DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE

MATEMĀTISKĀS ANALĪZES KATEDRA

Armands Gricāns
Vjačeslavs Starcevs

Lebega mērs un integrālis (uzdevumi ar atrisinājumiem)

2002

ANOTĀCIJA

Apskatītie uzdevumu risināšanas paraugi varētu būt noderīgi studentiem un maģistrantiem, apgūstot kursu “Lebega mērs un integrālis”.

1. uzdevums

Apskatīsim kopas $[0;1]$ *apakškopu* E*, kas sastāv no visiem tiem skaitļiem, kuri var tikt izteikti* 10 *skaitīšanas sistēmā, neizmantojot ciparu* 7*. Pierādīt, ka kopa* E *ir mērojama Lebega nozīmē un atrast tās Lebega mēru.*

► Kopu E var konstruēt šādi. Nogriezni $[0;1]$ dalām 10 vienādās daļās un izmetam vaļēju intervālu $(0,7;0,8)$. Katru no pāri palikušajiem nogriežņa $[0;1]$ apakšnogriežņiem

$$[0;0,1],\ [0,1;0,2],\ [0,2;0,3],\ [0,3;0,4],\ [0,4;0,5],\ [0,5;0,6],\ [0,6;0,7],\ [0,8;0,9],\ [0,9;1],$$

kurus sauksim par *pirmā ranga intervāliem*, atkal dalām 10 vienādās daļās un izmetam vaļējus intervālus

$$(0,07;0,08),\ (0,17;0,18),\ (0,27;0,28),\ (0,37;0,38),\ (0,47;0,48),$$
$$(0,57;0,58),\ (0,67;0,68),\ (0,87;0,88),\ (0,97;0,98).$$

Ar katru no pāri palikušajiem *otrā ranga intervāliem*

$$[0;0,01],\ [0,01;0,02],\ \dots\ ,\ [0,98;0,99],\ [0,99;1]$$

rīkojamies līdzīgi utt. Pāri palikušā nogriežņa $[0;1]$ apakškopa ir vienāda ar apskatāmo kopu E, jo šai apakškopai piederošo skaitļu pieraksts decimāldaļskaitlī (t.i., 10 skaitīšanas sistēmā) nesaturēs ciparu 7. Kopas E papildkopa $\complement E = [0;1]\setminus E$ ir vienāda ar visu izmesto vaļēju intervālu apvienojumu. Tātad kopu $\complement E$ veido:

1 vaļējs intervāls ar garumu $0,1$,

9 vaļēji intervāli, katra no kuriem garums ir $0,01$,

9^2 vaļēji intervāli, katra no kuriem garums ir $0,001$, utt.

Tā kā vaļēju kopu apvienojums ir vaļēja kopa, tad $\complement E$ - vaļēja kopa, un līdz ar to $\complement E$ - mērojama Lebega nozīmē kopa. Tāpēc kopas $\complement E$ papildkopa $\complement\complement E = E$ - mērojama Lebega nozīmē kopa.

Tā kā izmestie intervāli ir kopas $\complement E$ veidotājintervāli, tad kopas $\complement E$ Lebega mērs ir vienāds ar šo izmesto intervālu summu:

$$\mathrm{m}(\complement E) = \frac{1}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9^2}{10^3} + \dots + \frac{9^{n-1}}{10^n} + \dots = 1.$$

Tā kā E - mērojama Lebega nozīmē kopa, tad

$$\mathrm{m}(E) = 1 - \mathrm{m}(\complement E) = 1 - 1 = 0. \blacktriangleleft$$

2. uzdevums

Apskatīsim funkciju f kopā $[0;1]$, ka

$$\forall x \in [0;1]: \ f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ja } x \in \mathcal{P}, \\ \frac{1}{9^n}, & \text{ja } x \text{ pieder kādam Kantora kopas } \mathcal{P} \\ & \text{blakusintervālam ar garumu } \frac{1}{3^n}. \end{cases}$$

Vai funkcija f ir integrējama Rīmaņa nozīmē kopā $[0;1]$? Vai funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā $[0;1]$? Aprēķināt funkcijas f integrāli (Rīmaņa vai Lebega) kopā $[0;1]$.

► Funkcija f ir nepārtraukta gandrīz visur nogrieznī $[0;1]$, jo funkcija f ir nepārtraukta katrā Kantora kopas $\mathcal{P}$ blakusintervālā (jo tā ir konstanta katrā šādā intervālā), bet Kantora kopa $\mathcal{P}$ - nulles mēra kopa.

Bez tam funkcija f ir ierobežota nogrieznī $[0;1]$, jo

$$\forall x \in [0;1]: \ 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{9}.$$

Saskaņā ar integrējamības Rīmaņa nozīmē Lebega kritēriju *funkcija f ir integrējama Rīmaņa nozīmē nogrieznī* $[0;1]$. Tā kā funkcija f ir integrējama Rīmaņa nozīmē nogrieznī $[0;1]$, tad *funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē nogrieznī* $[0;1]$, pie tam funkcijas f Lebega un Rīmaņa integrāļi nogrieznī $[0;1]$ ir vienādi:

$$\int\limits_{[0;1]} f(x)dx = \int\limits_0^1 f(x)dx.$$

Atradīsim funkcijas f Lebega integrāli nogrieznī $[0;1]$.

Tā kā nogrieznis $[0;1]$ ir vienāds ar savu mērojamu apakškopu $\mathcal{P}$ un $[0;1] \setminus \mathcal{P}$, kurām nav kopīgu punktu, apvienojumu, bet funkcija f ir mērojama nogrieznī $[0;1]$ (jo tā ir gandrīz visur nepārtraukta šajā nogrieznī), tad no Lebega integrāļa sanumurējamās aditivitātes izriet

$$\int\limits_{[0;1]} f(x)dx = \int\limits_{\mathcal{P}} f(x)dx + \int\limits_{[0;1]\setminus\mathcal{P}} f(x)dx.$$

Tā kā funkcija f ir ierobežota nulles mēra kopā $\mathcal{P}$ (jo tā ir ierobežota kopā $[0;1] \supset \mathcal{P}$), tad

$$\int\limits_{\mathcal{P}} f(x)dx = 0.$$

Tātad

$$\int\limits_{[0;1]} f(x)dx = \int\limits_{[0;1]\setminus\mathcal{P}} f(x)dx.$$

Kantora kopas $\mathcal{P}$ papilkopa $[0;1] \setminus \mathcal{P}$ ir mērojama Lebega nozīmē kopa, jo tā ir vaļēja kopa, bez tam tā ir vienāda ar savu veidotājintervālu (- Kantora kopas $\mathcal{P}$ blakusintervālu), kuri savstarpēji nešķeļas un ir, acīmredzot, mērojamas kopas, apvienojumu:

$$[0;1] \setminus \mathcal{P} = \bigcup_i (\alpha_i;\beta_i), \quad (\alpha_i;\beta_i) \cap (\alpha_j;\beta_j) = \emptyset \ \ (i \neq j; \ i,j = 1,2,\ldots)\ ,$$

kur $(\alpha_i;\beta_i)$ - patvaļīgs Kantora kopas $\mathcal{P}$ blakusintervāls. Tā kā funkcija f ir mērojama kopā $[0;1]\setminus\mathcal{P}$ (jo tā ir mērojama nogriezni $[0;1]\supset[0;1]\setminus\mathcal{P}$), tad no Lebega integrāļa sanumurējamās aditivitātes izriet

$$\int\limits_{[0;1]\setminus\mathcal{P}} f(x)dx = \sum_{i=1}^{\infty}\int\limits_{(\alpha_i;\beta_i)} f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\int\limits_{\substack{(\alpha_n;\beta_n)\\ \beta_n-\alpha_n=\frac{1}{3^n}}} \frac{1}{9^n}\,dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\cdot\frac{1}{3^{3n}} = \frac{\frac{1}{27}}{1-\frac{2}{27}} = \frac{1}{25}.$$

Tādējādi

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_{[0;1]} f(x)dx = \frac{1}{25}. \blacktriangleleft$$

3. uzdevums

Apskatīsim funkciju f kopā $[1;4]$, ka

$$\forall x \in [1;4]: \ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x-1}}, & ja \quad x \in [1;4] \cap \mathbb{I}, \\ x^5, & ja \quad x \in [1;4] \cap \mathbb{Q}, \end{cases}$$

kur $\mathbb{Q}$ - visu racionālo skaitļu kopa, bet $\mathbb{I}$ - visu iracionālo skaitļu kopa. Aprēķināt funkcijas f Lebega integrāli kopā $[1;4]$. Vai funkcija f ir summējama kopā $[1;4]$?

▶ Apskatīsim funkciju g nogriezn̄ī $[1;4]$, ka

$$\forall x \in [1;4]: \ g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x-1}}, & \text{ja} \quad x \in (1;4], \\ 1, & \text{ja} \quad x = 1. \end{cases}$$

Atzīmēsim, ka funkcijas f un g ir nenegatīvas nogriezn̄ī $[1;4]$, pie tam $f \overset{[1;4]}{\sim} g$, jo $E[f \neq g] = (1;4] \cap \mathbb{Q}$ - nulles mēra kopa.

Tā kā funkcija g ir nepārtraukta intervālā $(1;4]$, tad tā ir gandrīz nepārtraukta nogriezn̄ī $[1;4]$ un līdz ar to mērojama šajā nogriezn̄ī. Tā kā funkcijas f un g ir ekvivalentas nogriezn̄ī $[1;4]$, tad funkcija f ir mērojama nogriezn̄ī $[1;4]$, pie tam

$$\int\limits_{[1;4]} f(x)dx = \int\limits_{[1;4]} g(x)dx.$$

Saskaņā ar definīciju funkcijas g Lebega integrālis nogriezn̄ī $[1;4]$:

$$\int\limits_{[1;4]} g(x)dx = \lim_{t\to+\infty} \int\limits_{[1;4]} [g]_t(x)dx,$$

kur

$$\forall x \in E = [1;4]: \ [g]_t(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x-1}}, & \text{ja} \quad x \in E[g \leq t], \\ t, & \text{ja} \quad x \in E[g > t], \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x-1}}, & \text{ja} \quad \frac{1}{\sqrt{x-1}} \leq t \text{ un } 1 \leq x \leq 4, \\ t, & \text{ja} \quad \frac{1}{\sqrt{x-1}} > t \text{ un } 1 \leq x \leq 4, \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x-1}}, & \text{ja} \quad 1 + \frac{1}{t^2} \leq x \leq 4, \\ t, & \text{ja} \quad 1 \leq x < 1 + \frac{1}{t^2}; \end{cases} \qquad (t > 0).$$

Tā kā

$$\int\limits_{[1;4]} [g]_t(x)dx = \int\limits_{\left[1+\frac{1}{t^2};4\right]} \frac{dx}{\sqrt{x-1}} + \int\limits_{\left[1;1+\frac{1}{t^2}\right)} tdx = \int\limits_{1+\frac{1}{t^2}}^{4} (x-1)^{-\frac{1}{2}} d(x-1) + \int\limits_{1}^{1+\frac{1}{t^2}} tdx =$$
$$= 2(x-1)^{-\frac{1}{2}}\Big|_{1+\frac{1}{t^2}}^{1} + tx\Big|_{1}^{1+\frac{1}{t^2}} = 2\sqrt{3} - \frac{2}{t} + \frac{1}{t} = 2\sqrt{3} - \frac{1}{t},$$

tad

$$\int\limits_{[1;4]} f(x)dx = \int\limits_{[1;4]} g(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\left(2\sqrt{3} - \frac{1}{t}\right) = 2\sqrt{3} < +\infty.$$

Tātad funkcija f ir summējama nogriezn̄ī $[1;4]$, pie tās Lebega integrālis šajā nogriezn̄ī ir vienāds ar $2\sqrt{3}$.◀

4. uzdevums

Apskatīsim funkciju f kopā $E = [1; +\infty)$, ka

$$\forall x \in E: \ f(x) = \frac{2^{1-x}}{[x]},$$

kur $[x]$ reāla skaitļa x veselā daļa. Aprēķināt funkcijas f Lebega integrāli kopā E. Vai funkcija f ir summējama kopā E?

► Vispirms atzīmēsim, ka funkcija f ir nenegatīva un mērojama kopā E, kura ir vienāda ar savu savstarpēji nešķeļošos mērojamu apakškopu $[n; n+1)$ $(n \in \mathbb{N})$ apvienojumu, tad, ņemot vērā nenegatīvas mērojamas funkcijas Lebega integrāļa sanumurējamo aditivitāti, iegūsim

$$\int\limits_E f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{[n;n+1)} f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{[n;n+1)} \frac{2^{1-x}}{[x]} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{[n;n+1)} \frac{2^{1-x}}{n} dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \int\limits_{[n;n+1)} 2^{-x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \int\limits_{n}^{n+1} 2^{-x} dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \cdot \frac{2^{-x}}{\ln 2}\Big|_n^{n+1} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n \ln 2} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n 2^n \ln 2} \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n} = 1,$$

jo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n} = -\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \ln 2.$$

Tātad funkcija f ir summējama kopā $E = [1; +\infty)$.◄

5. uzdevums

Apskatīsim funkciju f kopā $E = [2; +\infty)$, ka

$$\forall x \in E: \ f(x) = \ln \cos \frac{\pi}{2x}.$$

Vai funkcija f ir summējama kopā E?

▶ Tā kā

1. funkcija $f(x) = \ln \cos \frac{\pi}{2x}$ ir nepārtraukta intervālā E,
2. funkcijas $\ln \cos \frac{\pi}{2x}$ un $-\frac{\pi^2}{8x^2}$ ir ekvivalentas bezgalīgi mazas funkcijas, kad $x \to +\infty$,
3. neīstais integrālis

$$\int_2^{+\infty} \left(-\frac{\pi^2}{8x^2} \right) dx$$

konverğē,

tad neīstais integrālis

$$\int_2^{+\infty} \ln \cos \frac{\pi}{2x} dx \tag{1}$$

arī konverğē. Tā kā funkcija $f(x) = \ln \cos \frac{\pi}{2x}$ ir negatīva intervālā E, tad neīstais integrālis (1) konverğē absolūti. Tāpēc funkcija $f(x) = \ln \cos \frac{\pi}{2x}$ ir summējama intervālā E.◀

6. uzdevums

Apskatīsim funkciju f kopā $E = [1; +\infty)$, ka

$$\forall x \in E: \; f(x) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & ja \quad x \in [2k; 2k+1), \\ -\frac{1}{k^2}, & ja \quad x \in [2k-1; 2k), \end{cases} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Pierādīt, ka funkcijas f Lebega integrālis kopā E ir definēts, taču funkcija f nav summējama kopā E.

► Tā kā

$$\forall x \in E: \; f^+(x) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & \text{ja} \quad x \in [2k; 2k+1), \\ 0, & \text{ja} \quad x \in [2k-1; 2k), \end{cases} \quad (k \in \mathbb{N});$$

$$\forall x \in E: \; f^-(x) = \begin{cases} 0, & \text{ja} \quad x \in [2k; 2k+1), \\ \frac{1}{k^2}, & \text{ja} \quad x \in [2k-1; 2k), \end{cases} \quad (k \in \mathbb{N}),$$

tad

$$\int\limits_{[1;+\infty)} f^+(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty, \qquad \int\limits_{[1;+\infty)} f^-(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty.$$

Tātad

$$\int\limits_{[1;+\infty)} f(x)dx = \int\limits_{[1;+\infty)} f^+(x)dx - \int\limits_{[1;+\infty)} f^-(x)dx = +\infty, \tag{1}$$

t.i., integrālis $\int\limits_{[1;+\infty)} f(x)dx$ ir definēts.

No (1) izriet, ka funkcija f nav summējama kopā E.◄

7. uzdevums

Apskatīsim funkciju f kopā $E = [1; +\infty)$, ka

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{k^2}, & ja \quad x \in [2k; 2k+1), \\ -\frac{1}{k^2}, & ja \quad x \in [2k-1; 2k), \end{cases} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Pierādīt, ka funkcija f ir summējama kopā E? Vai neīstais integrālis $\int\limits_1^\infty f(x)dx$ konverģē?

► Funkcija

$$|f|(x) = \frac{1}{k^2} \quad (x \in E)$$

ir pozitīva mērojama funkcija kopā E. Tā kā kopu E var izteikt kā savu savstarpēji nešķeļošos mērojamu apakškopu

$$[2k-1; 2k+1) \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

apvienojumu, tad no nenegatīvu summējamu funkciju sanumurējamās aditivitātes izriet, ka funkcija $|f|$ ir summējama katrā kopā (1), pie tam ir spēkā vienādība

$$\int\limits_{[1;+\infty)} |f(x)|dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{[2k-1;2k+1)} |f(x)|dx = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty.$$

Tātad funkcija $|f|$ ir summējama kopā E, no kurienes izriet, ka arī funkcija f ir summējama kopā E.

Tā kā funkcija $|f|$ ir summējama kopā E, tad neīstais integrālis $\int\limits_1^\infty |f(x)|dx$ konverģē un

$$\int\limits_1^\infty |f(x)|dx = \int\limits_{[1;+\infty)} |f(x)|dx.$$

Tātad neīstais integrālis $\int\limits_1^\infty f(x)dx$ konverģē.◄

8. uzdevums

Apskatīsim funkciju f kopā $E=[1;+\infty)$, ka

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{k}, & \text{ja} \quad x\in[2k;2k+1), \\ -\frac{1}{k}, & \text{ja} \quad x\in[2k-1;2k), \end{cases} \quad (k\in\mathbb{N}).$$

Pierādīt:

- *funkcijas f Lebega integrālis kopā E nav definēts;*
- *funkcija f nav summējama kopā E;*
- *neīstais integrālis $\int\limits_1^{\infty}|f(x)|dx$ diverğē;*
- *neīstais integrālis $\int\limits_1^{\infty}f(x)dx$ konverğē.*

▶ Tā kā

$$\forall x\in E:\ f^+(x)=\begin{cases} \frac{1}{k}, & \text{ja} \quad x\in[2k;2k+1), \\ 0, & \text{ja} \quad x\in[2k-1;2k), \end{cases} \quad (k\in\mathbb{N});$$

$$\forall x\in E:\ f^-(x)=\begin{cases} 0, & \text{ja} \quad x\in[2k;2k+1), \\ \frac{1}{k}, & \text{ja} \quad x\in[2k-1;2k), \end{cases} \quad (k\in\mathbb{N}),$$

tad

$$\int\limits_{[1;+\infty)} f^+(x)dx=\int\limits_{[1;+\infty)} f^-(x)dx=+\infty.$$

Tātad funkcijas f Lebega integrālis

$$\int\limits_{[1;+\infty)} f(x)dx=\int\limits_{[1;+\infty)} f^+(x)dx-\int\limits_{[1;+\infty)} f^-(x)dx$$

nav definēts, no kurienes izriet, ka funkcija f nav summējama kopā E. Tāpēc funkcija $|f|$ nav summējama kopā E un līdz ar to neīstais integrālis $\int\limits_{[1;+\infty)}|f(x)|dx$ diverğē.

Pierādīsim, ka neīstais integrālis $\int\limits_{[1;+\infty)}f(x)dx$ konverğē, t.i., eksistē galīga robeža

$$\lim_{B\to+\infty}\int\limits_1^B f(x)dx. \tag{1}$$

Apskatīsim patvaļīgu $\varepsilon>0$. Atradīsim tādu $k_0\in\mathbb{N}$, ka

$$\frac{1}{k_0}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Pieņemsim, ka B' un B'' ir patvaļīgi reāli skaitļi, ka $B', B'' > 2k_0 - 1$ un $B'' \geq B'$. Tad eksistē vislielākais $k' \in \mathbb{N}$, ka $2k' - 1 \leq B'$, un vismazākais $k'' \in \mathbb{N}$, ka $2k'' + 1 > B''$. Acīmredzot, $k', k'' > k_0$. Atrodam:

$$\left| \int\limits_1^{B''} f(x)dx - \int\limits_1^{B'} f(x)dx \right| \leq \left| \int\limits_{B'}^{B''} f(x)dx \right| = \left| \int\limits_{B'}^{2k'+1} f(x)dx + \int\limits_{2k''-1}^{B''} f(x)dx \right| < \frac{1}{k'} + \frac{1}{k''} \leq \frac{2}{k_0} < \varepsilon.$$

Tātad jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē $k_0 \in \mathbb{N}$, ka visiem $B', B'' > 2k_0 - 1$ ir spēkā nevienādība

$$\left| \int\limits_1^{B''} f(x)dx - \int\limits_1^{B'} f(x)dx \right| < \varepsilon,$$

citiem vārdiem sakot, izpildās galīgas robežas (1) eksistences kritērijs. Tādējādi eksistē galīga robeža (1), t.i., neīstais integrālis $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ konverģē.◀

SATURS