Pierādīt, ka kopa E ir mērojama Lebega nozīmē un atrast tās Lebega mēru.

2. Vai funkcija f ir integrējama Rīmaņa nozīmē kopā $[0; 1]$? Vai funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā $[0; 1]$? Aprēķināt funkcijas f integrāli (Rīmaņa vai Lebega) kopā $[0; 1]$.

$$f(x) = \begin{cases} 10^x, & \text{ja } x \in \mathcal{P}, \\ (x - \alpha)^3, & \text{ja } x \text{ pieder Kantora kopas } \mathcal{P} \\ & \text{blakusintervālam } (\alpha; \beta). \end{cases}$$

3. Aprēķināt funkcijas f Lebega integrāli kopā $(0; 2]$. Vai funkcija f ir summējama kopā $(0; 2]$?

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}.$$

*Individuālie uzdevumi
par kursu "Lebega mērs un integrālis"*

19. variants

1. Apskatīsim kopas $[0; 1]$ apakškopu E , kas sastāv no visiem tiem skaitļiem, kuri var tikt izteikti 2 skaitīšanas sistēmā tā, ka visās pāra pozīcijās atrodas nulles. Pierādīt, ka kopa E ir mērojama Lebega nozīmē un atrast tās Lebega mēru.

2. Vai funkcija f ir integrējama Rīmaņa nozīmē kopā $[0; 1]$? Vai funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā $[0; 1]$? Aprēķināt funkcijas f integrāli (Rīmaņa vai Lebega) kopā $[0; 1]$.

Funkcija f ir definēta šādi: patvaļīgā Kantora kopas \mathcal{P} punktā x funkcijas f vērtība $f(x) = \sin x$, savukārt funkcijas f grafiks Kantora kopas patvaļīgā blakusintervālā ir vienādsānu trijstūra sānu malas, pie tam trijstūra pamats sakrīt ar attiecīgo blakusintervālu, bet trijstūra augstums ir vienāds ar pamata pusi.

3. Aprēķināt funkcijas f Lebega integrāli kopā $(-3; 0]$. Vai funkcija f ir summējama kopā $(-3; 0]$?

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x+3}}.$$

Individuālie uzdevumi
par kursu "Lebega mērs un integrālis"

20. variants

1. Pierādīt, ka kopa

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^{2n}} - \frac{1}{30}; \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{30} \right)$$

ir mērojama Lebega nozīmē un atrast tās Lebega mēru.

2. Vai funkcija f ir integrējama Rīmaņa nozīmē kopā $[0; 1]$? Vai funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā $[0; 1]$? Aprēķināt funkcijas f integrāli (Rīmaņa vai Lebega) kopā $[0; 1]$.

Funkcija f ir definēta šādi: Kantora kopas punktus funkcijas f vērtība ir vienāda ar 0, Kantora kopas blakusintervālu viduspunktos funkcijas f vērtība ir vienāda ar $\frac{1}{2^n}$, bet uz nogriežņiem $[a_n; \frac{a_n+b_n}{2}]$ un $[\frac{a_n+b_n}{2}; b_n]$ funkcija f ir lineāra, kur Kantora kopas blakusintervāli $(a_n; b_n)$ ir sanumurēti šādi:

$$(a_1; b_1) = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right), (a_2; b_2) = \left(\frac{1}{9}; \frac{2}{9} \right),$$
$$(a_3; b_3) = \left(\frac{7}{9}; \frac{8}{9} \right), (a_4; b_4) = \left(\frac{1}{27}; \frac{2}{27} \right), \dots$$

3. Aprēķināt funkcijas f Lebega integrāli kopā $(1; 3]$. Vai funkcija f ir summējama kopā $(1; 3]$?

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x-1}}.$$