DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE

MATEMĀTIKAS KATEDRA

Armands Gricāns
Vjačeslavs Starcevs

LEBEGA MĒRS UN INTEGRĀLIS

2002-2004

ANOTĀCIJA

Mācību līdzeklī ir apskatīts Lebega mērs uz skaitļu taisnes, kā arī viena reālā mainīgā mērojamas funkcijas (ierobežotas vai neierobežotas) Lebega integrālis galīga vai bezgalīga mēra kopā. Materiāla izklāsts tiek ilustrēts ar piemēriem un zīmējumiem, bet iekļautie uzdevumi sniedz studējošajiem materiālu patstāvīgajam darbam.

Autori ir apkopojuši lekciju un semināru materiālus, kā arī gūto pieredzi, vadot bakalaura kursu "Lebega mērs un integrālis". Mācību līdzeklis ir paredzēts studentiem un maģistrantiem, to var izmantot arī pašmācībai.

IEVADS

Lebega[1] integrāļa jēdziens vispārina noteiktā jeb Rīmaņa[2] integrāļa jēdzienu. Rīmaņa integrāļa konstrukcija ir pielietojama tikai tādām funkcijām, kurām nav "pārāk daudz" pārtraukuma punktu. Tāpēc pat tādai pēc uzbūves vienkāršai funkcijai kā Dirihlē[3] funkcijai Rīmaņa integrālis neeksistē, jo Dirihlē funkcijai ir "pārāk daudz" pārtraukuma punktu - tā ir visur pārtraukta (atgādināsim, ka Dirihlē funkcija pieņem vērtību 1 racionālajos punktos un vērtību 0 visos pārējos apskatāmās kopas $E \subset \mathbb{R}$ punktos). Lebega integrāļa konstrukcijas galvenā ideja ir tā, ka, atšķirībā no Rīmaņa integrāļa, sastādot funkcijas $y = f(x)$ integrālsummas, argumenti x tiek grupēti nevis pēc to tuvības uz x ass, bet gan pēc funkcijas vērtību tuvības šajos punktos uz y ass. Šādas pieejas rezultātā iegūst integrējamo Lebega nozīmē funkciju klasi, kura ir būtiski plašāka par integrējamo Rīmaņa nozīmē funkciju klasi. Piemēram, Dirihlē funkcija jau ir integrējama Lebega nozīmē. Var minēt arī citus faktus, kuri liecina par Lebega integrāļa izmantošanas priekšrocībām dažādu uzdevumu risināšanā. Lebega integrālis ir tas rīks, bez kura nav iedomājama mūsdienu varbūtību teorija, matemātiskās fizikas metodes un citas zinātņu nozares.

Dotajā mācību līdzeklī tiek apskatīta viena reālā mainīgā reālas funkcijas Lebega integrāļa teorija. Mācību līdzeklis varētu būt noderīgs studentiem un maģistrantiem, apgūstot kursu "Lebega mērs un integrālis". Lielākā daļa mācību līdzeklī apskatīto jautājumu ir izklāstīti ļoti detalizēti, tāpēc autori cer, ka dotais mācību līdzeklis būs noderīgs arī pašmācībai. Šādai pieejai ir arī objektīvs pamats, jo daudzi studējošie ir spiesti paralēli mācībām strādāt, kas ievērojami apgrūtina lekciju un semināru apmeklēšanu. Tāpēc nodarbībās apskatāmo jautājumu detalizēts izklāsts, cerams, atvieglos studējošo "dzīvi" saistībā ar Lebega integrāļa teorijas studijām. Jāatzīmē, ka mācību līdzeklī ietvertais materiāls ir pārāk plašs, lai to paspētu vienlīdz detalizēti izklāstīt viena semestra kursā, piemēram, 64 stundu apjomā. Taču šeit docētājam paveras plašas iespējas izlemt, kurus jautājumus un kādā apjomā aplūkot nodarbībās vai studējošo patstāvīgā darba ietvaros.

Lebega integrāļa teoriju var izklāstīt dažādās vispārīguma pakāpēs, sākot ar viena reāla mainīgā mērojamu funkciju gadījumu, kurš tiek aplūkots dotajā mācību līdzeklī (neizmantojot abstrakto Lebega mēra un integrāļa teoriju), un beidzot ar telpās ar mēru definētām funkcijām, kuras ir mērojamas attiecībā pret attiecīgo σ-algebru. Autori neanalizē, kāds

[1] A. Lebegs (*Henri Léon Lebesgue*, 1875-1941) - franču matemātiķis, viens no mūsdienu funkciju teorijas pamatlicējiem.

[2] B. Rīmanis (*Georg Friedrich Bernhard Riemann*, 1826-1866) - vācu matemātiķis, devis ievērojamu ieguldījumu integrāļa teorijā, kā arī ģeometrijā un skaitļu teorijā.

[3] L. Dirihlē (*Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet*, 1805-1859) - vācu matemātiķis, daudzu nozīmīgu rezultātu autors skaitļu teorijā un matemātiskajā analīzē.

izklāsta vispārīguma līmenis ir vispiemērotākais pirmo reizi iepazīstoties ar Lebega integrāļa jēdzienu. Tomēr autori cer, ka dotais mācību līdzeklis atradīs savu vietu integrāļa teorijai veltītajā literatūras klāstā, kurš latviešu valodā, diemžēl, nav pārāk plaši pārstāvēts. Šeit minēsim latviešu valodā tulkoto S. Nikoļska grāmatu [7, 2. daļa], kurā tiek apskatīts vairāku reālo mainīgo funkcijas Lebega integrālis, kā arī I. Kārkliņa mācību līdzekļus [3] un [4], pirmajā no kuriem tiek apskatīta vispārīgā integrāļa teorija, bet otrais ir veltīts dažādiem vairāku reālo mainīgo funkcijas Lebega integrāļa teorijas aspektiem. Varētu minēt krievu valodā izdotās mācību grāmatas [14], [17] un [23], ar kurām noteikti būtu vērts iepazīties, uzsākot Lebega mēra un integrāļa teorijas studijas. Strādājot pie dotā mācību līdzekļa, tika ņemtas vērā tās iestrādes, kuras ir izklāstītas V. Starceva darbos [9], [28] un [29] un A. Gricāna darbā [2].

Veiksim īsu mācību līdzekļa satura apskatu.

1. nodaļā "Mērojamas kopas" tiek definētas mērojamas Lebega nozīmē kopas uz skaitļu taisnes $\mathbb{R}$ un to Lebega mērs, apskatītas attiecīgās īpašības un mērojamības Lebega nozīmē saistība ar mērojamību Žordāna[4] nozīmē, nodaļas beigās sniegts īss pārskats par mērojamības problēmu uz skaitļu taisnes. Apskatītie kopu mērojamības Lebega nozīmē kritēriji sniedz lasītajam pārskatu par iespējamām pieejām mērojamības Lebega nozīmē teorijai. Dotajam mērķim atbilst nodaļas pēdējā paragrāfa pēdējais uzdevums.

2. nodaļa "Mērojamas funkcijas" ir veltīta viena reālā mainīgā mērojamām funkcijām. Tiek apskatītas to īpašības, dažādi funkciju virkņu konverģences veidi un to savstarpējā saistība, apskatītas visu mērojamo Lebega nozīmē funkciju klasi raksturojošās teorēmas.

3. nodaļa "Lebega integrālis" zināmā mērā ir dotā mācību līdzekļa centrālā nodaļa, jo šajā nodaļā tiek apskatīts viena reālā mainīgā ierobežotas mērojamas funkcijas Lebega integrālis galīga mēra kopā, kurš kalpo par bāzi turpmākajā izklāstā, apskatot summējamas funkcijas. Detalizēti tiek aplūkotas Lebega integrāļa īpašības, Lebega integrāļa saistība ar Rīmaņa integrāli, robežpāreja zem Lebega integrāļa zīmes, kā arī Lebega integrāļa izmantošana uzdevumā par primitīvās funkcijas atrašanu ierobežota atvasinājuma gadījumā.

4. nodaļa "Summējamas funkcijas" ir veltīta Lebega integrāļa vispārināšanai viena reālā mainīgā mērojamām funkcijām, kuras var būt arī neierobežotas apskatāmajā galīga vai bezgalīga mēra kopā. Vispirms Lebega integrālis un summējamība tiek definēta patstāvīgas zīmes (t.i., nenegatīvām un nepozitīvām) funkcijām galīga mēra kopās (1. solis), izmantojot funkcijas griezuma jēdzienu, un bezgalīga mēra kopās (2. solis), kā arī tiek apskatītas attiecīgās īpašības. Balstoties uz patstāvīgas zīmes funkciju Lebega integrāļa jēdzienu, tiek definēts funkciju, kuras var pieņemt patvaļīgas zīmes vērtības, Lebega integrālis un summējamība. Nodaļas noslēgumā tiek apskatīta robežpāreja zem summējamu funkciju Lebega integrāļa zīmes, kā arī summējamu funkciju saistība ar pirmā un otrā veida neīstajiem integrāļiem.

5. nodaļā "Dažas mērojamu funkciju telpas" tiek apskatīta Banaha telpa $L_1(E)$ un Hilberta telpa $L_2(E)$. Galvenā vērība tiek pievērsta korektai šo telpu konstruēšanai un to pilnības pierādīšanai. Tiek apskatīta konverģences pēc vidējā (t.i., konverģences normētā telpā $L_1(E)$) un konverģences pēc vidējā kvadrātiskā (t.i., konverģences normētā telpā $L_2(E)$) saistība ar 2. nodaļā aplūkotajiem funkciju virkņu konverģences veidiem: punktveida konverģenci, vienmērīgo konverģenci, konverģenci gandrīz visur un konverģenci pēc mēra. Iepazīstoties ar šīs nodaļas materiālu, lasītājam būtu jāzina funkcionālanalīzes elementi.

[4] K. Žordāns (*Camille Jordan*, 1838-1922) - franču matemātiķis.

2., 3. un 4. nodaļā tiek aplūkotas tikai visur galīgas funkcijas, t.i., funkcijas, kuras apskatāmajā kopā pieņem tikai reālas vērtības. 2. un 4. nodaļas noslēguma paragrāfos tiek paskaidrots, kā minētajās trīs nodaļās aplūkotais materiāls var tikt vispārināts uz funkcijām, kuras apskatāmajā kopā, iespējams, pieņem arī vērtības $-\infty$ un $+\infty$. Īpašu vietu šādu funkciju vidū ieņem gandrīz visur galīgas dotajā kopā funkcijas, jo tās var aizstāt ar apskatāmajā kopā ekvivalentām visur galīgām funkcijām.

6. nodaļā "Pielikums", nepretendējot uz sistemātisku un pilnīgu izklāstu, tiek atgādināti daži matemātiskās analīzes kursa jautājumi, kuri bieži tiek izmantoti pamattekstā.

Katras nodaļas beigās, izņemot pēdējo, ir sniegti uzdevumi patstāvīgajam darbam. Uzdevumu grūtības pakāpe svārstās no samērā vienkāršiem līdz diezgan sarežģītiem teorētiska rakstura uzdevumiem, kuri varētu atrasties arī pamattekstā, taču nav tur nokļuvuši autoru subjektīvās izvēles dēļ.

Par ieinteresētību, ieguldīto darbu un lietišķajiem padomiem grāmatas pilnveidošanā, iepazīstoties ar grāmatas manuskriptu, autori pateicas LU asociētai profesorei S. Asmuss un DU profesoram F. Sadirbajevam.

Autori izsaka pateicību visiem tiem Daugavpils Universitātes Matemātikas katedras locekļiem, kā arī studentēm K. Anuļevičai, T. Baikovai un N. Sergejevai, sarunas un diskusijas ar kuriem par dažādiem matemātiskiem jautājumiem stimulēja darbu pie dotā mācību līdzekļa.

Darba elektroniskā versija ir atrodama Daugavpils Universitātes Tālmācības studiju centra mājas lapā http://www.de.dau.lv.

Daži darbā izmantotie apzīmējumi:
$\mathbb{N}$ - visu naturālo skaitļu kopa;
$\mathbb{N}_0$ - visu nenegatīvo veselo skaitļu kopa;
$\mathbb{Z}$ - visu veselo skaitļu kopa;
$\mathbb{Q}$ - visu racionālo skaitļu kopa;
$\mathbb{I}$ - visu iracionālo skaitļu kopa;
$\mathbb{R}$ - visu reālo skaitļu kopa;
$\mathbb{R}^+$ - visu nenegatīvo reālo skaitļu kopa;
$\widetilde{\mathbb{R}}$ - paplašinātā reālo skaitļu kopa.

1. nodaļa

MĒROJAMAS KOPAS

Eiklīda telpas $\mathbb{R}^n$ apakškopu mērojamības Žordāna nozīmē teorija ietver sevī ne tikai telpas $\mathbb{R}^n$ apakškopu "mērīšanas" jautājumus, bet tai ir arī nozīmīga loma funkciju integrējamības Rīmaņa nozīmē teorijā. Šajā nodaļā tiks aplūkots lineāru kopu (t.i., kopas $\mathbb{R}^1$ apakškopu) mērojamības Žordāna nozīmē teorijas vispārinājums - mērojamības Lebega nozīmē teorija, kurai ir būtiska loma, aplūkojot funkciju integrējamības Lebega nozīmē teoriju - funkciju integrējamības Rīmaņa nozīmē teorijas vispārinājumu.

1.1. Ārējais Lebega mērs

Par **lineāru kopu** sauc patvaļīgu visu reālo skaitļu kopas $\mathbb{R}$ apakškopu. Turpmāk, ja nav teikts pretējais, ar E apzīmēsim patvaļīgu lineāru kopu.

1.1. definīcija. Par **kopas E ne vairāk kā sanumurējamu pārklājumu** (vai **kopas E pārklājumu**, ja nerodas pārpratumi[1]) sauc ne vairāk kā sanumurējamu ierobežotu <u>vaļēju</u> nedeģenerētu intervālu saimi $S_E = \{\delta_k\}$, ka $E \subset \bigcup\limits_k \delta_k$, kur *indekss k pieņem vai nu galīgu skaitu vērtību* $1, 2, \ldots, n$, *vai arī sanumurējamu apjomu vērtību* $1, 2, \ldots$.

1.1. piezīme. Par reālu skaitļu intervāliem skat. 6.1.1. apakšparagrāfu. No šajā apakšparagrāfā teiktā izriet, ka, ja $S_E = \{\delta_k\}$ ir kopas E pārklājums 1.1. definīcijas nozīmē, tad $\delta_k = (\alpha_k; \beta_k)$, kur $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$ un $\alpha_k < \beta_k$.

1.2. definīcija. Kopas E pārklājumu $\{\delta_k\}$ sauc par **kopas E galīgu pārklājumu**, ja indekss k pieņem galīgu skaitu vērtību $1, 2, \ldots, n$. Kopas E pārklājumu $\{\delta_k\}$ sauc par **kopas E sanumurējamu pārklājumu** un apzīmē ar $\overline{S}_E$, ja indekss k pieņem sanumurējamu apjomu vērtību $1, 2, \ldots$.

[1] Vispārīgā kopas pārklājuma definīcija ir šāda. Pieņemsim, ka kopa A (ne obligāti lineāra) ir kopas U apakškopa. Par *kopas A pārklājumu* sauc patvaļīgu kopas U apakškopu saimi $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ (Ω ir <u>patvaļīga</u> netukša indeksu kopa), ka $A \subset \bigcup\limits_{\alpha\in\Omega} A_\alpha$. Tupmākajā kursa izklāstā būs sastopami tikai lineāru kopu ne <u>vairāk</u> kā sanumurējami pārklājumi, tāpēc termina "kopas E pārklājums" 1.1. definīcijas nozīmē lietošana nekādus pārpratumus neradīs. Vienīgais izņēmums ir Heines-Borela-Lebega lemma (skat. 10. lappusi), kurā tiek apskatīts ierobežotas slēgtas lineāras kopas vaļējs pārklājums $\{G_\alpha\}_{\alpha\in T}$ ar patvaļīgu netukšu indeksu kopu T.

1.3. definīcija. Par **kopas E pārklājuma $S_E = \{\delta_k\}$ garumu** sauc visu pārklājumā S_E ietilpstošo intervālu garumu summu. Kopas E pārklājuma $S_E = \{\delta_k\}$ garumu atzīmē ar $\sigma(S_E)$, t.i.,

$$\sigma(S_E) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_k |\delta_k|,$$

kur $|\delta_k| = \beta_k - \alpha_k > 0$ ir intervāla δ_k garums.

Kopumā ir iespējami šādi gadījumi:

- ja $S_E = \{\delta_k\}_{k=1}^n$ ir kopas E galīgs pārklājums, tad pārklājuma S_E garums $\sigma(S_E) = \sum\limits_{k=1}^n |\delta_k|$ ir pozitīvs skaitlis;
- ja $S_E = \{\delta_k\}_{k=1}^\infty$ ir kopas E sanumurējams pārklājums, pie tam rinda $\sum\limits_{k=1}^\infty |\delta_k|$ konverģē, tad pārklājuma S_E garums $\sigma(S_E) = \sum\limits_{k=1}^\infty |\delta_k|$ ir pozitīvs skaitlis;
- ja $S_E = \{\delta_k\}_{k=1}^\infty$ ir kopas E sanumurējams pārklājums, pie tam rinda $\sum\limits_{k=1}^\infty |\delta_k|$ diverģē, tad pārklājuma S_E garums $\sigma(S_E) = \sum\limits_{k=1}^\infty |\delta_k| = +\infty$.

Tātad jebkurai kopai E un patvaļīgam tās pārklājumam S_E ir spēkā

$$0 < \sigma(S_E) \leq +\infty.$$

1.4. definīcija. Par **kopas E ārējo Lebega mēru** (vienkārši **ārējo mēru**) sauc visu kopas E pārklājumu[2] S_E garumu kopas $\big\{\sigma(S_E)\big\}$ infīmu paplašinātajā reālo skaitļu kopā $\widetilde{\mathbb{R}}$ (skat. 6.1.2. apakšparagrāfu). Kopas E ārējo mēru apzīmē ar $\mathrm{m}^*(E)$, t.i.,

$$\mathrm{m}^*(E) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\big\{\sigma(S_E)\big\}.$$

Kopumā ir iespējami šādi gadījumi.

- Jebkurš kopas E pārklājums S_E ir kopas E sanumurējams pārklājums ar bezgalīgu garumu, t.i., $S_E = \{\delta_k\}_{k=1}^\infty$ un $\sigma(S_E) = \sum\limits_{k=1}^\infty |\delta_k| = +\infty$. Šajā gadījumā $\big\{\sigma(S_E)\big\} = \{+\infty\}$, no kurienes seko, ka $\mathrm{m}^*(E) = \inf\{+\infty\} = +\infty$.

[2] Tātad kopas E ārējā mēra definīcijā tiek izmantoti ne vairāk kā sanumurējami kopas E pārklājumi $S_E = \{\delta_k\}$. *Kāpēc netiek izmantoti nesanumurējami kopas E pārklājumi $S_E = \{\delta_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ (Ω ir nesanumurējama indeksu kopa)?* Lai sniegtu atbildi uz šo jautājumu, vispirms ir jādefinē nesanumurējama pārklājuma garums. Izmantojot [20, 74. lpp.] sniegto patvaļīgas nenegatīvu skaitļu indeksētas kopas summas definīciju, nesanumurējama kopas E pārklājuma $S_E = \{\delta_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ garumu var definēt šādi:

$$\sigma(S_E) = \sum_{\alpha\in\Omega} |\delta_\alpha| \stackrel{\text{def}}{=} \sup\left\{\sum_{\alpha\in\Omega_1} |\delta_\alpha| : \ \Omega_1 \subset \Omega,\ \Omega_1 \text{ ir netukša galīga kopa}\right\}$$

(atzīmēsim, ka šī definīcija nav pretrunā ar 1.3. definīciju, ja Ω ir ne vairāk kā sanumurējama kopa). Ņemot vērā apgalvojumu: ja $S_E = \{\delta_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ ir kopas E nesanumurējams pārklājums, tad eksistē $n \in \mathbb{N}$ un kopas Ω bezgalīga apakškopa $\widetilde{\Omega}$, ka $|\delta_\alpha| > \frac{1}{n}$ jebkuram $\alpha \in \widetilde{\Omega}$, var secināt, ka $\sigma(S_E) = +\infty$. Tāpēc arī ārējā mēra definīcijā nesanumurējami pārklājumi netiek izmantoti, jo, kopai $\sigma(S_E)$ pievienojot elementu $+\infty$, šīs kopas infīms (t.i., kopas E ārējais mērs!) nemainīsies.

- Visos pārējos gadījumos, t.i., ja eksistē vismaz viens kopas E pārklājums S_E, ka $\sigma(S_E) < +\infty$, kopas E ārējais mērs ir nenegatīvs skaitlis.

Tātad jebkurai kopai E ir spēkā

$$0 \leq \mathrm{m}^*(E) \leq +\infty. \tag{1.1}$$

1.2. piezīme. *Ja E ir ierobežota kopa, tad* $\mathrm{m}^*(E) < +\infty$. Tiešām, tā kā E ir ierobežota kopa, tad eksistē $M > 0$, ka jebkuram $x \in E$ ir spēkā $-M \leq x \leq M$, t.i., $E \subset [-M; M]$. Acīmredzot, $S_E = \big\{(-M-\tau; M+\tau)\big\}$, kur τ ir kāds pozitīvs skaitlis, ir kopas E pārklājums. Tā kā $\mathrm{m}^*(E)$, būdams kopas $\big\{\sigma(S_E)\big\}$ infīms, ir šīs kopas minorante, tad $\mathrm{m}^*(E) \leq \sigma(S_E) = 2M + 2\tau < +\infty$, no kurienes seko, ka $\mathrm{m}^*(E) < +\infty$.

1.3. piezīme. *Ja $\mathrm{m}^*(E) = +\infty$, tad E ir neierobežota kopa.* Taču ir jāatzīmē, ka jebkuram nenegatīvam reālam skaitlim α var atrast tādu neierobežotu kopu E, ka $\mathrm{m}^*(E) = \alpha$.

Nākamās trīs teorēmas raksturo ārējo mēru, izmantojot sanumurējamus pārklājumus, μ-pārklājumus un sanumurējamus μ-pārklājumus.

1.1. teorēma. *Kopas E ārējais mērs ir vienāds ar visu kopas E sanumurējamo pārklājumu $\overline{S}_E = \{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ garumu kopas $\{\sigma(\overline{S}_E)\}$ infīmu paplašinātajā reālo skaitļu kopā $\widetilde{\mathbb{R}}$, t.i.,* $\mathrm{m}^*(E) = \inf\big\{\sigma(\overline{S}_E)\big\}$.

1.5. definīcija. Pieņemsim, ka $\mu > 0$. Kopas E pārklājumu $\{\delta_k\}$ sauc par **kopas E μ-pārklājumu** un apzīmē ar S_E^{μ}, ja $|\delta_k| < \mu$ jebkuram indeksam k.

1.2. teorēma. *Kopas E ārējais mērs ir vienāds ar visu kopas E μ-pārklājumu $S_E^{\mu} = \{\delta_k\}$ garumu kopas $\big\{\sigma(S_E^{\mu})\big\}$ infīmu paplašinātajā reālo skaitļu kopā $\widetilde{\mathbb{R}}$, t.i.,* $\mathrm{m}^*(E) = \inf\big\{\sigma(S_E^{\mu})\big\}$.

1.3. teorēma. *Kopas E ārējais mērs ir vienāds ar visu kopas E sanumurējamo μ-pārklājumu $\overline{S}_E^{\mu} = \{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ garumu kopas $\big\{\sigma(\overline{S}_E^{\mu})\big\}$ infīmu paplašinātajā reālo skaitļu kopā $\widetilde{\mathbb{R}}$, t.i.,* $\mathrm{m}^*(E) = \inf\big\{\sigma(\overline{S}_E^{\mu})\big\}$.

Iesakām lasītājam patstāvīgi pierādīt dotās teorēmas (skat. 1., 2., 3., 4. un 5. uzdevumu).

Tālāk apskatīsim ārējā mēra īpašības.

1° **Ārējā mēra nenegativitāte**. *Jebkurai kopai E ir spēkā* $\mathrm{m}^*(E) \geq 0$.

► Īpašības patiesums seko no (1.1).◄

2° $\mathrm{m}^*(\emptyset) = 0$, *t.i., tukšās kopas ārējais mērs ir vienāds ar nulli.*

► Jāpierāda, ka 0 ir kopas $\big\{\sigma(S_\emptyset)\big\}$ infīms.

1) Tā kā jebkurai kopai E un patvaļīgam tās pārklājumam S_E ir spēkā $\sigma(S_E) > 0$, tad 0 ir kopas $\big\{\sigma(S_\emptyset)\big\}$ minorante.

2) Apskatīsim patvaļīgu $\varepsilon > 0$. Tad $S_\emptyset = \big\{\big(-\frac{\varepsilon}{4}; \frac{\varepsilon}{4}\big)\big\}$ ir kopas $\emptyset$ pārklājums, pie tam

$$\sigma(S_\emptyset) = \frac{\varepsilon}{4} - \left(-\frac{\varepsilon}{4}\right) = \frac{\varepsilon}{2} < 0 + \varepsilon.$$

No 1) un 2) saskaņā ar infīma kritēriju izriet, ka $\mathrm{m}^*(\emptyset) = 0$.◄

3° **Ārējā mēra monotonitāte**. *Ja* $E_1 \subset E_2$, *tad* $\mathrm{m}^*(E_1) \le \mathrm{m}^*(E_2)$.

▶ Tā jebkurš kopas E_2 pārklājums ir arī kopas E_1 pārklājums, tad $\{S_{E_1}\} \supset \{S_{E_2}\}$, no kurienes izriet, ka $\{\sigma(S_{E_1})\} \supset \{\sigma(S_{E_2})\}$, tāpēc

$$\mathrm{m}^*(E_2) = \inf\{\sigma(S_{E_2})\} \ge \inf\{\sigma(S_{E_1})\} = \mathrm{m}^*(E_1). \blacktriangleleft$$

4° *Ja* $a, b \in \mathbb{R}$ *un* $a \le b$, *tad* $\mathrm{m}^*\big(\langle a; b\rangle\big) = b - a$, *t.i., patvaļīga ierobežota intervāla* $\langle a; b\rangle$ *ārējais mērs ir vienāds ar šī intervāla garumu. Speciālgadījums: jebkuras vienelementa kopas* $\{a\}$, *kur* $a \in \mathbb{R}$, *ārējais mērs ir vienāds ar* 0.

▶ 1) Apskatīsim patvaļīgu $\varepsilon > 0$. Acīmredzot, $S_{\langle a;b\rangle} = \big\{\big(a - \frac{\varepsilon}{2}; b + \frac{\varepsilon}{2}\big)\big\}$ ir kopas $\langle a; b\rangle$ pārklājums, kas sastāv no viena intervāla ar garumu $\sigma(S_{\langle a;b\rangle}) = b + \frac{\varepsilon}{2} - \big(a - \frac{\varepsilon}{2}\big) = b - a + \varepsilon$. Tā kā $\mathrm{m}^*\big(\langle a; b\rangle\big)$, būdams kopas $\big\{\sigma(S_{\langle a;b\rangle})\big\}$ infīms, ir šīs kopas minorante, tad $\mathrm{m}^*\big(\langle a; b\rangle\big) \le \sigma(S_{\langle a;b\rangle}) = b - a + \varepsilon$. Ja pēdējā nevienādībā ε tiecas uz 0 no labās puses, tad

$$\mathrm{m}^*\big(\langle a; b\rangle\big) \le b - a. \tag{1.2}$$

Ja $a = b$, tad no (1.2) seko, ka $\mathrm{m}^*\big(\langle a; a\rangle\big) \le a - a = 0$. Tā kā ārējais mērs ir nenegatīvs, tad $\mathrm{m}^*\big(\langle a; a\rangle\big) \ge 0$. Tātad $\mathrm{m}^*\big(\langle a; a\rangle\big) = 0 = a - a$, t.i., *patvaļīga deģenerēta intervāla* $\langle a; a\rangle$ *ārējais mērs ir vienāds ar šī intervāla garumu - skaitli* 0. Speciālgadījumā, ja $\langle a; a\rangle = [a; a] = \{a\}$, tad $\mathrm{m}^*\big([a; a]\big) = \mathrm{m}^*\big(\{a\}\big) = 0$, t.i., *jebkuras vienelementa kopas* $\{a\}$, *kur* $a \in \mathbb{R}$, *ārējais mērs ir vienāds ar* 0.

2) Pieņemsim, ka $a < b$. Tā kā $\mathrm{m}^*\big(\langle a; b\rangle\big)$ ir kopas $\inf\big\{\sigma(S_{\langle a;b\rangle})\big\}$ infīms, tad jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds kopas $\langle a; b\rangle$ pārklājums $S_{\langle a;b\rangle} = \{\delta_k\}$, ka

$$\sum_k |\delta_k| < \mathrm{m}^*\big(\langle a; b\rangle\big) + \varepsilon. \tag{1.3}$$

Atradīsim tādu naturālu skaitli $n \ge 2$, ka $a + \frac{\varepsilon}{n} < b - \frac{\varepsilon}{n}$. Izvēlēsimies skaitļus c un d tā, lai $a < c < a + \frac{\varepsilon}{n}$, $b - \frac{\varepsilon}{n} < d < b$. Saskaitot nevienādības $d > b - \frac{\varepsilon}{n}$ un $-c > -a - \frac{\varepsilon}{n}$, iegūsim

$$d - c > b - a - \frac{2\varepsilon}{n}. \tag{1.4}$$

Tā kā $n \ge 2$, tad $\frac{1}{n} \le \frac{1}{2}$ jeb $-\frac{1}{n} \ge -\frac{1}{2}$ jeb $-\frac{2\varepsilon}{n} \ge -\varepsilon$, no kurienes izriet

$$b - a - \frac{2\varepsilon}{n} \ge b - a - \varepsilon. \tag{1.5}$$

No (1.4) un (1.5) atrodam $d - c > b - a - \frac{2\varepsilon}{n} \ge b - a - \varepsilon$ jeb

$$d - c > b - a - \varepsilon. \tag{1.6}$$

Matemātiskās analīzes kursā tiek pierādīta Heines[3]-Borela[4]-Lebega lemma [7, 1. daļa, 244. lpp.].

Heines-Borela-Lebega lemma: *ja vaļēju kopu saime* $\{G_\alpha\}_{\alpha \in T}$ *pārklāj slēgtu ierobežotu kopu* $E \subset \mathbb{R}$, *t.i.,* $E \subset \bigcup\limits_{\alpha \in T} G_\alpha$, *kur* α *pieņem vērtības no patvaļīgas netukšas indeksu kopas* T, *tad eksistē šīs saimes galīga apakšsaime, kas arī pārklāj kopu* E, *t.i., eksistē indeksi* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in T$, *ka* $E \subset G_{\alpha_1} \cup G_{\alpha_2} \cup \cdots \cup G_{\alpha_n}$.

[3] H. Heine (*Heinrich Eduard Heine*, 1821-1881) - vācu matemātiķis.
[4] E. Borels (*Félix Edouard Justin Emile Borel*, 1871-1956) - franču matemātiķis.

Tā kā $[c;d] \subset \langle a;b\rangle$ un $\{\delta_k\}$ ir intervāla $\langle a;b\rangle$ vaļējs pārklājums (jo vaļējie intervāli δ_k ir vaļējas kopas), tad $\{\delta_k\}$ ir arī nogriežņa $[c;d]$ vaļējs pārklājums, t.i., $[c;d] \subset \bigcup\limits_k \delta_k$. Tā kā nogrieznis $[c;d]$ ir slēgta ierobežota kopa, tad no Heines-Borela-Lebega lemmas izriet, ka eksistē tādi indeksi $k_1, k_2, \ldots, k_n$, ka $[c;d] \subset \delta_{k_1} \cup \delta_{k_2} \cup \cdots \cup \delta_{k_n}$. Intervālu δ_{k_i} $(i = 1, 2, \ldots, n)$ galapunkti kopā ar punktiem c un d sadala nogriezni $[c;d]$ nogriežņos $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$. Ņemot vērā (1.3), atrodam

$$d - c = \sum_{j=1}^{m} |\sigma_j| \le \sum_{i=1}^{n} |\delta_{k_i}| \le \sum_k |\delta_k| < \mathrm{m}^*\big(\langle a;b\rangle\big) + \varepsilon,$$

no kurienes izriet

$$d - c < \mathrm{m}^*\big(\langle a;b\rangle\big) + \varepsilon. \tag{1.7}$$

No (1.6) un (1.7) seko $b - a - \varepsilon < d - c < \mathrm{m}^*\big(\langle a;b\rangle\big) + \varepsilon$ jeb $\mathrm{m}^*\big(\langle a;b\rangle\big) > (b-a) - 2\varepsilon$. Ja pēdējā nevienādībā ε tiecas uz 0 no labās puses, tad

$$\mathrm{m}^*\big(\langle a;b\rangle\big) \ge b - a. \tag{1.8}$$

No (1.2) un (1.8) izriet, ka $\mathrm{m}^*\big(\langle a;b\rangle\big) = b - a$, t.i., *jebkura ierobežota nedeģenerēta intervāla $\langle a;b\rangle$ ārējais mērs ir vienāds ar šī intervāla garumu.*◀

5° **Ārējā mēra sanumurējamā pusaditivitāte**. *Ja $E = \bigcup\limits_k E_k$, kur indekss k pieņem ne vairāk kā sanumurējamu apjomu vērtību, tad*

$$\mathrm{m}^*(E) \le \sum_k \mathrm{m}^*(E_k). \tag{1.9}$$

▶ Ja eksistē indekss k, ka $\mathrm{m}^*(E_k) = +\infty$, tad $\sum\limits_k \mathrm{m}^*(E_k) = +\infty$. Ņemot vērā (1.1), secinām, ka nevienādība (1.9) ir patiesa.

Pieņemsim, ka $\mathrm{m}^*(E_k) < +\infty$ jebkuram indeksam k. Tad $\sum\limits_k \mathrm{m}^*(E_k)$ ir vai nu nenegatīvu skaitļu galīga summa, vai arī nenegatīvu skaitļu rinda, t.i., vai nu $\sum\limits_k \mathrm{m}^*(E_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{m}^*(E_k)$, vai arī $\sum\limits_k \mathrm{m}^*(E_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}^*(E_k)$.

a) Ja rinda $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}^*(E_k)$ diverģē, tad $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}^*(E_k) = +\infty$. Šajā gadījumā nevienādība (1.9) ir patiesa.

b) Apskatīsim gadījumu, kad $\sum\limits_k \mathrm{m}^*(E_k)$ ir galīga summa vai konverģenta rinda. Vienmēr var uzskatīt, ka $\sum\limits_k \mathrm{m}^*(E_k)$ ir konverģenta rinda. Tiešām, ja indekss k pieņem vērtības $1, 2, \ldots, n$, tad uzskatām, ka $E_{n+1} = E_{n+2} = \cdots = \emptyset$, tāpēc saskaņā ar 2° īpašību $\mathrm{m}^*(E_{n+1}) = \mathrm{m}^*(E_{n+2}) = \cdots = 0$ un līdz ar to $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{m}^*(E_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}^*(E_k)$.

Tātad apskatīsim gadījumu, kad $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}^*(E_k)$ ir nenegatīvu skaitļu konverģenta rinda. Pieņemsim, ka $\varepsilon > 0$. Saskaņā ar 1.1. teorēmu $\mathrm{m}^*(E_k)$ $(k \in \mathbb{N})$ ir kopas $\left\{\sigma\left(\overline{S}_{E_k}\right)\right\}$ infīms.

Tāpēc jebkuram $k \in \mathbb{N}$ eksistē kopas E_k sanumurējams pārklājums $\overline{S}_{E_k} = \{\delta_k^i\}_{i=1}^{\infty}$, ka

$$\sigma\left(\overline{S}_{E_k}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} |\delta_k^i| < \mathrm{m}^*(E_k) + \frac{\varepsilon}{2^k} \ (k \in \mathbb{N}).$$

Tātad $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\delta_k^i|$ $(k \in \mathbb{N})$ ir konverģenta rinda. Apzīmēsim rindas $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\delta_k^i|$ summu ar α_k $(k \in \mathbb{N})$. Tad

$$\alpha_k < \mathrm{m}^*(E_k) + \frac{\varepsilon}{2^k} \ (k \in \mathbb{N}). \tag{1.10}$$

Tā rindas $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}^*(E_k)$ un $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k}$ konverģē, tad no (1.10), ņemot vērā rindu ar nenegatīviem locekļiem salīdzināšanas pazīmi, izriet, ka rinda $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_k$ konverģē, pie tam

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}^*(E_k) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k}$$

jeb

$$\alpha \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}^*(E_k) + \varepsilon, \tag{1.11}$$

kur α ir rindas $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_k$ summa.

Atzīmēsim, ka $E_k \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \delta_k^i$ $(k \in \mathbb{N})$, jo $\overline{S}_{E_k} = \{\delta_k^i\}_{i=1}^{\infty}$ ir kopas E_k pārklājums jebkuram $k \in \mathbb{N}$. Tāpēc $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \delta_k^i$. Sanumurēsim visus intervālus δ_k^i $(k, i \in \mathbb{N})$ virknē $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m, \ldots$. Acīmredzot, $S_E = \{\gamma_m\}_{m=1}^{\infty}$ ir kopas E pārklājums. Tā kā jebkuram $k \in \mathbb{N}$ rinda $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\delta_k^i|$ konverģē uz summu α_k, bet rinda $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ konverģē uz summu α, tad atkārtotā rinda $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{i=1}^{\infty} |\delta_k^i|$ konverģē uz summu α (skat. 6.5. paragrāfu). No atkārtoto rindu īpašībām (skat. 6.5. paragrāfu) izriet, ka rinda $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \gamma_m$ arī konverģē, pie tam uz to pašu summu, t.i.,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m = \alpha. \tag{1.12}$$

No (1.11) un (1.12) izriet

$$\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}^*(E_k) + \varepsilon. \tag{1.13}$$

Tā kā $\mathrm{m}^*(E)$ ir kopas $\{\sigma(S_E)\}$ infīms un līdz ar to arī šīs kopas minorante, bet $S_E = \{\gamma_m\}_{m=1}^{\infty}$ ir kopas E pārklājums, tad

$$\mathrm{m}^*(E) \leq \sigma(S_E) = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m. \tag{1.14}$$

No (1.13) un (1.14) seko $\mathrm{m}^*(E) \le \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}^*(E_k) + \varepsilon$. Ja pēdējā nevienādībā ε tiecas uz 0 no labās puses, iegūsim (1.9).◀

1.6. definīcija. Par **attālumu starp kopām** $A, B \subset \mathbb{R}$ sauc kopas

$$\Phi = \big\{|a-b| : a \in A,\ b \in B\big\} \subset \mathbb{R}$$

infīmu paplašinātajā reālo skaitļu kopā $\widetilde{\mathbb{R}}$ un apzīmē to ar $d(A;B)$, t.i.,

$$d(A;B) = \inf \Phi = \inf_{a\in A,\ b\in B} |a-b|.$$

1.4. piezīme. Ja $A = \emptyset$ vai $B = \emptyset$, tad $\Phi = \emptyset$, tāpēc šajā gadījumā $d(A;B) = \inf \emptyset = +\infty$. Savukārt, ja $A \ne \emptyset$ un $B \ne \emptyset$, tad kopa Φ ir netukša un ierobežota no apakšas (piemēram, ar skaitli 0), tāpēc šajā gadījumā $d(A;B)$ ir nenegatīvs reāls skaitlis. Tādējādi jebkurām kopām $A, B \subset \mathbb{R}$ ir spēkā $0 \le d(A;B) \le +\infty$.

6° *Ja attālums starp kopām E_1 un E_2 ir pozitīvs skaitlis, t.i., $0 < d(E_1;E_2) < +\infty$, tad*

$$\mathrm{m}^*(E_1 \cup E_2) = \mathrm{m}^*(E_1) + \mathrm{m}^*(E_2). \tag{1.15}$$

▶ Pieņemsim, ka $\mu = \frac{1}{2} d(E_1;E_2) > 0$. Saskaņā ar 1.2. teorēmu $\mathrm{m}^*(E) = \inf\big\{\sigma(S_E^\mu)\big\}$, kur $E = E_1 \cup E_2$. Tāpēc jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē kopas E μ-pārklājums $S_E^\mu = \{\delta_k\}$, ka

1. $|\delta_k| < \mu$ jebkuram k;
2. $\sum\limits_k |\delta_k| \le \mathrm{m}^*(E_1 \cup E_2) + \varepsilon$

(ja $\mathrm{m}^*(E_1 \cup E_2) = +\infty$, tad 2. nosacījums, acīmredzot, izpildās; ja $\mathrm{m}^*(E_1 \cup E_2) < +\infty$, tad 2. nosacījums izpildās saskaņā ar netukšas kopas, kurai eksistē galīga minorante, infīma kritēriju).

Atzīmēsim, ka jebkurš intervāls δ_k, kas satur vismaz vienu kopas E_1 punktu, nesatur nevienu kopas E_2 punktu un jebkurš intervāls δ_k, kas satur vismaz vienu kopas E_2 punktu, nesatur nevienu kopas E_1 punktu. Tiešām, pieņemsim pretējo, ka eksistē tādi $x_1 \in E_1$ un $x_2 \in E_2$, ka $x_1, x_2 \in \delta_k$ kādam k, tad, no vienas puses, $|x_1 - x_2| < \mu$, jo $|\delta_k| < \mu$, bet, no otras puses, izmantojot attāluma starp kopām kā infīma definīciju, iegūsim $|x_1 - x_2| \ge d(E_1;E_2) = 2\mu > \mu$, t.i., $|x_1 - x_2| > \mu$. Ieguvām pretrunu.

Tādējādi kopas $E_1 \cup E_2$ μ-pārklājums $S_E^\mu = \{\delta_k\}$ sadalās kopas E_1 μ-pārklājumā $S_{E_1}^\mu$ un kopas E_2 μ-pārklājumā $S_{E_2}^\mu$ tā, ka $S_{E_1}^\mu \cap S_{E_2}^\mu = \emptyset$. Tāpēc $\sigma\left(S_E^\mu\right) = \sigma\left(S_{E_1}^\mu\right) + \sigma\left(S_{E_2}^\mu\right)$. Tā kā $\mathrm{m}^*(E_1) = \inf\big\{\sigma(S_{E_1}^\mu)\big\}$ un $\mathrm{m}^*(E_2) = \inf\big\{\sigma(S_{E_2}^\mu)\big\}$, tad $\mathrm{m}^*(E_1) \le \sigma(S_{E_1}^\mu)$ un $\mathrm{m}^*(E_2) \le \sigma(S_{E_2}^\mu)$, no kurienes izriet

$$\mathrm{m}^*(E_1) + \mathrm{m}^*(E_2) \le \sigma(S_{E_1}^\mu) + \sigma(S_{E_2}^\mu) = \sigma(S_E^\mu) \le \mathrm{m}^*(E_1 \cup E_2) + \varepsilon$$

jeb

$$\mathrm{m}^*(E_1) + \mathrm{m}^*(E_2) \le \mathrm{m}^*(E_1 \cup E_2) + \varepsilon.$$

Pārejot pēdējā nevienādībā pie robežas, kad ε tiecas uz 0 no labās puses, iegūsim

$$\mathrm{m}^*(E_1) + \mathrm{m}^*(E_2) \le \mathrm{m}^*(E_1 \cup E_2). \tag{1.16}$$

Savukārt no ārējā mēra sanumurējamās pusaditivitātes seko

$$\mathrm{m}^*(E_1 \cup E_2) \le \mathrm{m}^*(E_1) + \mathrm{m}^*(E_2). \tag{1.17}$$

No (1.16) un (1.17) izriet (1.15).◀

7° *Ja* $d(E_i \cap E_j) > 0$ $(i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, n)$, *tad*

$$\mathrm{m}^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{m}^*(E_j). \tag{1.18}$$

► Īpašības patiesumu pierāda ar matemātiskās indukcijas principa palīdzību, izmantojot 6° īpašību.◄

8° *Ja slēgtas ierobežotas kopas* $E_1, E_2, \ldots, E_n$ *savstarpēji nešķeļas, tad ir spēkā vienādība* (1.18).

► Īpašības patiesums izriet no 7° īpašības, ja ņemt vērā šādu apgalvojumu: *ja divas slēgtas ierobežotas kopas nešķeļas, tad attālums starp tām ir pozitīvs skaitlis.*◄

9° *Jebkurai kopai* E *un patvaļīgam* $\varepsilon > 0$ *eksistē vaļēja kopa* G, *ka* $E \subset G$ *un* $\mathrm{m}^*(G) \leq \mathrm{m}^*(E) + \varepsilon$.

► Tā kā $\mathrm{m}^*(E) = \inf\{\sigma(S_E)\}$, tad jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē kopas E pārklājums $S_E = \{\delta_k\}$, ka

$$\sum_k |\delta_k| \leq \mathrm{m}^*(E) + \varepsilon. \tag{1.19}$$

Kopa $G = \bigcup_k \delta_k$ ir vaļēja kā vaļēju intervālu δ_k (kuri ir vaļējas kopas!) apvienojums. Ņemot vērā 3° un 4° īpašību, kā arī nevienādību (1.19), iegūsim

$$\mathrm{m}^*(G) = \mathrm{m}^*\left(\bigcup_k \delta_k\right) \leq \sum_k \mathrm{m}^*(\delta_k) = \sum_k |\delta_k| \leq \mathrm{m}^*(E) + \varepsilon,$$

no kurienes izriet, ka $\mathrm{m}^*(G) \leq \mathrm{m}^*(E) + \varepsilon$.◄

10° *Ja* $\mathrm{m}^*(E) < +\infty$, *tad jebkuram* $\varepsilon > 0$ *eksistē vaļēja kopa* G, *ka* $E \subset G$ *un* $\mathrm{m}^*(G) < \mathrm{m}^*(E) + \varepsilon$.

► Īpašības patiesums izriet no 9° īpašības, ja ņemt vērā netukšas kopas, kurai eksistē galīga minorante, infīma kritēriju (skat. 6.1. paragrāfu).◄

1.2. Mērojamas Lebega nozīmē kopas definīcija. Nulles mēra kopas

1.7. definīcija. Kopu E sauc par **mērojamu Lebega nozīmē kopu** (vienkārši **mērojamu**), ja jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāda vaļēja kopa G, ka $E \subset G$ un $\mathrm{m}^*(G \setminus E) < \varepsilon$. Mērojamas kopas E ārējo mēru $\mathrm{m}^*(E)$ apzīmē ar $\mathrm{m}(E)$ un sauc par **kopas** E **Lebega mēru** (vienkārši **mēru**).

1.1. piemērs. *Jebkura vaļēja kopa* E *ir mērojama.*

► Pieņemsim, ka E ir vaļēja kopa. Apskatīsim patvaļīgu $\varepsilon > 0$. Ja $G = E$, tad $\mathrm{m}^*(G \setminus E) = \mathrm{m}^*(E \setminus E) = \mathrm{m}^*(\emptyset) = 0 < \varepsilon$. Saskaņā ar definīciju E ir mērojama kopa.◄

1.2. piemērs. *Pieņemsim, ka* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Vaļējie intervāli* $I_1 = (\alpha; +\infty)$ *un* $I_2 = (-\infty; \beta)$ *ir mērojamas kopas, pie tam* $\mathrm{m}(I_1) = +\infty$ *un* $\mathrm{m}(I_2) = +\infty$.

► Tā kā I_1 un I_2 ir vaļējas kopas, tad no iepriekšējā piemēra izriet, ka I_1 un I_2 ir mērojamas kopas. Pierādīsim, ka $\mathrm{m}(I_1) = +\infty$. Pieņemsim pretējo, ka $\mathrm{m}(I_1) = \mathrm{m}^*(I_1) = A$ ir reāls nenegatīvs skaitlis. Apskatīsim nogriezni $[a; b]$, kur $a = \alpha + 1$ un $b = \alpha + A + 2$. Tad $[a; b] \subset I_1$, pie tam, ņemot vērā ārējā mēra 4° īpašību, iegūsim

$$\mathrm{m}^*\big([a; b]\big) = \big|[a; b]\big| = b - a = (\alpha + A + 2) - (\alpha + 1) = A + 1 > A.$$

Tā kā $[a; b] \subset I_1$, tad no ārējā mēra monotonitātes izriet $\mathrm{m}^*\big([a; b]\big) \leq \mathrm{m}^*(I_1) = A$. Ieguvām pretrunu. Tātad pieņēmums nav patiess un $\mathrm{m}(I_1) = +\infty$. Analoģiski pierāda, ka $\mathrm{m}(I_2) = +\infty$.◄

1.3. piemērs. *Visu reālo skaitļu kopa* $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$ *ir mērojama, pie tam* $\mathrm{m}(\mathbb{R}) = +\infty$.

► Tā kā $\mathbb{R}$ ir vaļēja kopa, tad $\mathbb{R}$ ir mērojama kopa. Pierādīsim, ka $\mathrm{m}(\mathbb{R}) = +\infty$. Apskatīsim intervālu $I_1 = (\alpha; +\infty)$. Tā kā $I_1 \subset \mathbb{R}$, tad, ņemot vērā ārējā mēra monotonitāti un iepriekšējo piemēru, iegūsim $+\infty = \mathrm{m}(I_1) = \mathrm{m}^*(I_1) \leq \mathrm{m}^*(\mathbb{R}) = \mathrm{m}(\mathbb{R})$. Savukārt no (1.1) izriet, ka $\mathrm{m}(\mathbb{R}) = \mathrm{m}^*(\mathbb{R}) \leq +\infty$. Tātad $\mathrm{m}(\mathbb{R}) = +\infty$.◄

1.8. definīcija. Kopu E, kuras ārējais mērs ir vienāds ar nulli, sauc par **nulles mēra kopu**.

Tātad *E ir nulles mēra kopa tad un tikai tad, kad jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds kopas E pārklājums $S_E = \{\delta_k\}$, ka $\sum\limits_k |\delta_k| < \varepsilon$.*

1.4. teorēma. *Nulles mēra kopām piemīt šādas īpašības.*

1. *Jebkura nulles mēra kopa ir mērojama, un tās mērs ir vienāds ar nulli.*
2. *Jebkura nulles mēra kopas apakškopa ir nulles mēra kopa.*
3. *Jebkurš nulles mēra kopu ne vairāk kā sanumurējams apvienojums ir nulles mēra kopa.*

► 1. Pieņemsim, ka E ir nulles mēra kopa, t.i., $\mathrm{m}^*(E) = 0$. Apskatīsim patvaļīgu $\varepsilon > 0$. Tā kā $\mathrm{m}^*(E)$ ir kopas $\{\sigma(S_E)\}$ infīms, tad eksistē tāds kopas E pārklājums $S_E = \{\delta_k\}$, ka $\sum\limits_k |\delta_k| < \varepsilon$. Kopa $G = \bigcup\limits_k \delta_k$ ir vaļēja kā vaļēju intervālu δ_k (kuri ir vaļējas kopas!) apvienojums, pie tam $E \subset G$, jo $S_E = \{\delta_k\}$ ir kopas E pārklājums. Tā kā $G \setminus E \subset G$, tad, ņemot vērā ārējā mēra 3°, 4° un 5° īpašību, iegūsim

$$\mathrm{m}^*(G \setminus E) \leq \mathrm{m}^*(G) = \mathrm{m}^*\left(\bigcup_k \delta_k\right) \leq \sum_k \mathrm{m}^*(\delta_k) = \sum_k |\delta_k| < \varepsilon.$$

Saskaņā ar definīciju E ir mērojama kopa.

2. Pieņemsim, ka E ir nulles mēra kopa, t.i., $\mathrm{m}^*(E) = 0$, bet $E_1 \subset E$. No ārējā mēra monotonitātes izriet, ka $\mathrm{m}^*(E_1) \leq \mathrm{m}^*(E) = \mathrm{m}(E) = 0$, t.i., $\mathrm{m}^*(E_1) \leq 0$. Saskaņā ar ārējā mēra nenegativitāti $\mathrm{m}^*(E_1) \geq 0$. Tātad $\mathrm{m}^*(E_1) = 0$, t.i., E_1 ir nulles mēra kopa.

3. Pieņemsim, ka $E = \bigcup\limits_k E_k$, kur E_k ir nulles mēra kopa jebkuram k, t.i., $\mathrm{m}^*(E_k) = 0$. Tad no ārējā mēra sanumurējamās pusaditivitātes izriet $\mathrm{m}^*(E) \leq \sum\limits_k \mathrm{m}^*(E_k) = \sum\limits_k 0 = 0$. Saskaņā ar ārējā mēra nenegativitāti $\mathrm{m}^*(E) \geq 0$. Tātad $\mathrm{m}^*(E) = 0$, t.i., E ir nulles mēra kopa.◄

1.4. piemērs. *Ne vairāk kā sanumurējama kopa E ir nulles mēra kopa, tāpēc E ir mērojama kopa, un tās mērs ir vienāds ar nulli.*

► Apskatīsim ne vairāk kā sanumurējamu kopu E.

1) Ja $E = \emptyset$, tad no ārējā mēra 2° īpašības izriet, ka $\mathrm{m}^*(E) = 0$.

2) Pieņemsim, ka $E \neq \emptyset$. Tad kopas E elementus var sanumurēt galīgā vai bezgalīgā virknē $a_1, a_2, \dots$. Tā kā kopa E ir savu vienelementa apakškopu $\{a_1\}$, $\{a_2\}$, ... ne vairāk kā sanumurējams apvienojums, t.i., $E = \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \cdots$, bet jebkura kopas $\mathbb{R}$ vienelementa apakškopa ir nulles mēra kopa (skat. ārējā mēra 4° īpašību), tad saskaņā ar 1.4. teorēmas 3. apgalvojumu $\mathrm{m}^*(E) = 0$.

No 1) un 2) izriet, ka jebkura ne vairāk kā sanumurējama kopa E ir nulles mēra kopa. Saskaņā ar 1.4. teorēmu E ir mērojama kopa un tās mērs ir vienāds ar nulli.◄

1.5. piemērs. *Visu racionālo skaitļu kopa $\mathbb{Q}$ ir mērojama un tās mērs ir vienāds ar nulli.*

► Tā kā $\mathbb{Q}$ ir sanumurējama kopa, tad saskaņā ar iepriekšējo piemēru $\mathbb{Q}$ ir mērojama kopa, pie tam $\mathrm{m}(\mathbb{Q}) = 0$.◄

1.3. Mērojamu Lebega nozīmē kopu īpašības

1° *Mērojamu kopu ne vairāk kā sanumurējams apvienojums ir mērojama kopa.*

► Pieņemsim, ka $E = \bigcup\limits_k E_k$, kur E_k ir mērojama kopa jebkuram k. Apskatīsim patvaļīgu $\varepsilon > 0$. No mērojamas kopas definīcijas seko, ka katram k eksistē vaļēja kopa G_k, ka $E_k \subset G_k$ un

$$\mathrm{m}^*(G_k \setminus E_k) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}. \tag{1.20}$$

Kopa $G = \bigcup\limits_k G_k$ ir vaļēja kopa kā vaļēju kopu apvienojums. Tā kā $E_k \subset G_k$ jebkuram k, tad $E = \bigcup\limits_k E_k \subset \bigcup\limits_k G_k = G$.

Pierādīsim, ka

$$G \setminus E \subset \bigcup_k (G_k \setminus E_k). \tag{1.21}$$

Tiešām,

$$G \setminus E = \left(\bigcup_k G_k\right) \setminus E = \bigcup_k (G_k \setminus E) \subset \bigcup_k (G_k \setminus E_k);$$

pēdējā iekļaušanās ir spēkā, jo, tā kā $E_k \subset E$, tad $G_k \setminus E \subset G_k \setminus E_k$.

Atzīmēsim, ka

$$\sum_k \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, \text{ ja } k = 1, \dots, n \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, \text{ ja } k = 1, 2, \dots \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{2^n - 1}{2^n}, & \text{ja } k = 1, \dots, n \\ \frac{\varepsilon}{2}, & \text{ja } k = 1, 2, \dots \end{array} \right\} < \varepsilon. \tag{1.22}$$

No (1.21), ņemot vērā ārējā mēra monotonitāti, sanumurējamo pusaditivitāti un (1.22), iegūsim

$$\mathrm{m}^*(G \setminus E) \leq \mathrm{m}^* \left(\bigcup_k (G_k \setminus E_k) \right) \leq \sum_k \mathrm{m}^*(G_k \setminus E_k) \leq \sum_k \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} < \varepsilon,$$

no kurienes seko, ka $\mathrm{m}^*(G \setminus E) < \varepsilon$. Tātad E ir mērojama kopa.◀

2° *Jebkura slēgta kopa ir mērojama kopa.*

▶ Pieņemsim, ka E ir slēgta kopa.

a) Apskatīsim gadījumu, kad E *ir ierobežota kopa.*

Tā kā E ir ierobežota kopa, tad $\mathrm{m}^*(E) < +\infty$. Ja $E = \emptyset$, tad E ir mērojama kopa. Pieņemsim, ka $E \neq \emptyset$. No ārējā mēra 10° īpašības seko, ka jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē vaļēja kopa G, ka $E \subset G$ un

$$\mathrm{m}^*(G) < \mathrm{m}^*(E) + \varepsilon. \tag{1.23}$$

No (1.23) seko, ka $\mathrm{m}^*(G) < +\infty$. Tā kā $G \setminus E$ ir vaļēja kopa, tad saskaņā ar 6.1. teorēmu kopa $G \setminus E$ ir vienāda ar tās veidotājintervālu apvienojumu:

$$G \setminus E = \bigcup_k \delta_k. \tag{1.24}$$

Pierādīsim, ka starp kopas $G \setminus E$ veidotājintervāliem nav neierobežoto vaļējo intervālu $I_1 = (\alpha; +\infty)$, $I_2 = (-\infty; \beta)$ un $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$, kur α un β ir kādi reāli skaitļi. Tiešām, tā kā $E \neq \emptyset$, tad $G \setminus E \neq \mathbb{R}$, no kurienes seko, ka $\mathbb{R} \not\subset G \setminus E$. Tātad $\mathbb{R}$ nav kopas $G \setminus E$ veidotājintervāls. Pierādīsim, ka I_1 nav kopas $G \setminus E$ veidotājintervāls. Pieņemsim pretējo, ka eksistē k_0, ka $I_1 = \delta_{k_0}$. Tā kā $I_1 = \delta_{k_0} \subset \bigcup_k \delta_k = G \setminus E \subset G$, tad $+\infty = \mathrm{m}^*(I_1) \leq \mathrm{m}^*(G)$. Ieguvām pretrunu, jo $\mathrm{m}^*(G) < +\infty$. Tātad pieņēmums nav patiess un I_1 nav kopas $G \setminus E$ veidotājintervāls. Analoģiski pierāda, ka arī I_2 nav kopas $G \setminus E$ veidotājintervāls.

Tātad visi kopas $G \setminus E$ veidotājintervāli ir ierobežoti, t.i., $\delta_k = (\alpha_k; \beta_k)$, kur $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$ un $\alpha_k < \beta_k$ jebkuram indeksam k. Katram k un patvaļīgam $\tau > 0$ definēsim intervālu δ_k^τ šādi.

1. Ja $0 < \tau < \frac{\beta_k - \alpha_k}{2}$, tad $\delta_k^\tau \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha_k + \tau; \beta_k - \tau)$. Šajā gadījumā intervāla δ_k^τ slēgums ir nogrieznis $\overline{\delta}_k^\tau = [\alpha_k + \tau; \beta_k - \tau]$.

2. Ja $\tau \geq \frac{\beta_k - \alpha_k}{2}$, tad $\delta_k^\tau \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset$. Šajā gadījumā $\overline{\delta}_k^\tau = \emptyset$.

Atzīmēsim, ka nogriežņi $\overline{\delta}_k^\tau$ savstarpēji nešķeļas, jo $\overline{\delta}_k^\tau \subset \delta_k$, bet veidotājintervāli δ_k savstarpēji nešķeļas.

Jebkuram k un patvaļīgam $\tau > 0$ apskatīsim kopu

$$\overline{E}_k^\tau = \bigcup_{i=1}^k \overline{\delta}_i^\tau = \overline{\delta}_1^\tau \cup \overline{\delta}_2^\tau \cup \cdots \cup \overline{\delta}_k^\tau.$$

Tā kā $\overline{\delta}_i^\tau$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ ir slēgtas ierobežotas kopas, kas savstarpēji nešķeļas, tad no ārējā mēra 8° īpašības izriet

$$\mathrm{m}^* \left(\overline{E}_k^\tau \right) = \mathrm{m}^* \left(\bigcup_{i=1}^k \overline{\delta}_i^\tau \right) = \sum_{i=1}^k \mathrm{m}^* \left(\overline{\delta}_i^\tau \right) = \sum_{i=1}^k \left| \overline{\delta}_i^\tau \right|$$

jeb

$$\mathrm{m}^*\left(\overline{E}_k^{\tau}\right) = \sum_{i=1}^{k} \left|\overline{\delta}_i^{\tau}\right|. \tag{1.25}$$

Kopa $\overline{E}_k^{\tau}$ ir slēgta ierobežota kopa, jo tā ir slēgtu ierobežotu kopu $\overline{\delta}_i^{\tau}$ galīgs apvienojums. Kopa E arī ir slēgta un ierobežota. Pierādīsim, ka $\overline{E}_k^{\tau} \cap E = \emptyset$. Tiešām, tā kā $\overline{\delta}_i^{\tau} \subset \delta_i$ jebkuram $i = 1, 2, \ldots, k$ un patvaļīgam $\tau > 0$, tad

$$\overline{E}_k^{\tau} = \bigcup_{i=1}^{k} \overline{\delta}_i^{\tau} \subset \bigcup_{i=1}^{k} \delta_i \subset \bigcup_{s} \delta_s = G \setminus E,$$

no kurienes seko $\overline{E}_k^{\tau} \subset G \setminus E$ un līdz ar to $\overline{E}_k^{\tau} \cap E = \emptyset$. Tāpēc no ārējā mēra 8° īpašības izriet

$$\mathrm{m}^*\left(\overline{E}_k^{\tau} \cup E\right) = \mathrm{m}^*\left(\overline{E}_k^{\tau}\right) + \mathrm{m}^*(E). \tag{1.26}$$

Tā kā $E \subset G$ un $\overline{E}_k^{\tau} \subset G \setminus E \subset G$, tad $\overline{E}_k^{\tau} \cup E \subset G$. No ārējā mēra monotonitātes seko $\mathrm{m}^*\left(\overline{E}_k^{\tau} \cup E\right) \leq \mathrm{m}^*(G)$, no kurienes, izmantojot (1.23) un (1.26), atrodam

$$\mathrm{m}^*\left(\overline{E}_k^{\tau}\right) + \mathrm{m}^*(E) \leq \mathrm{m}^*(G) < \mathrm{m}^*(E) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{jeb} \quad \mathrm{m}^*\left(\overline{E}_k^{\tau}\right) < \frac{\varepsilon}{2},$$

no kurienes, ņemot vērā (1.25), iegūsim

$$\mathrm{m}^*\left(\overline{E}_k^{\tau}\right) = \sum_{i=1}^{k} |\overline{\delta}_i^{\tau}| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.27}$$

Katram k atradīsim tādu $M \in \mathbb{N}$, ka $0 < \frac{1}{M} < \min\limits_{1 \leq i \leq k} \left\{\frac{\beta_i - \alpha_i}{2}\right\}$. Tad dilstošās virknes

$$r_1 = \frac{1}{M},\ r_2 = \frac{1}{M+1},\ \ldots,\ r_t = \frac{1}{M+t-1},\ \ldots \tag{1.28}$$

jebkurš loceklis piederēs katram intervālam $\left(0; \frac{\beta_i - \alpha_i}{2}\right)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Tāpēc katram r_t iegūsim k intervālus $\delta_i^{r_t} = (\alpha_i + r_t; \beta_i - r_t)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, pie tam, ņemot vērā (1.27), atrodam

$$\frac{\varepsilon}{2} > \mathrm{m}^*(\overline{E}_k^{r_\tau}) = \sum_{i=1}^{k} |\delta_i^{r_\tau}| = \sum_{i=1}^{k} \big((\beta_i - \alpha_i) - 2r_t\big) = \sum_{i=1}^{k} (\beta_i - \alpha_i) - 2\sum_{i=1}^{k} r_t =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} |\delta_i| - 2\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{M+t-1} = \sum_{i=1}^{k} |\delta_i| - \frac{2k}{M+t-1}$$

jeb

$$\sum_{i=1}^{k} |\delta_i| - \frac{2k}{M+t-1} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (t \in \mathbb{N}). \tag{1.29}$$

Atzīmēsim, ka virknes (1.28) locekļa numurs t nav atkarīgs no k un M. Nevienādībā (1.29) pārejot pie robežas, kad $t \to \infty$, iegūsim

$$\sum_{i=1}^{k} |\delta_i| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.30}$$

Ja veidotājintervālu δ_k skaits ir galīgs, t.i., $k = 1, 2, \ldots, n$, tad jebkuram k ir spēkā (1.30). Ja $k = n$, tad

$$\sum_{i=1}^{n} |\delta_i| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.31}$$

No (1.24), ņemot vērā (1.31) un ārējā mēra sanumurējamo pusaditivitāti, atrodam

$$\mathrm{m}^*(G \setminus E) = \mathrm{m}^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} \delta_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathrm{m}^*(\delta_i) = \sum_{i=1}^{n} |\delta_i| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Ja veidotājintervālu δ_k skaits ir sanumurējams, t.i., $k = 1, 2, \ldots$, tad jebkuram k ir spēkā (1.30). Tātad rindas $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\delta_i|$ jebkura parciālsumma $S_k = \sum\limits_{i=1}^{k} |\delta_i|$ $(k \in \mathbb{N})$ ir ierobežota no augšas ar $\frac{\varepsilon}{2}$. Tātad rinda $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\delta_i|$ konverģē, pie tam tās summa nepārsniedz $\frac{\varepsilon}{2}$, t.i.,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\delta_i| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.32}$$

No (1.24), ņemot vērā (1.32) un ārējā mēra sanumurējamo pusaditivitāti, atrodam

$$\mathrm{m}^*(G \setminus E) = \mathrm{m}^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \delta_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{m}^*(\delta_i) = \sum_{i=1}^{\infty} |\delta_i| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Tādējādi jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāda vaļēja kopa G, ka $E \subset G$ un $\mathrm{m}^*(G \setminus E) < \varepsilon$. Saskaņā ar definīciju E ir mērojama kopa.

b) Pieņemsim, ka E *ir neierobežota kopa*. Apskatīsim kopas $E_n = E \cap \overline{I}_n$ $(n \in \mathbb{N})$, kur $\overline{I}_n = \{x : n - 1 \leq |x| \leq n\}$ $(n \in \mathbb{N})$. Tad

1. jebkuram $n \in \mathbb{N}$ kopa E_n ir slēgta, jo E_n ir slēgtu kopu E un $\overline{I}_n$ šķēlums;
2. jebkuram $n \in \mathbb{N}$ kopa E_n ir ierobežota, jo $E_n \subset \overline{I}_n$, bet $\overline{I}_n$ ir ierobežota kopa;
3. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (E \cap \overline{I}_n) = E \cap \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \overline{I}_n\right) = E \cap \mathbb{R} = E.$

Saskaņā ar a) punktā pierādīto slēgta ierobežota kopa E_n $(n \in \mathbb{N})$ ir mērojama. No 1° īpašības izriet, ka kopa E arī ir mērojama kā mērojamu kopu E_n $(n \in \mathbb{N})$ sanumurējams apvienojums.◀

3° *Ja E ir mērojama kopa, tad arī tās papildkopa $\complement E = \mathbb{R} \setminus E$ ir mērojama kopa.*

▶ Tā kā E ir mērojama kopa, tad saskaņā ar definīciju jebkuram $\varepsilon = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ eksistē vaļēja kopa G_n, ka $E \subset G_n$ un

$$\mathrm{m}^*(G_n \setminus E) < \frac{1}{n}. \tag{1.33}$$

Tā kā G_n ir vaļēja kopa, tad tās papildkopa $E_n = \complement G_n$ ir slēgta kopa jebkuram $n \in \mathbb{N}$.

No $E_n = \complement G_n$ izriet

$$\complement E \setminus E_n = \complement E \setminus \complement G_n = G_n \setminus E \ (n \in \mathbb{N}).$$

Pierādīsim, ka

$$\complement E \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) \subset G_n \setminus E \ (n \in \mathbb{N}). \tag{1.34}$$

Fiksēsim $n \in \mathbb{N}$. Pieņemsim, ka $x \in \complement E \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right)$. Tad $x \in \complement E$ un $x \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, t.i., $x \in \complement E$ un $x \notin E_k$ jebkuram $k \in \mathbb{N}$. Tātad $x \in \complement E$ un $x \notin E_n$, t.i., $x \in \complement E \setminus E_n = G_n \setminus E$.

Apskatīsim kopu

$$E_0 = \complement E \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right).$$

No (1.34), ņemot vērā ārējā mēra monotonitāti un (1.33), izriet

$$\mathrm{m}^*(E_0) \leq \mathrm{m}^* \left(G_n \setminus E \right) < \frac{1}{n} \ (n \in \mathbb{N}) \quad \text{jeb} \quad \mathrm{m}^*(E_0) < \frac{1}{n} \ (n \in \mathbb{N}).$$

Pārejot pie robežas, kad $n \to \infty$, iegūsim $\mathrm{m}^*(E_0) \leq 0$. Saskaņā ar ārējā mēra nenegativitāti $\mathrm{m}^*(E_0) \geq 0$. Tātad $\mathrm{m}^*(E_0) = 0$, t.i., E_0 ir nulles mēra kopa. No 1.4. teorēmas izriet, ka E_0 ir mērojama kopa.

Tā kā $E \subset G_n$ $(n \in \mathbb{N})$, tad $E_n = \complement G_n \subset \complement E$ $(n \in \mathbb{N})$, no kurienes izriet $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \subset \complement E$. Tātad

$$E_0 \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) = \left[\complement E \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) \right] \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) = \complement E. \tag{1.35}$$

Tā kā E_k ir slēgta kopa jebkuram k, tad no 2° īpašības seko, ka E_k ir mērojama kopa jebkuram k. Saskaņā ar 1° īpašību $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ ir mērojama kopa. Tā kā E_0 arī ir mērojama kopa, tad no 1° īpašības, ņemot vērā (1.35), izriet, ka $\complement E$ ir mērojama kopa.◀

4° *Mērojamu kopu ne vairāk kā sanumurējams šķēlums ir mērojama kopa.*

▶ Pieņemsim, ka $E = \bigcap_k E_k$, kur E_k ir mērojama kopa jebkuram k. Tā kā

$$E = \bigcap_k E_k = \complement \left(\bigcup_k \complement E_k \right),$$

tad no 1° un 3° īpašības seko, ka E ir mērojama kopa.◀

5° *Mērojamu kopu starpība ir mērojama kopa.*

▶ Ja E_1 un E_2 ir mērojamas kopas, tad no 3° un 4° īpašības izriet, ka $E_1 \setminus E_2 = E_1 \cap \complement E_2$ ir mērojama kopa.◀

1.4. Kopu mērojamības Lebega nozīmē kritēriji

1° *Kopa E ir mērojama kopa tad un tikai tad, kad jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāda slēgta kopa F, ka $F \subset E$ un*

$$\mathrm{m}^*(E \setminus F) < \varepsilon. \tag{1.36}$$

► *Nepieciešamība.* Tā kā E ir mērojama kopa, tad no mērojamu kopu 3° īpašības seko, ka kopas E papildkopa $\complement E$ arī ir mērojama kopa. Apskatīsim patvaļīgu $\varepsilon > 0$. Saskaņā ar mērojamas kopas definīciju eksistē tāda vaļēja kopa G, ka $\complement E \subset G$ un

$$\mathrm{m}^*(G \setminus \complement E) < \varepsilon. \tag{1.37}$$

Kopa $F = \complement G$ ir slēgta kopa kā vaļējas kopas G papildkopa, pie tam, tā kā $\complement E \subset G$, tad $\complement G \subset \complement\complement E$ jeb $F \subset E$. Tā kā $G \setminus \complement E = \complement\complement E \setminus \complement G = E \setminus F$, tad no (1.37) seko, ka $\mathrm{m}^*(E \setminus F) < \varepsilon$.

Pietiekamība. Apskatīsim patvaļīgu $\varepsilon > 0$. Saskaņā ar doto eksistē tāda slēgta kopa F, ka $F \subset E$ un izpildās (1.36). Kopa $G = \complement F$ ir vaļēja kopa kā slēgtas kopas G papildkopa, pie tam, tā kā $F \subset E$, tad $\complement E \subset \complement F$ jeb $\complement E \subset G$. Tā kā $E \setminus F = \complement F \setminus \complement E = G \setminus \complement E$, tad no (1.36) seko, ka $\mathrm{m}^*(G \setminus \complement E) < \varepsilon$. Saskaņā ar mērojamas kopas definīciju $\complement E$ ir mērojama kopa. No mērojamu kopu 3° īpašības seko, ka kopas $\complement E$ papildkopa $\complement\complement E = E$ arī ir mērojama.◄

2° **[Valē-Pusēna[5] kritērijs]** *Kopa E ir mērojama kopa tad un tikai tad, kad jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāda slēgta kopa F un tāda vaļēja kopa G, ka $F \subset E \subset G$ un*

$$\mathrm{m}^*(G \setminus F) < \varepsilon. \tag{1.38}$$

► *Nepieciešamība.* Tā kā E ir mērojama kopa, tad no mērojamas kopas definīcijas un mērojamības 1° kritērija seko, ka jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāda slēgta kopa F un tāda vaļēja kopa G, ka $F \subset E \subset G$ un

$$\mathrm{m}^*(G \setminus E) < \frac{\varepsilon}{2},\ \mathrm{m}^*(E \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.39}$$

Pierādīsim, ka

$$G \setminus F \subset (G \setminus E) \cup (E \setminus F). \tag{1.40}$$

Pieņemsim, ka $x \in G \setminus F$, t.i., $x \in G$ un $x \notin F$. Ja $x \in E$, tad $x \in E$ un $x \notin F$, t.i., $x \in E \setminus F \subset (G \setminus E) \cup (E \setminus F)$. Ja $x \notin E$, tad $x \in G$ un $x \notin E$, t.i., $x \in G \setminus E \subset (G \setminus E) \cup (E \setminus F)$. Abos gadījumos ieguvām, ka $x \in (G \setminus E) \cup (E \setminus F)$. Tātad iekļaušanās (1.40) ir patiesa.

No (1.40), ņemot vērā ārējā mēra monotonitāti, sanumurējamo pusaditivitāti un (1.39), iegūsim

$$\mathrm{m}^*(G \setminus F) \le \mathrm{m}^*\big((G \setminus E) \cup (E \setminus F)\big) \le \mathrm{m}^*(G \setminus E) + \mathrm{m}^*(E \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Tātad $\mathrm{m}^*(G \setminus F) < \varepsilon$.

Pietiekamība. Apskatīsim patvaļīgu $\varepsilon > 0$. Saskaņā ar doto eksistē tāda slēgta kopa F un tāda vaļēja kopa G, ka $F \subset E \subset G$ un izpildās (1.38). Tā kā $F \subset E \subset G$, tad

$$G \setminus E \subset G \setminus F. \tag{1.41}$$

Tiešām, ja $x \in G \setminus E$, t.i., $x \in G$ un $x \notin E$, tad $x \in G$ un $x \notin F$, t.i., $x \in G \setminus F$. No (1.41), ņemot vērā ārējā mēra monotonitāti un (1.38), iegūsim

$$\mathrm{m}^*(G \setminus E) \le \mathrm{m}^*(G \setminus F) < \varepsilon.$$

Tātad $\mathrm{m}^*(G \setminus E) < \varepsilon$. Saskaņā ar mērojamas kopas definīciju E ir mērojama kopa.◄

[5] Š. Valē-Pusēns (*Charles Jean Gustave Nicolas Baron de la Valée Poussin*, 1866-1962) - beļģu matemātiķis.

3° *Kopa E ir mērojama kopa tad un tikai tad, kad jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tādas mērojamas kopas A un B, ka $A \subset E \subset B$ un*

$$\mathrm{m}^*(B \setminus A) < \varepsilon. \tag{1.42}$$

► *Nepieciešamība.* Apskatīsim patvaļīgu $\varepsilon > 0$. Saskaņā ar mērojamības 2° kritēriju eksistē tāda slēgta kopa F un tāda vaļēja kopa G, ka $F \subset E \subset G$ un $\mathrm{m}^*(G \setminus F) < \varepsilon$. Pieņemsim, ka $B = G$ un $A = F$. Tad $\mathrm{m}^*(B \setminus A) < \varepsilon$, pie tam saskaņā ar 1.1. piemēru un mērojamu kopu 2° īpašību kopas A un B ir mērojamas.

Pietiekamība. Saskaņā ar doto jebkuram $\varepsilon = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ eksistē tādas mērojamas kopas A_n un B_n, ka $A_n \subset E \subset B_n$ un

$$\mathrm{m}^*(B_n \setminus A_n) < \frac{1}{n}. \tag{1.43}$$

Apskatīsim kopas

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{un} \quad B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n.$$

No mērojamu kopu 1° un 4° īpašības izriet, ka A un B ir mērojamas kopas.

Pierādīsim, ka

$$B \setminus A \subset B_n \setminus A_n \ (n \in \mathbb{N}). \tag{1.44}$$

Pieņemsim, ka $x \in B \setminus A$, t.i., $x \in B$ un $x \notin A$, t.i., $x \in B_n$ un $x \notin A_n$ jebkuram $n \in \mathbb{N}$, t.i., $x \in B_n \setminus A_n$ jebkuram $n \in \mathbb{N}$. Tātad (1.44) izpildās.

No (1.44), ņemot vērā ārējā mēra monotonitāti un (1.43), iegūsim

$$\mathrm{m}^*(B \setminus A) \le \mathrm{m}^*(B_n \setminus A_n) < \frac{1}{n} \ (n \in \mathbb{N}) \quad \text{jeb} \quad \mathrm{m}^*(B \setminus A) < \frac{1}{n} \ (n \in \mathbb{N}).$$

Pārejot pie robežas, kad $n \to \infty$, iegūsim $\mathrm{m}^*(B \setminus A) \le 0$. Saskaņā ar ārējā mēra nenegativitāti $\mathrm{m}^*(B \setminus A) \ge 0$. Tātad $\mathrm{m}^*(B \setminus A) = 0$, t.i., $B \setminus A$ ir nulles mēra kopa. Tā kā $E \setminus A \subset B \setminus A$, jo $E \subset B$, tad saskaņā ar 1.4. teorēmu $\mathrm{m}^*(E \setminus A) = 0$, t.i., $E \setminus A$ ir nulles mēra kopa. Tā kā $A \subset E$, tad $(E \setminus A) \cup A = E$. No mērojamu kopu 1° īpašības izriet, ka E ir mērojama kopa kā divu mērojamu kopu $E \setminus A$ un A apvienojums.◄

1.9. definīcija. Kopu E sauc par **$\mathbf{F}_\sigma$-kopu**, ja to var izteikt kā slēgtu kopu ne vairāk kā sanumurējamu apvienojumu, t.i., $E = \bigcup_k F_k$, kur F_k ir slēgta kopa jebkuram indeksam k.

1.10. definīcija. Kopu E sauc par **$\mathbf{G}_\delta$-kopu**, ja to var izteikt kā vaļēju kopu ne vairāk kā sanumurējamu šķēlumu, t.i., $E = \bigcap_k G_k$, kur G_k ir vaļēja kopa jebkuram indeksam k.

1.5. piezīme. Saskaņā ar mērojamu kopu 2° īpašību jebkura slēgta kopa ir mērojama. Savukārt no mērojamu kopu 1° īpašības izriet, ka jebkurš mērojamu (tai skaitā arī slēgtu) kopu sanumurējams apvienojums ir mērojama kopa. Tātad *jebkura F_σ-kopa ir mērojama*. No 1.1. piemēra seko, ka jebkura vaļēja kopa ir mērojama. Savukārt no mērojamu kopu 4° īpašības izriet, ka jebkurš mērojamu (tai skaitā arī vaļēju) kopu sanumurējams šķēlums ir mērojama kopa. Tātad *jebkura G_δ-kopa ir mērojama*.

4° *Šādi apgalvojumi ir ekvivalenti.*

1. *Kopa E ir mērojama.*
2. *Kopu E var izteikt kā F_σ-kopas un nulles mēra kopas apvienojumu.*
3. *Kopu E var izteikt kā G_δ-kopas un nulles mēra kopas starpību.*

▶ Pierādījumu veiksim pēc shēmas

$$1. \to 2., \quad 1. \to 3., \quad 2. \to 1., \quad 3. \to 1.$$

1. → 2., 1. → 3. Pieņemsim, ka E ir mērojama kopa. No mērojamības 2° kritērija izriet, ka jebkuram $\varepsilon = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ eksistē tāda vaļēja kopa G_n un tāda slēgta kopa F_n, ka $F_n \subset E \subset G_n$ un

$$\mathrm{m}^*(G_n \setminus F_n) < \frac{1}{n}. \tag{1.45}$$

Apskatīsim kopas

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \quad \text{un} \quad B = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Acīmredzot, A ir F_σ-kopa, bet B ir G_δ-kopa, pie tam

$$A \subset E \subset B. \tag{1.46}$$

Pierādīsim, ka

$$E \setminus A \subset G_n \setminus F_n \ (n \in \mathbb{N}). \tag{1.47}$$

Pieņemsim, ka $x \in E \setminus A$, t.i., $x \in E$ un $x \notin \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. Tāpēc $x \notin F_n$ jebkuram $n \in \mathbb{N}$. Tā kā $E \subset G_n$ jebkuram $n \in \mathbb{N}$. Tātad $x \in G_n \setminus F_n$ jebkuram $n \in \mathbb{N}$. Iekļaušanās (1.47) ir pierādīta. Analoģiski pierāda, ka

$$B \setminus E \subset G_n \setminus F_n \ (n \in \mathbb{N}). \tag{1.48}$$

No (1.47) un (1.48), ņemot vērā ārējā mēra monotonitāti un (1.45), iegūsim

$$\mathrm{m}^*(E \setminus A) \le \mathrm{m}^*(G_n \setminus F_n) < \frac{1}{n} \ (n \in \mathbb{N}),$$

$$\mathrm{m}^*(B \setminus E) \le \mathrm{m}^*(G_n \setminus F_n) < \frac{1}{n} \ (n \in \mathbb{N}).$$

Pārejot pie robežas, kad $n \to \infty$, iegūsim $\mathrm{m}^*(E \setminus A) \le 0$ un $\mathrm{m}^*(B \setminus E) \le 0$. Ņemot vērā ārējā mēra nenegativitāti, atrodam, ka $\mathrm{m}^*(E \setminus A) = 0$ un $\mathrm{m}^*(B \setminus E) = 0$, t.i., $E \setminus A$ un $B \setminus E$ ir nulles mēra kopas.

Pierādīsim, ka

$$B \setminus (B \setminus E) = E. \tag{1.49}$$

Tiešām, no vienas puses, ja $x \in B \setminus (B \setminus E)$, tad $x \in B$ un $x \notin B \setminus E$. Tātad $x \in E$. No otras puses, pieņemsim, ka $x \in E$. Tad no (1.46) izriet, ka $x \in B$. Tā kā $x \in B$ un $x \in E$, tad $x \notin B \setminus E$. Tātad $x \in B$ un $x \notin B \setminus E$, t.i., $x \in B \setminus (B \setminus E)$. Vienādība (1.49) ir pierādīta.

Tā kā saskaņā ar (1.46) ir spēkā $A \subset E$, tad

$$A \cup (E \setminus A) = E. \tag{1.50}$$

No (1.49) un (1.50) izriet, ka 2. kopa E ir vienāda ar F_σ-kopas A un nulles mēra kopas $E \setminus A$ apvienojumu, 3. kopa E ir vienāda ar G_δ-kopas B un nulles mēra kopas $B \setminus E$ starpību.

2. $\to$ 1. Pieņemsim, ka izpildās 2. nosacījums, t.i., kopa E ir vienāda ar F_σ-kopas E_1 un nulles mēra kopas E_0 apvienojumu. Tā kā F_σ-kopa E_1 ir mērojama saskaņā ar 1.5. piemēru, bet nulles mēra kopa E_0 ir mērojama saskaņā ar 1.4. teorēmu, tad no mērojamu kopu 1° īpašības seko, ka arī šo kopu apvienojums $E_1 \cup E_0$ ir mērojama kopa.

3. $\to$ 1. Pieņemsim, ka izpildās 3. nosacījums, t.i., kopa E ir vienāda ar G_δ-kopas E_1' un nulles mēra kopas E_0' starpību. Tā kā G_δ-kopa E_1' ir mērojama saskaņā ar 1.5. piemēru, bet nulles mēra kopa E_0' ir mērojama saskaņā ar 1.4. teorēmu, tad no mērojamu kopu 5° īpašības seko, ka arī šo kopu starpība $E_1' \setminus E_0'$ ir mērojama kopa.◀

1.11. definīcija. Kopu E sauc par **Borela kopu**, ja to var iegūt no vaļējām un slēgtām kopām, izmantojot ne vairāk kā sanumurējamu skaitu apvienošanas un šķelšanas operāciju.

1.6. piezīme. F_σ-kopas un G_δ-kopas sniedz Borela kopu piemērus. Var pierādīt, ka *jebkura Borela kopa ir mērojama Lebega nozīmē kopa*. Apgrieztais apgalvojums nav spēkā, t.i., *eksistē mērojamas Lebega nozīmē kopas, kas nav Borela kopas.*

1.7. piezīme. Mērojamu kopu 1°, 2°, 3° un 4° kritēriji var tikt ņemti par mērojamas kopas definīciju. Piemēram, [16] un [28] par mērojamas kopas definīciju tiek ņemts 2° kritērijs. Par 4° kritērija izmantošanu, lai definētu mērojamas kopas jēdzienu, skat. [24].

1.5. Lebega mēra īpašības

Atgādināsim, ka saskaņā ar definīciju mērojamas kopas E mērs $\mathrm{m}(E)$ tika definēts kā šīs kopas ārējais mērs $\mathrm{m}^*(E)$, t.i., $\mathrm{m}(E) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{m}^*(E)$. Tāpēc no ārējā mēra 1°, 3° un 5° īpašības, ņemot vērā mērojamu kopu 1° īpašību, izriet šādas mēra īpašības.

1° **Lebega mēra nenegativitāte.** *Katrai mērojamai kopai E ir spēkā* $0 \le \mathrm{m}(E) \le +\infty$.

2° **Lebega mēra monotonitāte.** *Ja mērojama kopa E_1 ir mērojamas kopas E_2 apakškopa, tad* $\mathrm{m}(E_1) \le \mathrm{m}(E_2)$.

3° **Lebega mēra sanumurējamā pusaditivitāte.** *Ja E ir ne vairāk kā sanumurējams mērojamu kopu E_k apvienojums, tad E ir mērojama kopa un* $\mathrm{m}(E) \le \sum\limits_k \mathrm{m}(E_k)$.

Nākamā īpašība ir viena no svarīgākajām mēra īpašībām.

4° **Lebega mēra sanumurējamā aditivitāte.** *Ja E ir ne vairāk kā sanumurējams savstarpēji nešķeļošos mērojamu kopu E_k apvienojums, tad E ir mērojama kopa un*

$$\mathrm{m}(E) = \sum_k \mathrm{m}(E_k). \tag{1.51}$$

▶ No mērojamu kopu 1° īpašības seko, ka E ir mērojama kopa kā mērojamu kopu E_k ne vairāk kā sanumurējams apvienojums.

Pieņemsim, ka $\mathrm{m}(E) = +\infty$. Saskaņā ar Lebega mēra sanumurējamo pusaditivitāti $\mathrm{m}(E) \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_k)$. Tātad $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_k) \geq +\infty$. Ņemot vērā, ka $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_k) \leq +\infty$ (skat. 6.4. apakšparagrāfu), iegūsim, ka $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_k) = +\infty$. Tādējādi, ja $\mathrm{m}(E) = +\infty$, tad vienādība (1.51) ir patiesa.

Ja $\mathrm{m}(E_k) = +\infty$ vismaz vienam indeksam k, tad ir spēkā vienādība (1.51). Tā kā $E_k \subset E$, tad no mēra monotonitātes seko, ka $\mathrm{m}(E) \geq \mathrm{m}(E_k) = +\infty$. Taču jebkurai mērojamai kopai E ir spēkā $\mathrm{m}(E) \leq +\infty$. Tātad $\mathrm{m}(E) = +\infty$. No iepriekš pierādītā izriet, ka vienādība (1.51) ir patiesa.

Turpmāk uzskatīsim, ka $\mathrm{m}(E_k) < +\infty$ *jebkuram* k *un* $\mathrm{m}(E) < +\infty$.

a) Pieņemsim, ka E_k *ir ierobežota kopa jebkuram* k.

Fiksēsim kādu indeksu t, kuram ir definēta kopa E_t. No kopu mērojamības 1° kritērija izriet, ka jebkuram $\varepsilon > 0$ un katram indeksam $j = 1, 2, \ldots, t$ eksistē slēgta kopa F_j, ka $F_j \subset E_j$ un

$$\mathrm{m}(E_j \setminus F_j) < \frac{\varepsilon}{2^j} \tag{1.52}$$

(atzīmēsim, ka, tā kā E_j un F_j ir mērojamas kopas, tad no mērojamu kopu 5° īpašības seko, ka to starpība arī ir mērojama kopa, tāpēc $\mathrm{m}^*(E_j \setminus F_j) = \mathrm{m}(E_j \setminus F_j)$).

Ņemot vērā, ka

1. F_j ir ierobežota kopa jebkuram $j = 1, 2, \ldots, t$, jo tā iekļaujas ierobežotā kopā E_j,
2. F_j ir slēgta kopa jebkuram $j = 1, 2, \ldots, t$,
3. kopas F_j $(j = 1, 2, \ldots, t)$ savstarpēji nešķeļas, jo $F_j \subset E_j$, bet E_j savstarpēji nešķeļas,

no ārējā mēra 8° īpašības izriet

$$\mathrm{m}\left(\bigcup_{j=1}^{t} F_j\right) = \sum_{j=1}^{t} \mathrm{m}(F_j). \tag{1.53}$$

Tā kā $F_j \subset E_j$ $(j = 1, 2, \ldots, t)$, tad $E_j = (E_j \setminus F_j) \cup F_j$ $(j = 1, 2, \ldots, t)$, no kurienes, ņemot vērā Lebega mēra sanumurējamo pusaditivitāti un (1.52), iegūsim

$$\mathrm{m}(E_j) = \mathrm{m}\big((E_j \setminus F_j) \cup F_j\big) \leq \mathrm{m}(E_k \setminus F_j) + \mathrm{m}(F_j) < \mathrm{m}(F_j) + \frac{\varepsilon}{2^j} \ (j = 1, 2, \ldots, t)$$

jeb

$$\mathrm{m}(E_j) < \mathrm{m}(F_j) + \frac{\varepsilon}{2^j} \ (j = 1, 2, \ldots, t).$$

Summējot pēdējās nevienādības no 1 līdz t un ņemot vērā (1.22) un (1.53), atrodam

$$\sum_{j=1}^{t} \mathrm{m}(E_j) < \sum_{j=1}^{t} \mathrm{m}(F_j) + \sum_{j=1}^{t} \frac{\varepsilon}{2^j} < \mathrm{m}\left(\bigcup_{j=1}^{t} F_j\right) + \varepsilon,$$

no kurienes izriet

$$\sum_{j=1}^{t} \mathrm{m}(E_j) < \mathrm{m}\left(\bigcup_{j=1}^{t} F_j\right) + \varepsilon. \tag{1.54}$$

Tā kā $F_j \subset E_j$ $(j = 1, 2, \ldots, t)$, tad $\bigcup\limits_{j=1}^{t} F_j \subset \bigcup\limits_{j=1}^{t} E_j \subset \bigcup\limits_{k} E_k = E$ jeb $\bigcup\limits_{j=1}^{t} F_j \subset E$, no kurienes, ņemot vērā mēra monotonitāti, seko

$$\mathrm{m}\left(\bigcup_{j=1}^{t} F_j\right) \leq \mathrm{m}(E). \tag{1.55}$$

No (1.54) un (1.55) izriet, ka jebkuram $t \in \mathbb{N}$ ir spēkā nevienādība

$$\sum_{j=1}^{t} \mathrm{m}(E_j) < \mathrm{m}(E) + \varepsilon. \tag{1.56}$$

Pieņemsim, ka indekss k pieņem galīgu skaitu vērtību $1, 2, \ldots, n$. Tad no (1.56) seko, ka indeksam $t = n$ ir spēkā $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{m}(E_k) < \mathrm{m}(E) + \varepsilon$. Pārejot pie robežas, kad ε tiecas uz 0 no labās puses, iegūsim $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{m}(E_k) \leq \mathrm{m}(E)$. Savukārt no Lebega mēra sanumurējamās pusaditivitātes izriet $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{m}(E_k) \geq \mathrm{m}(E)$. Tātad $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{m}(E_k) = \mathrm{m}(E)$, t.i., vienādība (1.51) ir patiesa, ja indekss k pieņem galīgu skaitu vērtību $1, 2, \ldots, n$.

Pieņemsim, ka indekss k pieņem sanumurējamu apjomu vērtību $1, 2, \ldots$. Tad no (1.56) seko, ka rindas $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_k)$ jebkura parciālsumma ir ierobežota no augšas ar skaitli $\mathrm{m}(E) + \varepsilon$. Tāpēc šī rinda konverģē, pie tam $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_k) \leq \mathrm{m}(E) + \varepsilon$. Pārejot pie robežas, kad ε tiecas uz 0 no labās puses, iegūsim $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_k) \leq \mathrm{m}(E)$. Savukārt no Lebega mēra sanumurējamās pusaditivitātes izriet $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_k) \geq \mathrm{m}(E)$. Tātad $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_k) = \mathrm{m}(E)$, t.i., vienādība (1.51) ir patiesa, ja indekss k pieņem sanumurējamu apjomu vērtību $1, 2, \ldots$.

b) Pieņemsim, ka *starp kopām E_k var būt arī neierobežotas kopas*.

Kopas $I_s = \{x : s - 1 \leq |x| < s\}$ $(s \in \mathbb{N})$ ir ierobežotas, mērojamas un savstarpēji nešķeļas, pie tam $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{s=1}^{\infty} I_s$. Apskatīsim kopas $E_k^s = E_k \cap I_s$ $(s \in \mathbb{N})$. Tad

1. E_k^s $(s \in \mathbb{N})$ ir ierobežota kopa, jo $E_k^s \subset I_s$, bet I_s ir ierobežota kopa;
2. E_k^s ir mērojama kopa kā divu mērojamu kopu E_k un I_s šķēlums;
3. kopas E_k^s $(s \in \mathbb{N})$ savstarpēji nešķeļas, jo $E_k^s \subset I_s$ $(s \in \mathbb{N})$, bet I_s savstarpēji nešķeļas;
4. jebkuram k ir spēkā $E_k = E_k \cap \mathbb{R} = E_k \cap \left(\bigcup\limits_{s=1}^{\infty} I_s\right) = \bigcup\limits_{s=1}^{\infty} (E_k \cap I_s) = \bigcup\limits_{s=1}^{\infty} E_k^s$.

No 1., 2., 3. un 4., ņemot vērā a) punktā pierādīto, izriet, ka jebkuram k ir spēkā

$$\mathrm{m}(E_k) = \sum_{s=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_k^s). \tag{1.57}$$

Vienmēr var uzskatīt, ka indekss k pieņem sanumurējamu apjomu vērtību $1, 2, \ldots$. Tiešām, ja indekss k pieņem galīgu skaitu vērtību $1, 2, \ldots, n$, tad uzskatīsim, ka $E_{n+1} = E_{n+2} = \cdots = \emptyset$. Tad arī $E_{n+1}^s = E_{n+2}^s = \cdots = \emptyset$ $(s = 1, 2, \ldots)$. Tāpēc $\mathrm{m}(E_{n+1}) = \mathrm{m}(E_{n+2}) = \cdots = 0$ un $\mathrm{m}(E_{n+1}^s) = \mathrm{m}(E_{n+2}^s) = \cdots = 0$ $(s = 1, 2, \ldots)$. Acīmredzot, ka šajā gadījumā $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$, pie tam vienādība (1.57) arī paliek spēkā.

Sanumurēsim kopas E_k^s $(k, s = 1, 2 \ldots)$ virknē $T_1, T_2, \ldots$. Tā kā T_r $(r = 1, 2 \ldots)$ ir ierobežotas mērojamas kopas, kas savstarpēji nešķeļas, tad saskaņā ar a) punktā pierādīto

$$\mathrm{m}(E) = \sum_{r=1}^{\infty} \mathrm{m}(T_r). \tag{1.58}$$

Tā kā $\mathrm{m}(E) < +\infty$, tad no (1.58) izriet, ka rinda $\sum\limits_{r=1}^{\infty} \mathrm{m}(T_r)$ konverģē. No atkārtoto rindu īpašībām izriet (skat. 6.5. paragrāfu), ka atkārtotā rinda $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{s=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_k^s)$ arī konverģē, pie tam tās summa ir vienāda ar rindas $\sum\limits_{r=1}^{\infty} \mathrm{m}(T_r)$ summu, t.i., $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{s=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_k^s) = \sum\limits_{r=1}^{\infty} \mathrm{m}(T_r)$, no kurienes, ņemot vērā konverģentas atkārtotās rindas summas definīciju, kā arī vienādības (1.57) un (1.58), izriet $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_k) = \mathrm{m}(E)$, t.i., izpildās vienādība (1.51).◀

5° *Ja mērojama kopa E_1 ir mērojamas kopas E_2 apakškopa, pie tam $\mathrm{m}(E_2) < +\infty$, tad*

$$\mathrm{m}(E_2 \setminus E_1) = \mathrm{m}(E_2) - \mathrm{m}(E_1). \tag{1.59}$$

▶ Saskaņā ar mērojamu kopu 5° īpašību $E_2 \setminus E_1$ ir mērojama kopa kā divu mērojamu kopu E_2 un E_1 starpība. Tā kā $(E_2 \setminus E_1) \cup E_1 = E_2$ un $(E_2 \setminus E_1) \cap E_1 = \emptyset$, tad no mēra sanumurējamās aditivitātes seko

$$\mathrm{m}(E_2) = \mathrm{m}(E_2 \setminus E_1) + \mathrm{m}(E_1). \tag{1.60}$$

Tā kā $E_1 \subset E_2$, $E_2 \setminus E_1 \subset E_2$ un $\mathrm{m}(E_2) < +\infty$, tad no (1.60) izriet (1.59).◀

1.8. piezīme. 5° īpašībā nosacījums, ka $\mathrm{m}(E_2) < +\infty$, ir būtisks, lai izpildītos vienādība (1.59). Tiešām, mērojama kopa $E_1 = [2; +\infty)$ ir mērojamas kopas $E_2 = [1; +\infty)$ apakškopa, pie tam $\mathrm{m}(E_2) = +\infty$, tačū šajā gadījumā par vienādības (1.59) izpildīšanos vai neizpildīšanos nevar runāt, jo šīs vienādības labā puse $\mathrm{m}(E_2) - \mathrm{m}(E_1) = (+\infty) - (+\infty)$ nav definēta (skat. 6.1.2. apakšparagrāfu).

6° *Ja mērojama kopa E_1 ir ierobežotas mērojamas kopas E_2 apakškopa, tad*

$$\mathrm{m}(E_2 \setminus E_1) = \mathrm{m}(E_2) - \mathrm{m}(E_1).$$

► Apgalvojuma patiesums seko no 5° īpašības, ja ņemt vērā, ka jebkurai ierobežotai mērojamai kopai E_2 ir spēkā $\mathrm{m}(E_2) < +\infty$.◄

Nākamā lemma tiks izmantota gan Lebega mēra 7° īpašības, gan Lebega integrāļa 19° īpašības pierādījumā.

1. lemma. *Pieņemsim, ka $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$, kur $(E_k)_{k=1}^{\infty}$ ir augoša kopu virkne:*

$$E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_k \subset E_{k+1} \subset \cdots . \tag{1.61}$$

Apskatīsim kopas

$$A_1 = E_1,\ A_2 = E_2 \setminus E_1,\ \ldots\ A_k = E_k \setminus E_{k-1}\ (k \geq 2),\ \ldots . \tag{1.62}$$

Tad

$$A_n \cap A_m = \emptyset \ \ (n \neq m;\ n, m \in \mathbb{N}); \tag{1.63a}$$

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k; \tag{1.63b}$$

$$E_k = \bigcup_{j=1}^{k} A_j \ \ (k \in \mathbb{N}). \tag{1.63c}$$

► a) Pierādīsim (1.63a). Pieņemsim pretējo, ka eksistē $n, m \in \mathbb{N}$, ka $n \neq m$ un $A_n \cap A_m \neq \emptyset$. Noteiktības labad pieņemsim, ka $n < m$. Tad eksistē $x \in A_n \cap A_m$, t.i., $x \in A_n$ un $x \in A_m$. No $n < m$ izriet, ka $m > 1$ un $n \leq m-1$. Tā kā $x \in A_m = E_m \setminus E_{m-1}$, tad $x \in E_m$ un $\underline{x \notin E_{m-1}}$; tā kā $x \in A_n$ un $A_n \subset E_n \subset E_{m-1}$, tad $\underline{x \in E_{m-1}}$. Ieguvām pretrunu. Tātad pieņēmums nav patiess un līdz ar to $A_n \cap A_m = \emptyset$.

b) Pierādīsim (1.63b). Pieņemsim, ka $x \in E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$. Tā kā kopas E_k veido augošu virkni, tad eksistē $k \in \mathbb{N}$, ka $x \in E_k \subset E_{k+1} \subset \cdots$. Tātad naturālo skaitļu kopas apakškopa $\mathcal{J} = \{k \in \mathbb{N} : x \notin E_k\}$ ir ierobežota no augšas. Tāpēc kopa $\mathcal{J}$ ir galīga un tai eksistē maksimums k_0, t.i., $x \notin E_{k_0}$ un $x \in E_{k_0+1}$. Tātad $x \in E_{k_0+1} \setminus E_{k_0} = A_{k_0+1} \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, t.i., $x \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. Tātad

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k. \tag{1.64}$$

Tā kā $A_k \subset E_k$ $(k \in \mathbb{N})$, tad

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = E. \tag{1.65}$$

No (1.64) un (1.65) izriet (1.63b).

c) Pierādīsim (1.63c) ar matemātiskās indukcijas metodi pēc parametra $k \in \mathbb{N}$.

Indukcijas bāze. Ja $k = 1$, tad $E_1 = A_1 = \bigcup_{j=1}^{1} A_j$, t.i., vienādība (1.63c) ir patiesa.

Induktīvā pāreja. Pieņemsim, ka vienādība (1.63c) ir patiesa parametram $k = m$ (*induktīvais pieņēmums*), t.i., $E_m = \bigcup_{j=1}^{m} A_j$. Tad

$$E_m \cup A_{m+1} = \left(\bigcup_{j=1}^{m} A_j \right) \cup A_{m+1}$$

jeb

$$E_m \cup A_{m+1} = \bigcup_{j=1}^{m+1} A_j. \tag{1.66}$$

Pārveidosim šīs vienādības kreiso pusi. Tā kā $m \geq 1$, tad $m + 1 \geq 2$. Tāpēc no kopu A_k definīcijas izriet, ka $A_{m+1} = E_{m+1} \setminus E_m$. Tātad

$$E_m \cup A_{m+1} = E_m \cup (E_{m+1} \setminus E_m) = E_{m+1}, \tag{1.67}$$

jo $E_m \subset E_{m+1}$. No (1.66) un (1.67) izriet $E_{m+1} = \bigcup_{j=1}^{m+1} A_j$, t.i., vienādība (1.63c) ir patiesa parametram $k = m + 1$.

Indukcijas secinājums. Vienādība (1.63c) ir patiesa jebkuram parametram $k \in \mathbb{N}$.◀

7° **Lebega mēra pusnepārtrauktība no apakšas.** *Ja mērojamas kopas E_k veido augošu virkni, t.i.,*

$$E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_k \subset E_{k+1} \subset \cdots,$$

tad $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ ir mērojama kopa un

$$\mathrm{m}(E) = \lim_{k\to\infty} \mathrm{m}(E_k). \tag{1.68}$$

▶ Saskaņā ar mērojamu kopu 1° īpašību $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ ir mērojama kopa kā mērojamu kopu E_k sanumurējams apvienojums.

Tā kā mērojamu kopu E_k virkne ir augoša, tad no mēra monotonitātes seko, ka virkne $\big(\mathrm{m}(E_k)\big)_{k=1}^{\infty}$, kuras locekļi ir nenegatīvi skaitļi vai $+\infty$, arī ir augoša, tāpēc eksistē galīga vai bezgalīga robeža $\lim_{k\to\infty} \mathrm{m}(E_k)$. Pierādīsim vienādību (1.68).

Pieņemsim, ka eksistē $k \in \mathbb{N}$, ka $\mathrm{m}(E_k) = +\infty$. Tā kā $E_k \subset E_{k+1} \subset \cdots \subset E_n \subset \cdots$, tad no mēra monotonitātes seko, ka $\mathrm{m}(E_n) = +\infty$ $(n = k, k+1, \ldots)$. Līdz ar to iegūsim, ka $\lim_{n\to\infty} \mathrm{m}(E_n) = +\infty$. No otras puses, tā kā $E_k \subset E$ un $\mathrm{m}(E_k) = +\infty$, tad no mēra monotonitātes izriet, ka $\mathrm{m}(E) = +\infty$. Tādējādi vienādība (1.68) ir patiesa.

Pieņemsim, ka $\mathrm{m}(E_k) < +\infty$ jebkuram $k \in \mathbb{N}$. Apskatīsim 1. lemmā minētās kopas A_k $(k \in \mathbb{N})$. Tad ir spēkā (1.63a), (1.63b) un (1.63c). Kopa $A_1 = E_1$ ir mērojama saskaņā ar doto, savukārt kopa $A_k = E_k \setminus E_{k-1}$ $(k = 2, 3, \ldots)$ ir mērojama kā divu mērojamu kopu starpība. Saskaņā ar (1.63b) kopas A_k $(k \in \mathbb{N})$ savstarpēji nešķeļas. No mēra sanumurējamās aditivitātes, ņemot vērā (1.63a) un (1.63b), izriet

$$\mathrm{m}(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}(A_k). \tag{1.69}$$

No (1.69), ņemot vērā, ka nenegatīvu skaitļu rindai summa vienmēr eksistē un ir vienāda ar šīs rindas parciālsummu virknes robežu, iegūsim

$$\mathrm{m}(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}(A_k) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \mathrm{m}(A_j). \tag{1.70}$$

No mēra sanumurējamās aditivitātes, ņemot vērā (1.63a) un (1.63c), seko

$$\mathrm{m}(E_k) = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{m}(A_j) \quad (k \in \mathbb{N}). \tag{1.71}$$

No (1.70) un (1.71) izriet (1.68).◀

8° Lebega mēra pusnepārtrauktība no augšas.

1. *Ja mērojamas kopas E_k veido dilstošu virkni:*

$$E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_k \supset E_{k+1} \supset \cdots , \tag{1.72}$$

pie tam $\mathrm{m}(E_k) < +\infty$ vismaz vienam indeksam k, tad kopa $E = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ ir mērojama un

$$\mathrm{m}(E) = \lim_{k\to\infty} \mathrm{m}(E_k). \tag{1.73}$$

2. *Ja mērojamas kopas E_k veido dilstošu virkni, t.i., izpildās (1.72), tad $E = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ ir mērojama kopa un*

$$\mathrm{m}(E) \le \lim_{k\to\infty} \mathrm{m}(E_k). \tag{1.74}$$

▶ Saskaņā ar mērojamu kopu 4° īpašību $E = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ ir mērojama kopa kā mērojamu kopu E_k sanumurējams šķēlums.

Tā kā mērojamu kopu E_k virkne ir dilstoša, tad no mēra monotonitātes seko, ka virkne $\big(\mathrm{m}(E_k)\big)_{k=1}^{\infty}$, kuras locekļi ir nenegatīvi skaitļi vai $+\infty$, arī ir dilstoša, tāpēc eksistē galīga vai bezgalīga robeža $\lim\limits_{k\to\infty} \mathrm{m}(E_k)$.

1. Ja kādam indeksam k_0 ir spēkā $\mathrm{m}(E_{k_0}) < +\infty$, tad no mēra monotonitātes seko, ka $\mathrm{m}(E_k) < +\infty$ jebkuram $k \ge k_0$. Ja $k_0 > 1$, tad, atmetot virknes $(\mathrm{m}(E_k))_{k=1}^{\infty}$ pirmos $k_0 - 1$ locekļus, iegūsim virkni $\big(\mathrm{m}(E_k)\big)_{k=k_0}^{\infty}$, kuras robeža būs vienāda ar virknes $\big(\mathrm{m}(E_k)\big)_{k=1}^{\infty}$ robežu, pie tam $\bigcap\limits_{k=k_0}^{\infty} E_k = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_k$. Tāpēc apskatīsim mērojamas kopas E_k $(k \in \mathbb{N})$, kuras veido dilstošu virkni (1.72), pie tam $\mathrm{m}(E_k) < +\infty$ jebkuram $k \in \mathbb{N}$. Šajā gadījumā, acīmredzot, $\lim\limits_{k\to\infty} \mathrm{m}(E_k) < +\infty$.

Kopas $B_k = E_1 \setminus E_k$ $(k \in \mathbb{N})$ ir mērojamas kā divu mērojamu kopu starpība. Tā kā $B_k = E_1 \setminus E_k$ $(k \in \mathbb{N})$ un $\mathrm{m}(E_1) < +\infty$, tad no mēra monotonitātes seko, ka $\mathrm{m}(B_k) < +\infty$ $(k \in \mathbb{N})$.

Tā kā $E_k \supset E_{k+1}$ $(k \in \mathbb{N})$, tad $E_1 \setminus E_k \subset E_1 \setminus E_{k+1}$ $(k \in \mathbb{N})$, t.i.,

$$B_k \subset B_{k+1} \ (k \in \mathbb{N}). \tag{1.75}$$

Apskatīsim kopu $B = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$. Pierādīsim, ka

$$B = E_1 \setminus E. \tag{1.76}$$

Tiešām,

$$B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_1 \setminus E_k) = E_1 \setminus \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \right) = E_1 \setminus E.$$

Kopa $B = E_1 \setminus E$ ir mērojama kā divu mērojamu kopu starpība. Tā kā $\mathrm{m}(E_1) < +\infty$, tad no mērojamu kopu 5° īpašības izriet

$$\mathrm{m}(B) = \mathrm{m}(E_1) - \mathrm{m}(E). \tag{1.77}$$

No (1.75) seko

$$B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset B_k \subset B_{k+1} \subset \cdots. \tag{1.78}$$

No (1.76) un (1.78), ņemot vērā mēra pusnepārtrauktību no apakšas un mēra 5° īpašību, kā arī nevienādību $\lim\limits_{k\to\infty} \mathrm{m}(E_k) < +\infty$, iegūsim

$$\mathrm{m}(B) = \lim_{k\to\infty} \mathrm{m}(B_k) = \lim_{k\to\infty} \mathrm{m}(E_1 \setminus E_k) = \lim_{k\to\infty} \big(\mathrm{m}(E_1) - \mathrm{m}(E_k)\big) = \mathrm{m}(E_1) - \lim_{k\to\infty} \mathrm{m}(E_k).$$

Tātad

$$\mathrm{m}(B) = \mathrm{m}(E_1) - \lim_{k\to\infty} \mathrm{m}(E_k). \tag{1.79}$$

Saskaņā ar doto $\mathrm{m}(E_1) < +\infty$. Tā kā $E = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_k \subset E_1$ un $\mathrm{m}(E_1) < +\infty$, tad no mēra monotonitātes izriet, ka $\mathrm{m}(E) < +\infty$. Tā kā $\mathrm{m}(E_1) < +\infty$ un $\mathrm{m}(E) < +\infty$, tad no (1.77) seko, ka $\mathrm{m}(B) < +\infty$. Tā kā $\mathrm{m}(B) < +\infty$, $\mathrm{m}(E_1) < +\infty$ un $\lim\limits_{k\to\infty} \mathrm{m}(E_k) < +\infty$, tad (1.77) un (1.79) ir skaitliskas vienādības, no kurām arī izriet (1.73).

2. No 1. punktā pierādītā izriet, ka nevienādība (1.74) ir spēkā, ja $\mathrm{m}(E_k) < +\infty$ vismaz vienam indeksam k. Acīmredzot, šī nevienādība ir spēkā, ja $\mathrm{m}(E_k) = +\infty$ visiem indeksiem k, jo šajā gadījumā $\lim\limits_{k\to\infty} \mathrm{m}(E_k) = +\infty$.◀

1.9. piezīme. 8° īpašībā nosacījums, ka $\mathrm{m}(E_k) < +\infty$ vismaz vienam indeksam k, ir būtisks, lai izpildītos vienādība (1.73). Tiešām, kopas $E_k = [k; +\infty)$ $(k \in \mathbb{N})$ ir mērojamas un veido dilstošu virkni, pie tam $\mathrm{m}(E_k) = +\infty$ jebkuram $k \in \mathbb{N}$. Tad kopa $E = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_k = \emptyset$ ir mērojama, taču vienādība (1.73) nav spēkā, jo

$$\mathrm{m}(E) = \mathrm{m}(\emptyset) = 0 < +\infty = \lim_{n\to\infty} (+\infty) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{m}(E_k).$$

Šis piemērs rāda, ka nevienādība (1.74) var būt arī stingra.

1.5. teorēma. **[Luzina[6] teorēma]** *Ja E ir mērojama kopa, tad jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāda perfekta kopa P, ka $P \subset E$ un* $\mathrm{m}(E \setminus P) < \varepsilon$.

▶ Tā kā E ir mērojama kopa, tad, ņemot vērā mērojamības 1° kritēriju, eksistē tāda slēgta kopa F, ka $F \subset E$ un

$$\mathrm{m}(E \setminus F) < \varepsilon. \tag{1.80}$$

Tā kā E ir slēgta kopa, tad no Kantora[7]-Bendiksona[8] teorēmas (skat. 6.2.9. apakšparagrāfu) izriet $F = P \cup (F \setminus P)$, kur $P = F^{\bullet}$ ir visu kopas E kondensācijas punktu kopa, bet $F \setminus P$ ir ne vairāk kā sanumurējama kopas F visu pārējo punktu kopa. Visu kopas E kondensācijas punktu kopa ir perfekta kopa, tāpēc P ir slēgta kopa. Saskaņā ar mērojamu kopu 2° īpašību P ir mērojama kopa. No minētās īpašības izriet, ka F arī ir mērojama kopa, jo F ir slēgta kopa. Tā kā kopa $F \setminus P$ ir ne vairāk kā sanumurējama, tad no 1.4. teorēmas seko, ka kopa $F \setminus P$ ir mērojama, pie tam $\mathrm{m}(F \setminus P) = 0$. Atzīmēsim, ka

$$E \setminus P = (E \setminus F) \cup (F \setminus P), \quad (E \setminus F) \cap (F \setminus P) = \emptyset, \tag{1.81}$$

pie tam kopas $E \setminus P$, $E \setminus F$ un $F \setminus P$ ir mērojamas saskaņā ar mērojamu kopu 5° īpašību. Tāpēc no (1.81), ņemot vērā Lebega mēra sanumurējamo aditivitāti, iegūsim

$$\mathrm{m}(E \setminus P) = \mathrm{m}(E \setminus F) + \mathrm{m}(F \setminus P) = \mathrm{m}(E \setminus F) + 0 = \mathrm{m}(E \setminus F). \tag{1.82}$$

No (1.80) un (1.82) izriet, ka $\mathrm{m}(E \setminus P) < \varepsilon$.◀

1.6. teorēma. *Kopa E ir mērojama kopa tad un tikai tad, kad jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāda perfekta kopa P, ka $P \subset E$ un* $\mathrm{m}(E \setminus P) < \varepsilon$.

▶ *Nepieciešamības* patiesums izriet no Luzina teorēmas.

Pietiekamības patiesums seko no mērojamības 1° kritērija, ja ņemt vērā, ka jebkura perfekta kopa ir slēgta kopa.◀

1.6. Iekšējais un ārējais Lebega mērs

1° *Kopas E ārējais mērs ir vienāds ar visu vaļējo kopu, kas satur kopu E, mēru kopas infīmu, t.i.,*

$$\mathrm{m}^*(E) = \inf\bigl\{\mathrm{m}(G) : G \supset E,\ G \text{ ir vaļēja kopa}\bigr\}. \tag{1.83}$$

▶ Jāpierāda, ka $\mathrm{m}^*(E) = \inf \Phi$, kur

$$\Phi = \bigl\{\mathrm{m}(G) : G \supset E,\ G \text{ ir vaļēja kopa}\bigr\}.$$

Pieņemsim, ka $\mathrm{m}^*(E) = +\infty$. Apskatīsim patvaļīgu vaļēju kopu G, ka $E \subset G$. Tad no ārējā mēra monotonitātes seko, ka $+\infty = \mathrm{m}^*(E) \le \mathrm{m}^*(G) = \mathrm{m}(G)$, t.i., $\mathrm{m}(G) = +\infty$. Tāpēc $\mathrm{m}^*(E) = +\infty = \inf \Phi$.

Pieņemsim, ka $\mathrm{m}^*(E) < +\infty$. Apskatīsim patvaļīgu vaļēju kopu G, ka $E \subset G$. Tad no ārējā mēra monotonitātes izriet, ka $\mathrm{m}^*(E) \le \mathrm{m}^*(G) = \mathrm{m}(G)$, t.i., $\mathrm{m}^*(E)$ *ir kopas* Φ *minorante*. Apskatīsim patvaļīgu $\varepsilon > 0$. No ārējā mēra 10° īpašības izriet, ka eksistē tāda vaļēja kopa G, ka $\mathrm{m}(G) < \mathrm{m}^*(E) + \varepsilon$. Saskaņā ar infīma kritēriju $\mathrm{m}^*(E) = \inf \Phi$.◀

[6] N. Luzins (*Лузин Николай Николаевич*, 1883-1950) - krievu matemātiķis.
[7] G. Kantors (*Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor*, 1845-1918) - vācu matemātiķis.
[8] I. Bendiksons (*Ivar Otto Bendixson*, 1861-1935) - zviedru matemātiķis.

1.12. definīcija. Par **kopas E iekšējo Lebega mēru** (vienkārši **iekšējo mēru**) sauc visu slēgto kopu, kas iekļaujas kopā E, mēru kopas suprēmu. Kopas E iekšējo Lebega mēru apzīmē ar $\mathrm{m}_*(E)$, t.i.,

$$\mathrm{m}_*(E) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\bigl\{\mathrm{m}(F) : F \subset E,\ F \text{ ir slēgta kopa}\bigr\}.$$

2° *Ja E ir mērojama kopa, tad $\mathrm{m}^*(E) = \mathrm{m}_*(E)$.*

► Tā kā E ir mērojama kopa, tad $\mathrm{m}(E) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{m}^*(E)$. Pierādīsim, ka $\mathrm{m}(E)$ ir kopas

$$\Psi = \bigl\{\mathrm{m}(F) : F \subset E,\ F \text{ ir slēgta kopa}\bigr\}$$

suprēms.

Pieņemsim, ka $\mathrm{m}(E) = +\infty$. Tā kā E ir mērojama kopa, tad saskaņā ar mērojamības 1° kritēriju jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāda slēgta kopa F, ka $F \subset E$ un $\mathrm{m}(E \setminus F) < \varepsilon$. Fiksēsim kādu $\varepsilon_1 > 0$ un apskatīsim attiecīgo kopu F_1. Pierādīsim, ka $\mathrm{m}(F_1) = +\infty$. Pieņemsim pretējo, ka $\mathrm{m}(F_1) < +\infty$. Tā kā $(E \setminus F_1) \cup F_1 = E$, jo $F_1 \subset E$, tad, izmantojot Lebega mēra sanumurējamo pusaditivitāti, atrodam $\mathrm{m}(E) \le \mathrm{m}(E \setminus F_1) + \mathrm{m}(F_1) < \mathrm{m}(F_1) + \varepsilon_1 < +\infty$, t.i., $\mathrm{m}(E) < +\infty$. Ieguvām pretrunu. Tātad pieņēmums nav patiess un $\mathrm{m}(F_1) = +\infty$. Tāpēc $+\infty \in \Psi$. Tātad $\mathrm{m}(E) = +\infty = \sup \Psi$.

Pieņemsim, ka $\mathrm{m}(E) < +\infty$. Apskatīsim patvaļīgu slēgtu kopu F, ka $F \subset E$. No mēra monotonitātes seko, ka $\mathrm{m}(F) \le \mathrm{m}(E)$, t.i., $\mathrm{m}(E)$ *ir kopas* Ψ *mažorante*. Apskatīsim patvaļīgu $\varepsilon > 0$. Tā kā E ir mērojama kopa, tad saskaņā ar mērojamības 1° kritēriju eksistē tāda slēgta kopa F, ka $F \subset E$ un $\mathrm{m}(E \setminus F) < \varepsilon$. Tā kā $\mathrm{m}(E) < +\infty$, tad no mēra 5° īpašības izriet, ka $\mathrm{m}(E \setminus F) = \mathrm{m}(E) - \mathrm{m}(F)$. Tātad $\mathrm{m}(E) - \mathrm{m}(F) < \varepsilon$ jeb $\mathrm{m}(F) > \mathrm{m}(E) - \varepsilon$. No kopas suprēma kritērija seko, ka $\mathrm{m}(E) = \sup \Psi$.

Tā kā $\mathrm{m}(E) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{m}^*(E)$, bet $\mathrm{m}_*(E) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \Psi$, tad $\mathrm{m}_*(E) = \mathrm{m}^*(E)$.◄

Sekas. *Ja E ir mērojama kopa, tad*

$$\mathrm{m}(E) = \sup\bigl\{\mathrm{m}(F) : F \subset E,\ F \textit{ ir slēgta kopa}\bigr\}$$

(skat. arī 26. uzdevumu šīs nodaļas beigās).

3° *Ja $\mathrm{m}^*(E) = \mathrm{m}_*(E) < +\infty$, tad E ir mērojama kopa.*

► Apskatīsim kopas

$$\Phi = \bigl\{\mathrm{m}(G) : G \supset E,\ G \text{ ir vaļēja kopa}\bigr\} \quad \text{un} \quad \Psi = \bigl\{\mathrm{m}(F) : F \subset E,\ F \text{ ir slēgta kopa}\bigr\}.$$

Tā kā $\mathrm{m}_*(E) = \sup \Psi < +\infty$, tad saskaņā ar suprēma kritēriju

1. jebkurai slēgtai kopai F, ka $F \subset E$, ir spēkā $\mathrm{m}(F) \le \mathrm{m}_*(E)$; tā kā $\mathrm{m}_*(E) < +\infty$, tad $\mathrm{m}(F) < +\infty$ jebkurai slēgtai kopai F, ka $F \subset E$;
2. jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāda slēgta kopa F, ka $F \subset E$ un

$$\mathrm{m}(F) > \mathrm{m}_*(E) - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.84}$$

Tā kā $\mathrm{m}^*(E) = \inf \Phi < +\infty$, tad saskaņā ar infīma kritēriju

1. jebkurai vaļējai kopai G, ka $G \supset E$, ir spēkā $\mathrm{m}(G) \geq \mathrm{m}^*(E)$;
2. jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāda vaļēja kopa G, ka $G \supset E$ un
$$\mathrm{m}(G) < \mathrm{m}^*(E) + \frac{\varepsilon}{2}; \tag{1.85}$$
tā kā $\mathrm{m}^*(E) < +\infty$, tad no (1.85) izriet, ka $\mathrm{m}(G) < +\infty$.

No iepriekš teiktā izriet, ka (1.84) un (1.85) ir skaitliskas nevienādības. Tāpēc no (1.85) atņemot (1.84), iegūsim $\mathrm{m}(G) - \mathrm{m}(F) < \mathrm{m}^*(E) - \mathrm{m}_*(E) + \varepsilon = \varepsilon$. Tātad $\mathrm{m}(G) - \mathrm{m}(F) < \varepsilon$. Ņemot vērā, ka $\mathrm{m}(G) < +\infty$, no mēra 5° īpašības seko, ka $\mathrm{m}(G \setminus F) = \mathrm{m}(G) - \mathrm{m}(F)$. Tātad $\mathrm{m}(G \setminus F) < \varepsilon$. Tādējādi jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāda vaļēja kopa G un tāda slēgta kopa F, ka $F \subset E \subset G$ un $\mathrm{m}(G \setminus F) < \varepsilon$. Saskaņā ar mērojamības 2° kritēriju kopa E ir mērojama.◀

4° *Ierobežota kopa E ir mērojama tad un tikai tad, kad $\mathrm{m}^*(E) = \mathrm{m}_*(E)$, t.i., kopas E iekšējais mērs ir vienāds un šīs kopas ārējo mēru.*

▶ Īpašības patiesums seko no 3° īpašības, ja ņemt vērā, ka ierobežotas kopas E mērs ir galīgs.◀

5° *Jebkurai kopai E ir spēkā $\mathrm{m}_*(E) \leq \mathrm{m}^*(E)$, t.i., jebkuras kopas E iekšējais mērs nepārsniedz šīs kopas ārējo mēru.*

▶ Apskatīsim vaļēju kopu G un slēgtu kopu F, ka $F \subset E \subset G$. No mēra monotonitātes izriet, ka $\mathrm{m}(F) \leq \mathrm{m}(G)$. Apskatīsim kopas

$$\Phi = \big\{\mathrm{m}(G) : G \supset E,\ G \text{ ir vaļēja kopa}\big\} \quad \text{un} \quad \Psi = \big\{\mathrm{m}(F) : F \subset E,\ F \text{ ir slēgta kopa}\big\}.$$

Tad $\mathrm{m}^*(E) = \inf \Phi$ un $\mathrm{m}_*(E) = \sup \Psi$. Tā kā $\Psi \leq \Phi$, t.i., $(\Psi; \Phi)$ ir visu reālo skaitļu kopas $\mathbb{R}$ šķēlums, tad $\sup \Psi \leq \inf \Phi$ (skat. 6.1.3. apakšparagrāfu), t.i., $\mathrm{m}_*(E) \leq \mathrm{m}^*(E)$.◀

1.7. Vaļēju un slēgtu kopu Lebega mērs

1.7.1. Vaļēju kopu Lebega mērs

Saskaņā ar 6.1. teorēmu jebkura netukša vaļēja kopa $G \subset \mathbb{R}$ ir vienāda ar ne vairāk kā sanumurējamu tās veidotājintervālu, kas savstarpēji nešķeļas, apvienojumu, t.i.,

$$G = \bigcup_k \delta_k,$$

kur δ_k ir vaļēji intervāli (ierobežoti vai neierobežoti), pie tam $\delta_k \cap \delta_m = \emptyset$ $(k \neq m)$, tad no mēra sanumurējamās aditivitātes izriet, ka

$$\mathrm{m}(G) = \sum_k |\delta_k|,$$

t.i., *jebkuras netukšas vaļējas kopas $G \subset \mathbb{R}$ mērs ir vienāds ar tās veidotājintervālu garumu summu*. Ja G ir ierobežota kopa, tad visi tās veidotājintervāli arī ir ierobežoti, tāpēc šajā gadījumā $\sum\limits_k |\delta_k|$ ir vai nu pozitīvu skaitļu galīga summa, vai arī pozitīvu skaitļu konverģenta rinda.

1.7.2. Slēgtu kopu Lebega mērs

Apskatīsim netukšu ierobežotu slēgtu kopu $F \subset \mathbb{R}$. Pieņemsim, ka $\alpha = \inf F$ un $\beta = \sup F$. Var pierādīt, ka $\alpha, \beta \in F$ un $F \subset [\alpha; \beta]$, pie tam nogrieznis $[\alpha; \beta]$ ir vismazākais nogrieznis, kas satur kopu E. Saskaņā ar 6.3. teorēmu netukša ierobežota slēgta kopa $F \subset \mathbb{R}$ vai nu ir vienāda ar nogriezni $[\alpha; \beta]$, t.i., $F = [\alpha; \beta]$, vai arī ir iegūta no šī nogriežņa, izmetot no tā ne vairāk kā sanumurējamu kopas F blakusintervālu, kas savstarpēji nešķeļas, apvienojumu, t.i.,

$$F = [\alpha; \beta] \setminus \bigcup_k \delta_k,$$

kur δ_k ir kopas F blakusintervāli (kuri ir ierobežoti intervāli, jo F ir ierobežota kopa), pie tam $\delta_k \cap \delta_m = \emptyset$ $(k \neq m)$, tad no mēra sanumurējamās aditivitātes izriet

$$\mathrm{m}(F) = (\beta - \alpha) - \sum_k |\delta_k|.$$

1.7.3. Kantora kopas Lebega mērs

Kantora kopa $\mathcal{P}$ (skat., piemēram, [2]) ir slēgta (un līdz ar to arī mērojama) kopa, jo to iegūst, izmetot no nogriežņa $[0; 1]$ vaļēju kopu

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k = G_1 \cup G_2 \cup \dots = \underbrace{\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)}_{G_1} \cup \underbrace{\left[\left(\frac{1}{9}; \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}; \frac{8}{9}\right)\right]}_{G_2} \cup$$
$$\cup \underbrace{\left[\left(\frac{1}{27}; \frac{2}{27}\right) \cup \left(\frac{7}{27}; \frac{8}{27}\right) \cup \left(\frac{19}{27}; \frac{20}{27}\right) \cup \left(\frac{25}{27}; \frac{26}{27}\right)\right]}_{G_3} \cup \dots,$$

kur

$$\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{9}; \frac{2}{9}\right), \left(\frac{7}{9}; \frac{8}{9}\right), \left(\frac{1}{27}; \frac{2}{27}\right), \left(\frac{7}{27}; \frac{8}{27}\right), \left(\frac{19}{27}; \frac{20}{27}\right), \left(\frac{25}{27}; \frac{26}{27}\right), \dots$$

ir kopas G veidotājintervāli jeb Kantora kopas $\mathcal{P}$ blakusintervāli. Vaļējā kopa G_k $(k \in \mathbb{N})$ ir vienāda ar savstarpēji nešķeļošos n-tā ranga intervālu [2], katra no kuriem garums ir $\frac{1}{3^n}$ un kuru skaits ir 2^{k-1}, apvienojumu. No mēra sanumurējamās aditivitātes izriet

$$\mathrm{m}(G_k) = \frac{2^{k-1}}{3^k} \ (k \in \mathbb{N}).$$

Tā kā kopas G_k $(k \in \mathbb{N})$ arī savstarpēji nešķeļas, tad, vēlreiz izmantojot mēra sanumurējamo aditivitāti, iegūsim

$$\mathrm{m}(G) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}(G_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{3^k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 1. \tag{1.86}$$

Ņemot vērā mēra 5° īpašību, atrodam

$$\mathrm{m}(\mathcal{P}) = \mathrm{m}\big([0; 1] \setminus G\big) = \mathrm{m}\big([0; 1]\big) - \mathrm{m}(G) = 1 - 1 = 0,$$

t.i., *Kantora kopa $\mathcal{P}$ ir nulles mēra kopa.*

1.8. Ierobežotu kopu Lebega mērs

1.2. paragrāfā tika definēts Lebega mērs mērojamām kopām, kuras varēja būt gan ierobežotas, gan neierobežotas. Ierobežotu kopu gadījumā Lebega mēru var definēt, izmantojot citas ekvivalentas pieejas.

1. pieeja. [15], [32].

1. Netukšas ierobežotas vaļējas kopas G Lebega mēru definē kā visu šīs kopas veidotājintervālu garumu summu:
$$\mathrm{m}(G) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_k |\delta_k|.$$
Ja $G = \emptyset$, tad uzskata, ka $\mathrm{m}(G) \stackrel{\text{def}}{=} 0$.

2. Pieņemsim, ka E ir ierobežota kopa.
   (a) Par **kopas E ārējo Lebega mēru** sauc visu ierobežoto vaļējo kopu G, kas satur kopu E, mēru kopas infīmu. Kopas E ārējo Lebega mēru apzīmē ar $\mathrm{m}^*(E)$.
   (b) Tā kā E ir ierobežota kopa, tad eksistē nogrieznis $\triangle = [a; b]$, ka $E \subset \triangle$. Starpību
   $$\mathrm{m}_*(E) \stackrel{\text{def}}{=} b - a - \mathrm{m}^*(\complement_\triangle E),$$
   kur $\complement_\triangle E = \triangle \setminus E$, sauc par **kopas E iekšējo Lebega mēru**. Pierāda, ka iekšējais Lebega mērs ir korekti definēts tajā nozīmē, ka tas nav atkarīgs no nogriežņa $[a; b]$, kas satur doto ierobežoto kopu E, izvēles.

3. Kopu E sauc par **mērojamu Lebega nozīmē kopu**, ja $\mathrm{m}_*(E) = \mathrm{m}^*(E)$, t.i., kopas E iekšējais Lebega mērs ir vienāds ar šīs kopas ārējo Lebega mēru. Ja E ir mērojama Lebega nozīmē kopa, tad
$$\mathrm{m}(E) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{m}_*(E) = \mathrm{m}^*(E)$$
sauc par **kopas E Lebega mēru**.

2. pieeja. [23], [36].

1. Netukšas ierobežotas vaļējas kopas G Lebega mēru definē kā visu šīs kopas veidotājintervālu garumu summu:
$$\mathrm{m}(G) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_k |\delta_k|.$$
Ja $G = \emptyset$, tad uzskata, ka $\mathrm{m}(G) \stackrel{\text{def}}{=} 0$.

2. Ja F ir ierobežota slēgta kopa, tad $F \subset \triangle = [a; b]$, kur $a = \inf F$ un $b = \sup F$. Kopas F Lebega mēru definē šādi:
$$\mathrm{m}(F) \stackrel{\text{def}}{=} b - a - \mathrm{m}\big(\complement_\triangle F\big),$$
kur $\complement_\triangle F = \triangle \setminus E$ ir ierobežota vaļēja kopa.

3. Pieņemsim, ka E ir ierobežota kopa.

(a) Par **kopas E ārējo Lebega mēru** sauc visu ierobežoto vaļējo kopu G, kas satur kopu E, mēru kopas infīmu. Kopas E ārējo Lebega mēru apzīmē ar $\mathrm{m}^*(E)$.

(b) Par **kopas E iekšējo Lebega mēru** sauc visu ierobežoto slēgto kopu F, kas iekļaujas kopā E, mēru kopas suprēmu. Kopas E iekšējo Lebega mēru apzīmē ar $\mathrm{m}_*(E)$.

4. Kopu E sauc par **mērojamu Lebega nozīmē kopu**, ja $\mathrm{m}_*(E) = \mathrm{m}^*(E)$, t.i., kopas E iekšējais Lebega mērs ir vienāds ar šīs kopas ārējo Lebega mēru. Ja E ir mērojama Lebega nozīmē kopa, tad

$$\mathrm{m}(E) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{m}_*(E) = \mathrm{m}^*(E)$$

sauc par **kopas E Lebega mēru**.

Var pārliecināties, ka 1. un 2. pieejā definētie jēdzieni (- ārējais mērs, iekšējais mērs, mērojamība, mērs) ir ekvivalenti iepriekšējos paragrāfos aplūkotajiem attiecīgajiem jēdzieniem ierobežotu kopu gadījumā.

1.9. Mērojamība Žordāna nozīmē

1.9.1. Mērojamas Žordāna nozīmē kopas (īss atkārtojums)

Mērojamas Lebega nozīmē kopas jēdziens vispārina mērojamas Žordāna nozīmē kopas jēdzienu. Atgādināsim galvenos jēdzienus un rezultātus, kas ir saistīti ar lineāru kopu mērojamību Žordāna nozīmē (skat., piemēram, [9]).

1.13. definīcija. Par **vienkāršāko figūru** uz taisnes $\mathbb{R}$ sauc jebkuru ierobežotu intervālu $\langle a; b\rangle$, kur $a, b \in \mathbb{R}$ un $a \leq b$. Par vienkāršākās figūras $\langle a; b\rangle$ **mēru** sauc intervāla $\langle a; b\rangle$ garumu un apzīmē to ar $\mathrm{m}(\langle a; b\rangle)$, t.i.,

$$\mathrm{m}(\langle a; b\rangle) \stackrel{\text{def}}{=} b - a.$$

Par reālu skaitļu intervāliem skat. 6.1.1. apakšparagrāfu.

1.14. definīcija. Saka, ka divas vienkāršākās figūras $\langle a; b\rangle$ un $\langle c; d\rangle$ **nepārklājas viena otrai pāri**, ja tām nav kopīgu iekšējo punktu, t.i., $(a; b) \cap (c; d) = \emptyset$.

1.10. piezīme. Ja divas vienkāršākās figūras nešķeļas, tad tās nepārklājas viena otrai pāri. Apgrieztais apgalvojums nav spēkā, jo, piemēram, vienkāršākās figūras $(1; 3]$ un $[3; 4]$ nepārklājas viena otrai pāri, taču $(1; 3] \cap [3; 4] = \{3\} \neq \emptyset$.

1.15. definīcija. Kopu A sauc par **elementāru figūru**, ja to var izteikt kā galīga skaita vienkāršāko figūru, kas nepārklājas viena otrai pāri, apvienojumu. Par **elementārās figūras A mēru** $\mathrm{m}(A)$ sauc kopu A sastādošo vienkāršāko figūru, kas savstarpēji nepārklājas viena otrai, mēru summu.

1.11. piezīme. Pēdējā definīcija ir korekta tajā nozīmē, ka šī definīcija nav atkarīga no tā, kādā veidā elementāro figūru sasmalcina savstarpēji nepārklājošos vienkāršāko figūru apvienojumā.

1.12. piezīme. Tas, ka elementārās (tai skaitā arī vienkāršākās) figūras A Žordāna mērs tika apzīmēts ar $\mathrm{m}(A)$, nav pretrunā ar iepriekšējos paragrāfos teikto, kuros ar $\mathrm{m}(A)$ tika apzīmēts mērojamas Lebega nozīmē kopas mērs, jo *jebkura elementārā kopa A ir mērojama Lebega nozīmē un tās Lebega mērs ir vienāds ar kopu A sastādošo vienkāršāko figūru (- ierobežotu intervālu!) garumu summu.*

1.16. definīcija. Par **ierobežotas kopas E iekšējo Žordāna mēru** sauc visu elementāro figūru, kas iekļaujas kopā E, mēru kopas suprēmu. Ierobežotas kopas E iekšējo Žordāna mēru apzīmē ar $\mathrm{mes}_*(E)$, t.i.,

$$\mathrm{mes}_*(E) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\bigl\{\mathrm{m}(P) : P \subset E,\ P \text{ ir elementāra figūra}\bigr\}.$$

1.17. definīcija. Par **ierobežotas kopas E ārējo Žordāna mēru** sauc visu elementāro figūru, kas satur kopu E, mēru kopas infīmu. Ierobežotas kopas E ārējo Žordāna mēru apzīmē ar $\mathrm{mes}^*(E)$, t.i.,

$$\mathrm{mes}^*(E) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\bigl\{\mathrm{m}(Q) : E \subset Q,\ Q \text{ ir elementāra figūra}\bigr\}.$$

- *Jebkurai ierobežotai kopai E ir spēkā $0 \le \mathrm{mes}_*(E) \le \mathrm{mes}^*(E) < +\infty$, t.i., jebkuras ierobežotas kopas iekšējais Žordāna mērs nepārsniedz šīs kopas ārējo Žordāna mēru, pie tam kopas E gan iekšējais, gan ārējais Žordāna mērs ir nenegatīvs skaitlis.*

1.18. definīcija. Ierobežotu kopu E sauc par **mērojamu Žordāna nozīmē kopu**, ja $\mathrm{mes}_*(E) = \mathrm{mes}^*(E)$, t.i., kopas E iekšējais Žordāna mērs ir vienāds ar šīs kopas ārējo Žordāna mēru. Ja kopa E ir mērojama Žordāna nozīmē kopa, tad skaitli $\mathrm{mes}_*(E) = \mathrm{mes}^*(E)$ sauc par **kopas E Žordāna mēru** un apzīmē ar $\mathrm{mes}(E)$, t.i.,

$$\mathrm{mes}(E) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{mes}_*(E) = \mathrm{mes}^*(E).$$

Ir spēkā šādi mērojamības Žordāna nozīmē kritēriji.

- *Ierobežota kopa E ir mērojama Žordāna nozīmē kopa tad un tikai tad, kad jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tādas elementārās figūras P un Q, ka $P \subset E \subset Q$ un $\mathrm{m}(Q) - \mathrm{m}(P) < \varepsilon$.*

- *Ierobežota kopa E ir mērojama Žordāna nozīmē kopa tad un tikai tad, kad jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tādas mērojamas Žordāna nozīmē kopas E_1 un E_2, ka $E_1 \subset E \subset E_2$ un $\mathrm{m}(E_2) - \mathrm{m}(E_1) < \varepsilon$.*

- *Ierobežota kopa E ir mērojama Žordāna nozīmē kopa tad un tikai tad, kad kopām*

  $$A = \bigl\{\mathrm{m}(P) : P \subset E,\ P \textit{ ir elementāra figūra}\bigr\}$$

  un

  $$B = \bigl\{\mathrm{m}(Q) : E \subset Q,\ Q \textit{ ir elementāra figūra}\bigr\}$$

  eksistē vienīgs atdalītājskaitlis, kurš ir vienāds ar kopas E mēru $\mathrm{mes}(E)$.

- *Ierobežota kopa E ir mērojama Žordāna nozīmē kopa tad un tikai tad, kad kopas E robežas ∂E Žordāna mērs ir vienāds ar nulli, t.i., $\mathrm{mes}(\partial E) = 0$.*

1.9.2. Mērojamas Žordāna nozīmē kopas mērojamība Lebega nozīmē

2. lemma. *Jebkurai elementārai kopai P un patvaļīgam $\varepsilon > 0$ eksistē tāda slēgta kopa F, ka $F \subset P$ un* $\mathrm{m}(F) > \mathrm{m}(P) - \varepsilon$.

► Saskaņā ar 1.12. piezīmi elementāra kopa P ir mērojama Lebega nozīmē. Tāpēc no kopu mērojamības Lebega nozīmē 1° kritērija izriet, ka eksistē tāda slēgta kopa F, ka $F \subset P$ un $\mathrm{m}^*(P \setminus F) < \varepsilon$. Saskaņā ar mērojamu Lebega nozīmē kopu 2° īpašību slēgtā kopa F ir mērojama Lebega nozīmē. No mērojama Lebega nozīmē kopu 5° īpašības izriet, ka kopa $P \setminus F$ ir mērojama Lebega nozīmē kā mērojamu Lebega nozīmē kopu starpība. Ņemot vērā Lebega mēra definīciju, elementārās kopas P ierobežotību un Lebega mēra 6° īpašību, iegūsim

$$\varepsilon > \mathrm{m}^*(P \setminus F) = \mathrm{m}(P \setminus F) = \mathrm{m}(P) - \mathrm{m}(F),$$

no kurienes seko, ka $\mathrm{m}(F) > \mathrm{m}(P) - \varepsilon$.◄

3. lemma. *Ierobežotas kopas E iekšējais Žordāna mērs nepārsniedz šīs kopas iekšējo Lebega mēru, t.i.,* $\mathrm{mes}_*(E) \le \mathrm{m}_*(E)$.

► Apskatīsim kopas

$$B = \big\{\mathrm{m}(P) : P \subset E,\ P \text{ ir elementāra figūra}\big\} \ \text{ un } \ \Psi = \big\{\mathrm{m}(F) : F \subset E,\ F \text{ ir slēgta kopa}\big\}.$$

Pieņemsim, ka $\varepsilon > 0$. Tā kā $\mathrm{mes}_*(E) = \sup B$, tad eksistē tāda elementārā figūra P, ka $P \subset E$ un

$$\mathrm{m}(P) > \mathrm{mes}_*(E) - \varepsilon. \tag{1.87}$$

No 2. lemmas izriet, ka eksistē tāda slēgta kopa F, ka $F \subset P$ un

$$\mathrm{m}(F) > \mathrm{m}(P) - \varepsilon. \tag{1.88}$$

No $F \subset P$ un $P \subset E$ izriet, ka $F \subset E$. Tā kā $\mathrm{m}_*(E)$, būdams kopas Ψ suprēms, ir šīs kopas mažorante, tad

$$\mathrm{m}_*(E) \ge \mathrm{m}(F). \tag{1.89}$$

No (1.87), (1.88) un (1.87) atrodam

$$\mathrm{m}_*(E) \ge \mathrm{m}(F) > \mathrm{m}(P) - \varepsilon > \mathrm{mes}_*(E) - 2\varepsilon \quad \text{jeb} \quad \mathrm{m}_*(E) > \mathrm{mes}_*(E) - 2\varepsilon.$$

Pārejot pēdējā nevienādībā pie robežas, kad ε tiecas uz 0 no labās puses, iegūsim, ka $\mathrm{m}_*(E) \ge \mathrm{mes}_*(E)$.◄

Līdzīgi pierāda nākamās divas lemmas.

4. lemma. *Jebkurai elementārai kopai Q un patvaļīgam $\varepsilon > 0$ eksistē tāda vaļēja kopa G, ka $Q \subset G$ un* $\mathrm{m}(G) < \mathrm{m}(Q) + \varepsilon$.

5. lemma. *Ierobežotas kopas E ārējais Lebega mērs nepārsniedz šīs kopas ārējo Žordāna mēru, t.i.,* $\mathrm{m}^*(E) \le \mathrm{mes}^*(E)$.

Tagad pierādīsim šī paragrāfa centrālo teorēmu.

1.7. teorēma. *Ja kopa E ir mērojama Žordāna nozīmē, tad tā ir mērojama arī Lebega nozīmē, pie tam kopas E Lebega mērs ir vienāds ar kopas E Žordāna mēru, t.i.,* $\mathrm{m}(E) = \mathrm{mes}(E)$.

► No 1.6. paragrāfa 5° īpašības un 3. un 5. lemmas izriet, ka jebkurai ierobežotai kopai E ir spēkā

$$\mathrm{mes}_*(E) \leq \mathrm{m}_*(E) \leq \mathrm{m}^*(E) \leq \mathrm{mes}^*(E). \tag{1.90}$$

Ja kopa E ir mērojama Žordāna nozīmē, t.i., $\mathrm{mes}_*(E) = \mathrm{mes}^*(E)$, tad no (1.90) izriet, ka

$$\mathrm{mes}_*(E) = \mathrm{m}_*(E) = \mathrm{m}^*(E) = \mathrm{mes}^*(E).$$

Tātad $\mathrm{m}_*(E) = \mathrm{m}^*(E)$, t.i., kopa E ir mērojama Lebega nozīmē, pie tam $\mathrm{m}(E) = \mathrm{mes}(E)$, kur $\mathrm{m}(E) = \mathrm{m}_*(E) = \mathrm{m}^*(E)$ ir kopas E Lebega mērs, bet $\mathrm{mes}(E) = \mathrm{mes}_*(E) = \mathrm{mes}^*(E)$ ir kopas E Žordāna mērs.◄

1.13. piezīme. *Teorēmas apgrieztais apgalvojums nav spēkā,* jo, piemēram, kopa $E = [0;1] \cap \mathbb{Q}$ ir mērojama Lebega nozīmē (jo tā ir nulles mēra Lebega nozīmē kopa), bet nav mērojama Žordāna nozīmē. Tiešām, tā kā

1. jebkura punkta $x \in [0;1]$ patvaļīga apkārtne satur gan kopas E, gan kopas $\complement E$ punktus,
2. jebkuram punktam $x \in \mathbb{R} \setminus [0;1]$ eksistē apkārtne, kas nesatur kopas E punktus,

tad kopas E robeža $\partial E = [0;1]$. Tā kā kopas $[0;1]$ (- vienkāršākās figūras) Žordāna mērs ir vienāds ar 1, tad saskaņā ar mērojamības Žordāna nozīmē kritēriju kopa E nav mērojama Žordāna nozīmē.

Atsevišķos gadījumos pēdējās teorēmas apgrieztā teorēma ir spēkā.

1.8. teorēma. *Ja ierobežotas slēgtas kopas E Lebega mērs ir vienāds ar nulli, tad kopa E ir mērojama Žordāna nozīmē un tās Žordāna mērs arī ir vienāds ar nulli.*

► Tā kā kopas E Lebega mērs ir vienāds ar nulli, tad no 1.1. teorēmas izriet, ka jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē kopas E sanumurējams pārklājums $\overline{S}_E = \{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$, ka

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\delta_k| < \varepsilon. \tag{1.91}$$

Tā kā E ir ierobežota slēgta kopa, tad saskaņā ar Heines-Borela-Lebega lemmu (skat. 10. lpp.) eksistē intervāli $\delta_{k_1}, \delta_{k_2}, \ldots, \delta_{k_s}$, ka $E \subset \bigcup\limits_{i=1}^{s} \delta_{k_i}$. Pieņemsim, ka $\mathbb{N} \ni n \geq \max\limits_{1 \leq i \leq s} k_i$, bet S_n ir rindas $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\delta_k|$ n-tā parciālsumma. Tad, ņemot vērā (1.91), iegūsim $\sum\limits_{i=1}^{s} |\delta_{k_i}| \leq S_n \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\delta_k| < \varepsilon$, no kurienes izriet

$$\sum_{i=1}^{s} |\delta_{k_i}| < \varepsilon. \tag{1.92}$$

Intervālu δ_{k_i} $(i = 1, 2, \ldots, s)$ galapunktus sanumurēsim augošā virknē: $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_t$. Nogriežņu $[a_1; a_2], [a_2; a_3], \ldots, [a_{t-1}; a_t]$ apvienojumu apzīmēsim ar Q. Acīmredzot, Q ir elementārā figūra, pie tam $E \subset Q$ un

$$\mathrm{m}(Q) = \sum_{i=1}^{s} |\delta_{k_i}|. \tag{1.93}$$

No (1.92) un (1.93) izriet, ka

$$\mathrm{m}(Q) < \varepsilon. \tag{1.94}$$

Kopas E ārējais Žordāna mērs $\mathrm{mes}^*(E)$, būdams kopas

$$A = \{\mathrm{m}(Q) : E \subset Q,\ Q \text{ ir elementāra figūra}\}$$

infīms, ir šīs kopas minorante. Tāpēc

$$\mathrm{mes}^*(E) \leq \mathrm{m}(Q). \tag{1.95}$$

No (1.94) un (1.95) seko, ka $\mathrm{mes}^*(E) < \varepsilon$. Pārejot šajā nevienādībā pie robežas, kad ε tiecas uz 0 no labās puses, iegūsim, ka $\mathrm{mes}^*(E) \leq 0$. Tātad $0 \leq \mathrm{mes}_*(E) \leq \mathrm{mes}^*(E) \leq 0$, no kurienes izriet, ka $\mathrm{mes}_*(E) = \mathrm{mes}^*(E) = 0$, t.i., kopa E ir mērojama Žordāna nozīmē, pie tam tās Žordāna mērs $\mathrm{mes}(E) = 0$.◀

1.6. piemērs. Tā kā Kantora kopa $\mathcal{P}$ ir ierobežota slēgta kopa, pie tam tās Lebega mērs ir vienāds ar nulli, tad *Kantora kopa ir mērojama Žordāna nozīmē un tās Žordāna mērs ir vienāds ar nulli*. Tādējādi sanumurējama kopa $E = [0; 1] \cap \mathbb{Q}$ nav mērojama Žordāna nozīmē (skat. 1.13. piezīmi), bet Kantora kopa $\mathcal{P}$, kura ir kontinuāla kopa, ir mērojama Žordāna nozīmē! Atzīmēsim, ka eksistē ierobežotas vaļējas kopas, kas *nav* mērojamas Žordāna nozīmē (skat. 37. uzdevumu šīs nodaļas beigās).

1.10. Noslēguma piezīmes par lineāru kopu mērojamību

Detalizētāk ar šī paragrāfa materiālu var iepazīties [23], [29].

1.10.1. Lineāru kopu mērojamība un Lebega mērs kā skaitļu taisnes $\mathbb{R}$ visu kustību grupas invarianti

1.19. definīcija. Par skaitļu taisnes $\mathbb{R}$ **kustību** sauc jebkuru bijekciju $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ka

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \big|\varphi(x) - \varphi(y)\big| = |x - y|.$$

1.20. definīcija. Lineāras kopas A un B sauc par **kongruentām kopām**, ja eksistē tāda kustība $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ka $\varphi(A) = B$. Ja A un B ir kongruentas kopas, tad raksta $A \cong B$.

Ir spēkā šādi apgalvojumi.

- Visu skaitļu taisnes $\mathbb{R}$ kustību kopa veido komutatīvu grupu attiecībā pret kustību kompozīciju.
- Visu lineāro kopu kopā definētā attieksme $\cong$ ir ekvivalences attieksme.

- Bijekcija $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ir kustība tad un tikai tad, kad eksistē tāds $a \in \mathbb{R}$, ka vai nu $\varphi(x) = x + a$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$, vai arī $\varphi(x) = -x + a$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$.
- Pieņemsim, ka $A \cong B$, t.i., eksistē kustība $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ka $\varphi(A) = B$.
  - Ja $A = \langle \alpha; \beta \rangle$ ir intervāls (ierobežots vai neierobežots, deģenerēts vai nedeģenerēts), tad arī $B = \varphi(A) = \langle \gamma; \delta \rangle$ ir intervāls, pie tam vai nu $\varphi(\alpha) = \gamma$ un $\varphi(\beta) = \delta$, vai arī $\varphi(\alpha) = \delta$ un $\varphi(\beta) = \gamma$.
  - Ja A ir ierobežota kopa, tad arī B ir ierobežota kopa.
  - Ja A ir vaļēja kopa, tad arī B ir vaļēja kopa.
  - Ja A ir slēgta kopa, tad arī B ir slēgta kopa.
  - $\mathrm{m}_*(A) = \mathrm{m}_*(B)$, t.i., kongruentu kopu iekšējie mēri ir vienādi.
  - $\mathrm{m}^*(A) = \mathrm{m}^*(B)$, t.i., kongruentu kopu ārējie mēri ir vienādi.
  - Ja A ir mērojama kopa, tad arī B ir mērojama kopa, pie tam $\mathrm{m}(A) = \mathrm{m}(B)$.

1.10.2. Nemērojamu Lebega nozīmē kopu eksistence

Vai eksistē nemērojamas Lebega nozīmē kopas?

Vispirms mēģināsim atbildēt uz šo jautājumu, salīdzinot visu lineāro kopu kopas apjomu ar visu mērojamo Lebega nozīmē kopu kopas apjomu. Ja pirmais apjoms izrādīsies lielāks par otro apjomu, tad tas nozīmēs, ka nemērojamas Lebega nozīmē kopas eksistē. Tā kā visu reālo skaitļu kopa $\mathbb{R}$ ir kontinuāla, t.i., $|\mathbb{R}| = \mathrm{c}$ (skat. [9]), tad visu kopas $\mathbb{R}$ apakškopu (- lineāro kopu!) kopas $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$ apjoms ir 2^{c}, t.i., $|\mathfrak{P}(\mathbb{R})| = 2^{\mathrm{c}}$. Ar $\mathfrak{L}$ apzīmēsim visu mērojamo Lebega nozīmē kopu. Tā kā $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{P}(\mathbb{R})$, tad $|\mathfrak{L}| \leq |\mathfrak{P}(\mathbb{R})| = 2^{\mathrm{c}}$. Kantora kopa $\mathcal{P}$ ir kontinuāla, t.i., $|\mathcal{P}| = \mathrm{c}$. Tāpēc visu tās apakškopu kopas $\mathfrak{P}(\mathcal{P})$ apjoms ir 2^{c}, t.i., $|\mathfrak{P}(\mathcal{P})| = 2^{\mathrm{c}}$. Tā kā Kantora kopa ir nulles mēra kopa, tad jebkura tās apakškopa arī ir nulles mēra kopa un tāpēc arī mērojama Lebega nozīmē kopa, t.i., $\mathfrak{P}(\mathcal{P}) \subset \mathfrak{L}$. Tāpēc $|\mathfrak{P}(\mathcal{P})| \leq |\mathfrak{L}|$. Tā kā

$$2^{\mathrm{c}} = |\mathfrak{P}(\mathcal{P})| \leq |\mathfrak{L}| \leq |\mathfrak{P}(\mathbb{R})| = 2^{\mathrm{c}},$$

tad $|\mathfrak{L}| = 2^{\mathrm{c}}$, t.i., *visu mērojamo Lebega nozīmē kopu kopas apjoms ir vienāds ar visu lineāro kopu kopas apjomu*, citiem vārdiem sakot, visu mērojamo Lebega nozīmē kopu ir "tik pat daudz", cik visu lineāro kopu. Tāpēc šie spriedumi neļauj konstatēt nemērojamu Lebega nozīmē kopu eksistenci.

Tomēr nemērojamas Lebega nozīmē kopas eksistē. Lai to pamatotu, apskatīsim nemērojamas Lebega nozīmē kopas piemēru[10].

Katram $x \in I = [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ definēsim kopu

$$K_x = \{y \in I : y = x + r,\ r \in \mathbb{Q}\} \subset I.$$

Atzīmēsim, ka

$$\bigcup_{x \in I} K_x = I. \tag{1.96}$$

Tiešām, no vienas puses, tā kā $K_x \subset I$ jebkuram $x \in I$ saskaņā ar kopu K_x konstrukciju, tad $\bigcup\limits_{x \in I} K_x \subset I$. No otras puses, ja $x \in I$, tad $x \in K_x$, jo $x = x + 0$ un $0 \in \mathbb{Q}$. Tātad $I \subset \bigcup\limits_{x \in I} K_x$.

[9] Ar $|A|$ tiek apzīmēts kopas A apjoms, bet ar c - kontinuālas kopas apjoms.

[10] Šo piemēru ir sniedzis itāļu matemātiķis Dž. Vitali (*Giuseppe Vitali*, 1875-1932).

Pierādīsim, ka

$$\forall x, y \in I : K_x \neq K_y \to K_x \cap K_y = \emptyset. \tag{1.97}$$

Pieņemsim, ka $K_x \cap K_y \neq \emptyset$, t.i., eksistē $z \in K_x \cap K_y$. Tad eksistē $r_x \in \mathbb{Q}$ un $r_y \in \mathbb{Q}$, ka $z = x + r_x$ un $z = y + r_y$. Tātad $x = y + r_y - r_x$. Pierādīsim, ka $K_x \subset K_y$. Pieņemsim, ka $t \in K_x$. Tad eksistē $r_t \in \mathbb{Q}$, ka $t = x + r_t$. Iegūsim:

$$t = x + r_t = y + r_y - r_x + r_t = y + r'_t,$$

kur $r'_t = r_y - r_x + r_t \in \mathbb{Q}$. Tātad $t \in K_y$. Līdz ar to ir pierādīts, ka $K_x \subset K_y$. Analoģiski pierāda, ka $K_y \subset K_x$. Tādējādi $K_x = K_y$. Saskaņā ar kontrapozīcijas likumu (1.97) ir patiess apgalvojums.

No (1.96) un (1.97) izriet, ka visu savstarpēji dažādo kopu K_x $(x \in I)$ saime veido nogriežņa I sadalījumu. Tātad nogrieznī I ir definēta ekvivalences attieksme, kuras ekvivalences klases sakrīt ar savstarpēji dažādajām kopām K_x $(x \in I)$. Katrā ekvivalences klasē izvēlēsimies kādu elementu ξ_x un apskatīsim kopu $A = \{\xi_x\}$. Atzīmēsim, ka $A \subset I$ saskaņā ar kopas A konstrukciju. Pierādīsim, ka *A ir nemērojama Lebega nozīmē kopa.* Pieņemsim pretējo, ka A ir mērojama Lebega nozīmē kopa.

Visus nogriežņa $[-1; 1]$ racionālos punktus sanumurēsim virknē: $r_0 = 0, r_1, r_2, \ldots$. Apskatīsim kopas

$$A_k = \{x + r_k : x \in A\} \subset \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right] \ (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Atzīmēsim, ka $A_0 = A$, pie tam kopas A_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ ir savstarpēji kongruentas. Tā kā kopas A_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ ir kongruentas mērojamai kopai A, tad šīs kopas arī ir mērojamas un tām ir viens un tas pats Lebega mērs:

$$\mathrm{m}(A_k) = \mathrm{m}(A) = \alpha \ (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Apskatīsim kopu

$$T = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k.$$

Saskaņā ar mērojamu kopu 1° īpašību kopa T ir mērojama kā mērojamu kopu sanumurējams apvienojums.

Pierādīsim, ka

$$I = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k = T. \tag{1.98}$$

Pieņemsim, ka $x \in I = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$. Tad $x \in K_x$. Tā kā $\xi_x \in K_x$, tad $\xi_x = x + r'$, kur $r' \in \mathbb{Q}$. Atzīmēsim, ka $\xi_x - x = r' \in [-1; 1]$, jo $\xi_x \in I = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ un $x \in I = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$. Tāpēc arī $r'' = -r' \in [-1; 1]$. Tātad r'' ir racionāls skaitlis, kas pieder nogrieznim $[-1; 1]$. Tāpēc eksistē $m \in \{0; 1; 2; \ldots\}$, ka $r'' = r_m$. Tātad $x = \xi_x - r' = \xi_x + r'' = \xi_x + r_m$, t.i., $x \in A_m \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k = T$.

Pierādīsim, ka

$$A_n \cap A_m = \emptyset \ (n \neq m; \ n, m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1.99}$$

Pieņemsim pretējo, ka eksistē divi dažādi indeksi n un m, ka $A_n \cap A_m \neq \emptyset$. Tātad eksistē $z \in A_n \cap A_m$, t.i., $z = x_n + r_1$ un $z = x_m + r_2$, kur $x_n, x_m \in A \subset I$, bet r_1 un r_2 ir

divi dažādi racionāli skaitļi, kas pieder nogrieznim $[-1;1]$. Tā kā $x_n + r_1 = x_m + r_2$, tad x_n un x_m ir dažādi kopas A elementi, t.i., x_n un x_m pieder dažādām iepriekš apskatītās ekvivalences klasēm. Taču, tā kā $x_n - x_m = r_2 - r_1 \in \mathbb{Q}$, t.i., elementu x_n un x_m starpība ir racionāls skaitlis, tad x_n un x_m pieder vienai ekvivalences klasei. Ieguvām pretrunu. Tātad pieņēmums nav patiess un (1.99) ir patiess apgalvojums.

No (1.98), ņemot vērā Lebega mēra monotonitāti un sanumurējamo pusaditivitāti, iegūsim

$$1 = \mathrm{m}\left(\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]\right) = \mathrm{m}(I) \le \mathrm{m}(T) = \mathrm{m}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}(A_k)$$

jeb

$$1 \le \alpha + \alpha + \alpha + \cdots . \tag{1.100}$$

Tā kā α ir ierobežotas kopas A Lebega mērs, tad α ir nenegatīvs reāls skaitlis. Atzīmēsim, ka $\alpha \ne 0$. Tiešām, ja pieņemt pretējo, ka $\alpha = 0$, tad no (1.100) iegūsim aplamu izteikumu $1 \le 0$. Tātad *α ir pozitīvs skaitlis.*

No (1.99), ņemot vērā Lebega mēra sanumurējamo aditivitāti, iegūsim

$$\mathrm{m}(T) = \mathrm{m}\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{m}(A_k) = \alpha + \alpha + \alpha + \cdots = +\infty,$$

jo α ir pozitīvs skaitlis. Tā kā

$$A_k \subset \left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right] \ (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

tad arī

$$T = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \subset \left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right].$$

No Lebega mēra monotonitātes izriet, ka

$$\mathrm{m}(T) \le \mathrm{m}\left(\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]\right) = 3,$$

t.i., $\mathrm{m}(T) < +\infty$. Ieguvām pretrunu. Tātad pieņēmums, ka A ir mērojama Lebega nozīmē kopa, ir aplams. Tādējādi ir pierādīts, ka kopa A ir nemērojama Lebega nozīmē kopa.

1.14. piezīme. Ja iepriekš aplūkoto ekvivalences attieksmi definēt nevis nogrieznī $I = \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$, bet patvaļīgā pozitīva mēra kopā E, tad, spriežot analoģiski, var pierādīt, ka kopa E satur nemērojamu Lebega nozīmē apakškopu A. Tātad *jebkura pozitīva mēra kopa satur nemērojamu Lebega nozīmē apakškopu.*

1.15. piezīme. Nemērojamas Lebega nozīmē kopas eksistence ļauj apgalvot, ka ārējā Lebega mēra 9° īpašības: *jebkurai kopai E un patvaļīgam $\varepsilon > 0$ eksistē vaļēja kopa G, ka $E \subset G$ un $\mathrm{m}^*(G) \le \mathrm{m}^*(E) + \varepsilon$,* izpildīšanās vēl negarantē šādas īpašības izpildīšanos: *jebkurai kopai E un patvaļīgam $\varepsilon > 0$ eksistē vaļēja kopa G, ka $E \subset G$ un $\mathrm{m}^*(G \setminus E) < \varepsilon$.* Pēdējā īpašība piemīt tikai mērojamām Lebega nozīmē kopām (skat. arī 40. uzdevumu šīs nodaļas beigās).

1.16. piezīme. Iepriekš aplūkotās kopas A_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ savstarpēji nešķeļas un ir nemērojamas Lebega nozīmē, pie tam

$$0 < \mathrm{m}^*(A_k) = \alpha \leq +\infty.$$

Tāpēc

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{m}^*(A_k) = +\infty.$$

Savukārt kopai

$$T = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \subset \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$$

ir galīgs pozitīvs ārējais Lebega mērs. Līdz ar to (nemērojamu Lebega nozīmē kopu) ārējam Lebega mēram nepiemīt sanumurējamās aditivitātes īpašība. Kā jau iepriekš tika pierādīts, tad

$$\mathrm{m}^*(T) = \mathrm{m}^*\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) < \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{m}^*(A_k),$$

t.i., ārējā Lebega mēra sanumurējamās pusaditivitātes īpašībā (skat. ārējā Lebega mēra 5° īpašību) nevienādība var būt arī stingra.

Līdzīgi var pamatot, ka (nemērojamu Lebega nozīmē kopu) ārējam Lebega mēram nepiemīt galīgās aditivitātes īpašība. Tiešām, ja atrast tādu $s \in \mathbb{N}$, ka $s\alpha > 3$, un apskatīt kopu $\widetilde{T} = \bigcup_{k=0}^{s} A_k$, tad

$$\mathrm{m}^*(\widetilde{T}) \leq \mathrm{m}^*(T) \leq 3,$$

taču

$$\sum_{k=0}^{s} \mathrm{m}^*(A_k) = s\alpha > 3.$$

1.10.3. Mērojamības problēma

Nemērojamu Lebega nozīmē kopu eksistence rada vairākus jautājumus. Vai mērojamība Lebega nozīmē ir pietiekami "laba"? Vai mērojamību Lebega nozīmē var "uzlabot" tā, lai katra lineāra kopa būtu mērojama? Precizēsim problēmas nostādni.

Mērojamības "grūtā" problēma[11]. Vai var katrai lineārai ierobežotai kopai E piekārtot nenegatīvu skaitli $\mu(E)$ - kopas E mēru tā, lai izpildītos šādi nosacījumi.

1. Ja $E = [0; 1]$, tad $\mu(E) = 1$.
2. Ja A un B ir kongruentas kopas, tad $\mu(A) = \mu(B)$.
3. Ja E ir ne <u>vairāk kā sanumurējams</u> savstarpēji nešķeļošos kopu E_k apvienojums, tad

$$\mu(E) = \sum_{k} \mu(E_k).$$

[11] Terminu *"mērojamības "grūtā" problēma"* izmantojam, sekojot [23].

1.9. teorēma. *Mērojamības "grūtajai" problēmai nav neviena atrisinājuma.*

► Pieņemsim pretējo, ka mērojamības "grūtajai" problēmai eksistē atrisinājums, t.i., jebkurai lineārai ierobežotai kopai E var piekārtot nenegatīvu skaitli $\mu(E)$, ka izpildās 1., 2. un 3. nosacījums.

Vispirms pierādīsim šādu apgalvojumu: ja A un B ir lineāras ierobežotas kopas, pie tam $A \subset B$, tad $\mu(A) \leq \mu(B)$. Tiešām, tā kā $B = A \cup (B \setminus A)$ un $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$, tad no 3. nosacījuma izriet $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$. Tā kā $\mu(B \setminus A)$ ir nenegatīvs skaitlis, tad $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Iepriekšējā apakšparagrāfā tika konstruētas savstarpēji nešķeļošās un savstarpēji kongruentas ierobežotas kopas A_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, ka

$$\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \subset \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right].$$

Ņemot vērā 3. nosacījumu un iepriekš pierādīto, iegūsim

$$\mu\left(\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]\right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k) \leq \mu\left(\left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]\right). \tag{1.101}$$

Tā kā kopas A_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ ir savstarpēji kongruentas, tad tām ir viens un tas pats mērs. Pieņemsim, ka

$$\mu(A_k) = \alpha \ (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1.102}$$

Nogrieznis $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ ir kongruents nogrieznim $[0; 1]$, tāpēc no 1. nosacījuma izriet

$$\mu\left(\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]\right) = \mu([0; 1]) = 1. \tag{1.103}$$

Tā kā nogrieznis $\left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$ ir ierobežota kopa, tad

$$\mu\left(\left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]\right) < +\infty. \tag{1.104}$$

No (1.101), (1.102), (1.103) un (1.104) izriet

$$1 \leq \alpha + \alpha + \alpha + \cdots < +\infty. \tag{1.105}$$

Taču neeksistē tāds nenegatīvs skaitlis α, kurš apmierinātu (1.105). Pretruna. Tātad pieņēmums nav patiess un mērojamības "grūtajai" problēmai nav atrisinājuma.◄

1.17. piezīme. Mērojamības "grūtās" problēmas formulējumā tika apskatītas tikai ierobežotas kopas. Vai šai problēmai eksistēs atrisinājums, ja apskatīt visas lineārās kopas? Atbilde, acīmredzot, ir noliedzoša. Tiešām, ja šāds atrisinājums eksistētu, tad tas derētu arī ierobežotu kopu gadījumā, kas nav iespējams saskaņā ar pēdējo teorēmu.

Apskatīsim mērojamības "vieglo" problēmu, kuras nosacījumi ir vispārīgāki par mērojamības "grūtās" problēmas nosacījumiem.

Mērojamības "vieglā" problēma[12]. Vai var katrai lineārai ierobežotai kopai E piekārtot nenegatīvu skaitli $\mu(E)$ - kopas E mēru tā, lai izpildītos šādi nosacījumi.

[12] Terminu *"mērojamības "vieglā" problēma"* izmantojam, sekojot [23].

1. Ja $E = [0; 1]$, tad $\mu(E) = 1$.
2. Ja A un B ir kongruentas kopas, tad $\mu(A) = \mu(B)$.
3. Ja E ir galīga skaita savstarpēji nešķeļošos kopu $E_1, E_2, \ldots, E_n$ apvienojums, tad

$$\mu(E) = \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k).$$

Izrādās, ka, atšķirībā no mērojamības "grūtās" problēmas, mērojamības "vieglajai" problēmai eksistē atrisinājums.

1.10. teorēma. [**Banaha**[13] **teorēma**] *Mērojamības "vieglajai" problēmai eksistē atrisinājums, pie tam tas nav noteikts viennozīmīgi.*

1.18. piezīme. Atgriezīsimies pie iepriekš formulētā jautājuma: vai mērojamība Lebega nozīmē ir pietiekami "laba"? Minēsim dažus argumentus, kas ļauj sniegt apstiprinošu atbildi uz šo jautājumu. Pieņemsim, ka ir zināms kāds mērojamības "vieglās" problēmas atrisinājums, t.i., attēlojums $\mu : \mathfrak{I} \to \mathbb{R}^+$ no visu lineāro ierobežoto kopu saimes $\mathfrak{I}$ uz visu nenegatīvo reālo skaitļu kopu $\mathbb{R}^+$, ka izpildās mērojamības "vieglās" problēmas 1., 2. un 3. nosacījums. Tad ir spēkā šādi apgalvojumi.

- Ja $E = \langle a; b\rangle$ ir ierobežots intervāls, tad $\mu(E) = b - a$.
- Ja $A, B \in \mathfrak{I}$ un $A \subset B$, tad $\mu(A) \leq \mu(B)$.
- Ja G ir ierobežota vaļēja kopa ar galīgu skaitu veidotājintervālu $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, tad $\mu(G) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(\delta_k)$.
- Eksistē mērojamības "vieglā" uzdevuma atrisinājums μ, ka jebkurai vaļējai kopai G ar veidotājintervāliem δ_k, kur indekss k pieņem ne vairāk kā sanumurējamu apjomu vērtību, ir spēkā $\mu(G) = \sum\limits_{k} \mu(\delta_k)$. Šādu attēlojumu μ sauc par mērojamības "vieglā" uzdevuma **regulāru** atrisinājumu.
- Ja μ ir patvaļīgs mērojamības "vieglā" uzdevuma regulārs atrisinājums, tad jebkurai ierobežotai mērojamai Lebega nozīmē kopai E ir spēkā $\mu(E) = \mathrm{m}(E)$, kur $\mathrm{m}(E)$ ir kopas E Lebega mērs.

No pēdējā apgalvojuma izriet, ka mērojamība Lebega nozīmē zināmā mērā ir vienīgs mērojamības problēmas atrisinājums, ja pieprasīt dažu samērā dabisku nosacījumu izpildīšanos, piemēram, lai jebkuras ierobežotas vaļējas kopas mērs būtu vienāds ar tās veidotājintervālu garumu summu.

1.11. Uzdevumi

Visos zemāk minētajos uzdevumos tiek aplūkotas lineāras kopas un ar kopu mērojamību tiek saprasta kopu mērojamība Lebega nozīmē.

1. Pierādīt 1.1. teorēmu.

[13] S. Banahs (*Stefan Banach*, 1892-1945) - poļu matemātiķis, viens no funkcionālanalīzes pamatlicējiem.

2. Pierādīt *mazo μ-pārklājuma lemmu*: ja $\triangle = \langle c; d\rangle$ ir patvaļīgs intervāls, tad jebkuriem $\varepsilon > 0$ un $\mu > 0$ eksistē ierobežoti vaļēji intervāli $\triangle_1, \triangle_2, \ldots, \triangle_t$, ka

   1) $\triangle \subset \bigcup\limits_{i=1}^{t} \triangle_i$;

   2) $|\triangle_i| < \mu$ jebkuram $i = 1, 2, \ldots, t$;

   3) $\sum\limits_{i=1}^{t} |\triangle_i| < |\triangle| + \varepsilon$.

3. Izmantojot mazo pārklājuma lemmu, pierādīt *lielo μ-pārklājuma lemmu*: patvaļīgam kopas E pārklājumam $S_E = \{\gamma_m\}$ un jebkuriem $\varepsilon > 0$ un $\mu > 0$ eksistē kopas E μ-pārklājums $S_E^\mu = \{\delta_k\}$, ka

$$\sum_k |\delta_k| \leq \sum_m |\gamma_m| + \varepsilon; \tag{1.106}$$

   ja $\sum\limits_m |\gamma_m| < +\infty$, tad nevienādībā (1.106) zīmi $\leq$ var aizstāt ar $<$.

4. Izmantojot lielo pārklājuma lemmu, pierādīt 1.2. teorēmu.

5. Pierādīt 1.3. teorēmu.

6. Pierādīt, ka jebkuram nenegatīvam reālam skaitlim α var atrast tādu neierobežotu kopu E, ka $\mathrm{m}^*(E) = \alpha$.

7. Pierādīt: ja $\mathrm{m}^*(A) = 0$, tad jebkurai kopai E ir spēkā vienādības

$$\mathrm{m}^*(E \cup A) = \mathrm{m}^*(E) \ \text{ un } \ \mathrm{m}^*(E \setminus A) = \mathrm{m}^*(E).$$

8. Pierādīt: ja kopai E eksistē vismaz viens iekšējais punkts, tad $\mathrm{m}^*(E) > 0$.

9. Pierādīt: ja $B \subset A$ un $\mathrm{m}^*(B) < +\infty$, tad

$$\mathrm{m}^*(A \setminus B) \geq \mathrm{m}^*(A) - \mathrm{m}^*(B).$$

10. Atrast kopas E Lebega mēru, ja

    (a)
$$E = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup [3; 4) \cup (4; 7);$$

    (b)
$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}; \frac{1}{2^{n-1}}\right];$$

    (c)
$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{20}; \frac{1}{n} + \frac{1}{20}\right);$$

    (d)
$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{20}; \frac{1}{2^n} + \frac{1}{20}\right).$$

11. Pierādīt, ka dotās nogriežņa $[0;1]$ apakškopas ir mērojamas Lebega nozīmē un atrast to Lebega mēru:

    (a) kopa, kas sastāv no visiem tiem un tikai tiem nogriežņa $[0;1]$ punktiem, kuru pieraksts decimāldaļskaitlī nesatur ciparu 7;

    (b) kopa, kas sastāv no visiem tiem un tikai tiem nogriežņa $[0;1]$ punktiem, kuru pieraksts decimāldaļskaitlī satur ciparu 7;

    (c) kopa, kas sastāv no visiem tiem un tikai tiem nogriežņa $[0;1]$ punktiem, kuru pieraksts decimāldaļskaitlī satur visus ciparus no 1 līdz 9.

12. Apskatīsim patvaļīgu pozitīvu skaitli p. Pieņemsim, ka E ir mērojama kopa, pie tam $\mathrm{m}(E) = p$. Pierādīt:

    (a) ja E ir ierobežota kopa, tad jebkuram pozitīvam skaitlim q, ka $0 < q < p$, eksistē mērojama kopa $\widetilde{E}$, ka $\widetilde{E} \subset E$ un $\mathrm{m}(\widetilde{E}) = q$;

    (b) ja E ir ierobežota kopa, tad jebkuram pozitīvam skaitlim q, ka $0 < q < p$, eksistē perfekta kopa $\widetilde{E}$, ka $\widetilde{E} \subset E$ un $\mathrm{m}(\widetilde{E}) = q$;

    (c) abi iepriekš minētie apgalvojumi ir spēkā arī tad, ja E ir neierobežota kopa.

13. Pierādīt, ka jebkuram skaitlim a, ka $0 \leq a < 1$, eksistē tāda perfekta nekur neblīva[14] nogriežņa $[0;1]$ apakškopa E, ka $\mathrm{m}(E) = a$. Vai nogriežņa $[0;1]$ nekur neblīvu perfektu apakškopu sanumurējama apvienojuma mērs var būt vienāds ar 1?

14. Pierādīt, ka jebkura pozitīva mēra kopa ir kontinuāla kopa.

15. Pierādīt, ka jebkura netukša slēgta nulles mēra kopa ir nekur neblīva kopa.

16. Pieņemsim, ka E ir nulles mēra kopa.

    (a) Vai kopas E slēgums ir nulles mēra kopa?

    (b) Vai kopas E slēgums ir nulles mēra kopa, ja E ir nekur neblīva kopa?

17. Pieņemsim, ka E ir pozitīva galīga mēra kopa. Pierādīt, ka eksistē tādi kopas E punkti, ka attālums starp tiem ir iracionāls skaitlis.

18. Pieņemsim, ka E ir ierobežota mērojama kopa ar pozitīvu mēru. Pierādīt, ka eksistē tādi kopas E punkti, ka attālums starp tiem ir racionāls skaitlis. Vai pēdējais apgalvojums ir spēkā, ja E ir neierobežota mērojama kopa ar pozitīvu galīgu mēru?

19. (a) Pieņemsim, ka E_1 un E_2 ir tādas nogriežņa $[0;1]$ mērojamas apakškopas, ka $\mathrm{m}(E_1) + \mathrm{m}(E_2) > 1$. Pierādīt, ka $\mathrm{m}(E_1 \cap E_2) > 0$.

    (b) Pieņemsim, ka $E_1, E_2, \ldots, E_n$ ir tādas nogriežņa $[0;1]$ mērojamas apakškopas, ka $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{m}(E_k) > n - 1$. Pierādīt, ka $\mathrm{m}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} E_k\right) > 0$.

20. Pieņemsim, ka E ir nemērojama kopa, bet A ir nulles mēra kopa. Pierādīt, ka kopa $E \cap \complement A$ ir nemērojama.

21. Pierādīt, ka kopa E ir mērojama tad un tikai tad, kad eksistē tāda G_δ-kopa A, ka $E \subset A$ un $\mathrm{m}^*(A \setminus E) = 0$.

[14] Par nekur neblīvām kopām $E \subset \mathbb{R}$ skat. 6.2.6. apakšparagrāfu.

22. Pierādīt, ka kopa E ir mērojama tad un tikai tad, kad eksistē tāda F_σ-kopa B, ka $B \subset E$ un $\mathrm{m}^*(E \setminus B) = 0$.

23. Pierādīt, ka kopa E ir mērojama tad un tikai tad, kad eksistē tāda G_δ-kopa A un tāda F_σ-kopa B, ka $B \subset E \subset A$ un $\mathrm{m}^*(A \setminus B) = 0$.

24. Pieņemsim, ka E ir ierobežota kopa, pie tam $E \subset \triangle$, kur $\triangle = [a; b]$. Pierādīt, ka

$$\mathrm{m}_*(E) = b - a - \mathrm{m}^*(\complement_\triangle E),$$

kur $\complement_\triangle E = [a; b] \setminus E$.

25. Pieņemsim, ka E ir ierobežota kopa, pie tam $E \subset \Delta$, kur $\Delta = [a; b]$. Pierādīt, ka kopa E ir mērojama tad un tikai tad, kad

$$\mathrm{m}^*(E) + \mathrm{m}^*(\complement_\Delta E) = b - a.$$

26. Pierādīt 1.6. paragrāfa 2° īpašības seku vispārinājumu: ja E ir mērojama kopa, tad

$$\mathrm{m}(E) = \sup\bigl\{\mathrm{m}(F) : F \subset E,\ F \text{ ir ierobežota slēgta kopa}\bigr\}.$$

27. (a) Pierādīt, ka, ja kopai E ir spēkā $\mathrm{m}^*(E) < +\infty$ un

$$\mathrm{m}^*(E) = \sup\bigl\{\mathrm{m}(F) : F \subset E,\ F \text{ ir slēgta kopa}\bigr\},$$

tad E ir mērojama kopa.

(b) Pierādīt, ka pēdējā apgalvojumā nosacījums $m^*(E) < +\infty$ ir būtisks, t.i., ja $\mathrm{m}^*(E) = +\infty$ un izpildās iepriekš minētā vienādība, tad kopa E var arī nebūt mērojama (*norādījums:* aplūkot kopu $E = A \cup [\frac{1}{2}; +\infty)$, kur A ir 1.10.2. apakšparagrāfā apskatītā nemērojamā Lebega nozīmē kopa).

(c) Pierādīt, ka, ja G ir ierobežota vaļēja kopa, tad jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē slēgta kopa F, $F \subset G$, ka $\mathrm{m}^*(F) > \mathrm{m}^*(G) - \varepsilon$ un $\mathrm{m}^*(G \setminus F) = \mathrm{m}^*(G) - \mathrm{m}^*(F)$ (*norādījums:* pierādījumā neizmantot kopu F un G mērojamību).

(d) Konstruēt nemērojamu kopu E, ka $\mathrm{m}_*(E) = \mathrm{m}^*(E) = +\infty$.

28. Apskatīsim mērojamu Lebega nozīmē kopu E, ka $0 \in E$ un jebkuram $\delta > 0$ ir spēkā $\mathrm{m}\bigl(E \cap (-\delta; \delta)\bigr) > 0$. Pierādīt, ka eksistē tāda perfekta kopa P, $P \subset E$, ka jebkuram $\delta > 0$ ir spēkā $\mathrm{m}\bigl(P \cap (-\delta; \delta)\bigr) > 0$ (*norādījums:* izmantot 12. uzdevumu).

29. Pierādīt: ja $E_1 \subset E_2$, tad $\mathrm{m}_*(E_1) \le \mathrm{m}_*(E_2)$.

30. Pierādīt: ja E ir ne vairāk kā sanumurējams savstarpēji nešķeļošos kopu E_k apvienojums, tad

$$\mathrm{m}_*(E) \ge \sum_k \mathrm{m}_*(E_k).$$

Vai pēdējā nevienādība izpildīsies, ja atmest nosacījumu, ka kopas E_k savstarpēji nešķeļas?

31. Pierādīt, ka jebkurām kopām E_1 un E_2 ir spēkā šādas nevienādības:

(a)

$$\mathrm{m}_*(E_1 \cup E_2) + \mathrm{m}_*(E_1 \cap E_2) \ge \mathrm{m}_*(E_1) + \mathrm{m}_*(E_2);$$

(b)
$$\mathrm{m}^*(E_1 \cup E_2) + \mathrm{m}^*(E_1 \cap E_2) \leq \mathrm{m}^*(E_1) + \mathrm{m}^*(E_2).$$

32. Pieņemsim, ka A un B ir mērojamas kopas, kurām nav kopīgu punktu. Pierādīt, ka jebkurai kopai E ir spēkā šādas vienādības:

(a)
$$\mathrm{m}_*\big(E \cap (A \cup B)\big) = \mathrm{m}_*(E \cap A) + \mathrm{m}_*(E \cap B);$$

(b)
$$\mathrm{m}^*\big(E \cap (A \cup B)\big) = \mathrm{m}^*(E \cap A) + \mathrm{m}^*(E \cap B).$$

33. Pierādīt 1.12. piezīmē formulēto apgalvojumu.

34. Pierādīt 4. lemmu 39. lappusē.

35. Pierādīt 5. lemmu 39. lappusē.

36. Kopu E sauc par **mērojamu Karateodori**[15] **nozīmē**, ja jebkurai kopai A ir spēkā vienādība
$$\mathrm{m}^*(A) = \mathrm{m}^*(A \cap E) + \mathrm{m}^*(A \cap \complement E).$$
Pierādīt, ka kopa E ir mērojama Lebega nozīmē tad un tikai tad, kad tā ir mērojama Karateodori nozīmē.

37. *Nemērojamas Žordāna nozīmē ierobežotas vaļējas kopas piemērs.* Sanumurēsim intervāla $(0;1)$ racionālos punktus virknē $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ un apskatīsim kādu δ, ka $0 < \delta < 1$. Pieņemsim, ka $(a_1; b_1)$ ir intervāla $(0;1)$ apakšintervāls ar centru punktā r_1 un garumu, kas ir mazāks par $\frac{\delta}{2}$. Ar n_2 apzīmēsim vismazāko naturālo skaitli, ka $r_{n_2} \notin (a_1; b_1)$. Pieņemsim, ka $(a_2; b_2)$ ir intervāla $(0;1)$ apakšintervāls ar centru punktā r_{n_2} un garumu, kas ir mazāks par $\frac{\delta}{2^2}$. Turpinot šo konstrukciju, iegūsim intervāla $(0;1)$ savstarpēji nešķeļošos apakšintervālu virkni
$$(a_1; b_1), (a_2; b_2), \ldots, (a_n; b_n), \ldots\ ,$$
pie tam šīs virknes intervālu garumi ir mazāki attiecīgi par
$$\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2^2}, \ldots, \frac{\delta}{2^n}, \ldots\ .$$
Apskatīsim kopu
$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n; b_n) \subset (0;1).$$
Acīmredzot, kopa G ir ierobežota un vaļēja. Pierādīt, ka kopa G nav mērojama Žordāna nozīmē (*norādījums*: pierādīt, ka $\mathrm{mes}(Q) - \mathrm{mes}(P) > 1 - \delta$, kur P un Q ir patvaļīgas elementārās figūras, ka $P \subset G \subset Q$).

38. Pierādīt kopu mērojamības Lebega nozīmē *Valē-Pusēna kritēriju*: kopa E ar galīgu ārējo mēru ir mērojama tad un tikai tad, kad jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē kopa H, kas ir vienāda ar intervālu galīgu apvienojumu, ka $\mathrm{m}^*(E \triangle H) < \varepsilon$, kur $E \triangle H = (E \setminus H) \cup (H \setminus E)$ ir kopu E un H simetriskā starpība (par kopu simetrisko starpību skat., piemēram, [2]).

[15] K. Karateodori (*Constantin Carathéodory*, 1873-1950) - grieķu matemātiķis. Par kopu mērojamības Lebega nozīmē teorijas izklāstu, balstoties uz mērojamas Karateodori nozīmē kopas jēdzienu, skat. [11], [25].

39. Pierādīt, ka šādi apgalvojumi ir ekvivalenti.

    (a) Kopa E ir mērojama Lebega nozīmē.

    (b) Jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāda mērojama Lebega nozīmē kopa A, ka $A \supset E$ un $\mathrm{m}^*(A \setminus E) < \varepsilon$.

    (c) Jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāda mērojama Lebega nozīmē kopa B, ka $B \subset E$ un $\mathrm{m}^*(E \setminus B) < \varepsilon$.

    (d) Eksistē mērojamu kopu virknes $\big(\mathrm{m}(A_n)\big)_{n=1}^{\infty}$ un $\big(\mathrm{m}(B_n)\big)_{n=1}^{\infty}$, ka $A_n \subset E \subset B_n$ $(n \in \mathbb{N})$ un
    $$\mathrm{m}\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right) = 0.$$

    (e) Eksistē perfektu kopu virkne $\big(\mathrm{m}(P_n)\big)_{n=1}^{\infty}$, ka $P_n \subset E$ $(n \in \mathbb{N})$ un
    $$\mathrm{m}\left(E \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n\right)\right) = 0.$$

40. Pierādīt, ka patvaļīgai kopai E ir spēkā šādi apgalvojumi:

    (a) jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē vaļēja kopa G, $E \subset G$, ka jebkurai mērojamai kopai H no $H \subset G \setminus E$ seko $\mathrm{m}(H) < \varepsilon$;

    (b) eksistē G_δ-kopa G, $E \subset G$, ka jebkurai mērojamai kopai H no $H \subset G \setminus E$ seko $\mathrm{m}(H) = 0$;

    (c) jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē slēgta kopa F, $F \subset E$, ka jebkurai mērojamai kopai H no $H \subset E \setminus F$ seko $\mathrm{m}(H) < \varepsilon$;

    (d) eksistē F_σ-kopa F, $F \subset E$, ka jebkurai mērojamai kopai H no $H \subset E \setminus F$ seko $\mathrm{m}(H) = 0$.

41. Pierādīt, ka kopa E ir mērojama Žordāna nozīmē un tās Žordāna mērs ir vienāds ar 0, t.i., $\mathrm{mes}(E) = 0$, tad un tikai tad, kad jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds kopas E galīgs pārklājums $S_E = \{\delta_1; \delta_2; \ldots; \delta_n\}$, ka $\sum\limits_{k=1}^{n} |\delta_k| < \varepsilon$.

2. nodaļa

MĒROJAMAS FUNKCIJAS

Šajā nodaļā tiks aplūkota viena reālā mainīgā mērojamu (Lebega nozīmē) funkciju klase, kura ietver sevī arī viena reālā mainīgā nepārtrauktu funkciju klasi. Mērojamu funkciju klase, atšķirībā no nepārtrauktu funkciju klases, ir slēgta ne tikai attiecībā pret aritmētiskajām operācijām (- saskaitīšanu, atņemšanu, reizināšanu un dalīšanu), bet arī attiecībā pret konverģenci gandrīz visur, kas ir daudz vispārīgāks konverģences veids, nekā vienmērīgā konverģence, attiecībā pret kuru ir slēgta nepārtrauktu funkciju klase. Mērojamu funkciju teorijai ir būtiska loma Lebega integrāļa teorijā (skat. nākamo nodaļu), jo galīga mēra kopā $E \subset \mathbb{R}$ ierobežotas funkcijas f mērojamība kopā E ir funkcijas f integrējamības Lebega nozīmē kopā E nepieciešamais un pietiekamais nosacījums!

2.1. Lebega kopas un to īpašības

Apskatīsim funkciju $f : E \to \mathbb{R}$, kur $E \subset \mathbb{R}$. Ar

E[f apmierina nosacījumu A]

apzīmēsim visu to kopas E punktu kopu, kuros funkcija f apmierina nosacījumu A. Piemēram, ja $a \in \mathbb{R}$, tad

$$\begin{aligned} E[f > a] &= \{x \in E : f(x) > a\}, \quad E[f \geq a] = \{x \in E : f(x) \geq a\}, \\ E[f < a] &= \{x \in E : f(x) < a\}, \quad E[f \leq a] = \{x \in E : f(x) \leq a\}, \\ E[f = a] &= \{x \in E : f(x) = a\}, \quad E[f \neq a] = \{x \in E : f(x) \neq a\}. \end{aligned}$$

2.1. definīcija. Par **funkcijas** $f : E \to \mathbb{R}$ **Lebega kopām** sauc kopas $E[f > a]$, $E[f \geq a]$, $E[f < a]$ un $E[f \leq a]$, kur $a \in \mathbb{R}$.

Apskatīsim dažas Lebega kopu īpašības.

1° *Jebkurai funkcijai $f : E \to \mathbb{R}$ un patvaļīgam $a \in \mathbb{R}$ ir spēkā vienādība*

$$E[f > a] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left[f \geq a + \frac{1}{n}\right]. \tag{2.1}$$

► No vienas puses, pieņemsim, ka $x \in E[f > a]$, t.i., $x \in E$ un $f(x) > a$. Tad $f(x) - a = b > 0$. Atradīsim tādu $n_0 \in \mathbb{N}$, ka $\frac{1}{n_0} \leq b$. Tā kā $f(x) - a = b \geq \frac{1}{n_0}$ jeb $f(x) \geq a + \frac{1}{n_0}$, pie tam $x \in E$, tad $x \in E\left[f \geq a + \frac{1}{n_0}\right] \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E\left[f \geq a + \frac{1}{n}\right]$.

No otras puses, pieņemsim, ka $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E\left[f \geq a + \frac{1}{n}\right]$. Tad eksistē $n_0 \in \mathbb{N}$, ka $x \in E\left[f \geq a + \frac{1}{n_0}\right]$ jeb $f(x) \geq a + \frac{1}{n_0}$ $(x \in E)$, no kurienes seko, ka $f(x) > a$ $(x \in E)$, t.i., $x \in E[f > a]$.◄

2° *Jebkurai funkcijai $f : E \to \mathbb{R}$ un patvaļīgam $a \in \mathbb{R}$ ir spēkā vienādība*

$$E[f \leq a] = \bigcap_{n=1}^{\infty} E\left[f < a + \frac{1}{n}\right]. \tag{2.2}$$

► Tiešām,

$$E[f \leq a] = E \setminus E[f > a] \overset{1^\circ}{=} E \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E\left[f \geq a + \frac{1}{n}\right]\right) =$$
$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(E \setminus E\left[f \geq a + \frac{1}{n}\right]\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E\left[f < a + \frac{1}{n}\right]. ◄$$

3° *Jebkurai funkcijai $f : E \to \mathbb{R}$ un patvaļīgam $a \in \mathbb{R}$ ir spēkā vienādība*

$$E[f < a] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left[f \leq a - \frac{1}{n}\right]. \tag{2.3}$$

► No vienas puses, pieņemsim, ka $x \in E[f < a]$, t.i., $x \in E$ un $f(x) < a$. Tad $f(x) - a = b < 0$. Atradīsim tādu $n_0 \in \mathbb{N}$, ka $\frac{1}{n_0} \leq -b$, t.i., $-\frac{1}{n_0} \geq b$. Tā kā $f(x) - a = b \leq -\frac{1}{n_0}$ jeb $f(x) \leq a - \frac{1}{n_0}$, pie tam $x \in E$, tad $x \in E\left[f \leq a - \frac{1}{n_0}\right] \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E\left[f \leq a - \frac{1}{n}\right]$.

No otras puses, pieņemsim, ka $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E\left[f \leq a - \frac{1}{n}\right]$. Tad eksistē $n_0 \in \mathbb{N}$, ka $x \in E\left[f \leq a - \frac{1}{n_0}\right]$ jeb $f(x) \leq a - \frac{1}{n_0}$ $(x \in E)$, no kurienes seko, ka $f(x) < a$ $(x \in E)$, t.i., $x \in E[f < a]$.◄

4° *Jebkurai funkcijai $f : E \to \mathbb{R}$ un patvaļīgam $a \in \mathbb{R}$ ir spēkā vienādība*

$$E[f \geq a] = \bigcap_{n=1}^{\infty} E\left[f > a - \frac{1}{n}\right]. \tag{2.4}$$

► Tiešām,

$$E[f \geq a] = E \setminus E[f < a] \overset{3^\circ}{=} E \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E\left[f \leq a - \frac{1}{n}\right]\right) =$$
$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(E \setminus E\left[f \leq a - \frac{1}{n}\right]\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E\left[f > a - \frac{1}{n}\right]. ◄$$

2.2. Mērojamas funkcijas jēdziens

2.2. definīcija. Pieņemsim, ka E ir mērojama kopa. Funkciju $f : E \to \mathbb{R}$ sauc par **mērojamu Lebega nozīmē funkciju kopā** E (vienkārši **mērojamu funkciju kopā** E), ja funkcijas f Lebega kopa $E[f \geq a]$ ir mērojama jebkuram $a \in \mathbb{R}$.

2.1. piezīme. No mērojamas funkcijas definīcijas izriet:

- ja funkcija f ir mērojama kopā E, tad E ir mērojama kopa;
- ja E nav mērojama kopa, tad funkcija f nav mērojama kopā E.

Atzīmēsim, ka mērojamas funkcijas $f : E \to \mathbb{R}$ definīcijā nosacījums "E ir mērojama kopa" ir nosacījuma "funkcijas f Lebega kopa $E[f \geq a]$ ir mērojama jebkuram $a \in \mathbb{R}$" sekas (skat. 2.8. paragrāfu).

2.1. teorēma. *Pieņemsim, ka E ir mērojama kopa. Šādi apgalvojumi ir ekvivalenti.*

1. *Funkcija $f : E \to \mathbb{R}$ ir mērojama kopā E.*
2. *Jebkuram $a \in \mathbb{R}$ funkcijas f Lebega kopa $E[f > a]$ ir mērojama.*
3. *Jebkuram $a \in \mathbb{R}$ funkcijas f Lebega kopa $E[f \leq a]$ ir mērojama.*
4. *Jebkuram $a \in \mathbb{R}$ funkcijas f Lebega kopa $E[f < a]$ ir mērojama.*

▶ Pierādījumu veiksim pēc shēmas

$$1. \to 2. \to 3. \to 4. \to 1.$$

1. $\to$ 2. Ja funkcija f ir mērojama kopā E, tad saskaņā ar definīciju funkcijas f Lebega kopa $E[f \geq a]$ ir mērojama jebkuram $a \in \mathbb{R}$. Tāpēc jebkuram $a \in \mathbb{R}$ un patvaļīgam $n \in \mathbb{N}$ kopa $E\left[f \geq a + \frac{1}{n}\right]$ ir mērojama. Tātad jebkuram $a \in \mathbb{R}$ kopa

$$E[f > a] \overset{1^\circ}{=} \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left[f \geq a + \frac{1}{n}\right]$$

arī ir mērojama kā mērojamu kopu sanumurējams apvienojums.

2. $\to$ 3. Ja kopa $E[f > a]$ ir mērojama jebkuram $a \in \mathbb{R}$, tad kopa

$$E[f \leq a] = E \setminus E[f > a]$$

ir mērojama jebkuram $a \in \mathbb{R}$ kā mērojamu kopu starpība.

3. $\to$ 4. Ja kopa $E[f \leq a]$ ir mērojama jebkuram $a \in \mathbb{R}$, tad jebkuram $a \in \mathbb{R}$ un patvaļīgam $n \in \mathbb{N}$ kopa $E\left[f \leq a - \frac{1}{n}\right]$ ir mērojama. Tātad jebkuram $a \in \mathbb{R}$ kopa

$$E[f < a] \overset{3^\circ}{=} \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left[f \leq a - \frac{1}{n}\right]$$

arī ir mērojama kā mērojamu kopu sanumurējams apvienojums.

4. $\to$ 1. Ja kopa $E[f < a]$ ir mērojama jebkuram $a \in \mathbb{R}$, tad kopa

$$E[f \geq a] = E \setminus E[f < a]$$

ir mērojama jebkuram $a \in \mathbb{R}$ kā mērojamu kopu starpība. No definīcijas seko, ka funkcija f ir mērojama kopā E.◀

Sekas. Pieņemsim, ka a un b ir patvaļīgi reāli skaitļi, bet funkcija f ir mērojama kopā E. Tad kopas

$$\begin{aligned} E[a \le f \le b] &= E[f \ge a] \cap E[f \le b], \\ E[a \le f < b] &= E[f \ge a] \cap E[f < b], \\ E[a < f \le b] &= E[f > a] \cap E[f \le b], \\ E[a < f < b] &= E[f > a] \cap E[f < b], \\ E[f = a] &= E[f \ge a] \cap E[f \le a] \end{aligned}$$

ir mērojamas kā divu attiecīgo funkcijas f Lebega kopu šķēlums.

2.3. Mērojamu funkciju īpašības

1° *Mērojamā kopā E konstanta funkcija f ir mērojama funkcija kopā E.*

► Apskatīsim **c-konstantu funkciju kopā** E, t.i., $f(x) = c$ jebkuram $x \in E$, kur $c \in \mathbb{R}$. Tā kā jebkuram $a \in \mathbb{R}$ ir spēkā

$$E[f \ge a] = \begin{cases} E, & \text{ja} \quad a \le c, \\ \emptyset, & \text{ja} \quad a > c, \end{cases}$$

tad jebkuram $a \in \mathbb{R}$ funkcijas f Lebega kopa $E[f \ge a]$ ir mērojama, jo E un $\emptyset$ ir mērojamas kopas. Saskaņā ar definīciju funkcija f ir mērojama kopā E.◄

2° *Nulles mēra kopā E definēta funkcija f ir mērojama funkcija kopā E.*

► Tā kā $E[f \ge a] \subset E$ jebkuram $a \in \mathbb{R}$, bet E ir nulles mēra kopa, tad arī $E[f \ge a]$ ir nulles mēra kopa jebkuram $a \in \mathbb{R}$, jo nulles mēra kopas jebkura apakškopa arī ir nulles mēra kopa (skat. 1.4. teorēmu). Tā kā nulles mēra kopa ir mērojama kopa, tad $E[f \ge a]$ ir mērojama kopa jebkuram $a \in \mathbb{R}$. Saskaņā ar definīciju funkcija f ir mērojama kopā E.◄

3° *Ja funkcija f ir mērojama kopā E, tad funkcija f ir mērojama jebkurā kopas E mērojamā apakškopā E_1.*

► Tā kā funkcija f ir mērojama kopā E, tad E un $E[f \ge a]$ $(a \in \mathbb{R})$ ir mērojamas kopas. Pieņemsim, ka E_1 ir kopas E mērojama apakškopa. Tad jebkuram $a \in \mathbb{R}$ kopa $E_1[f \ge a] = E_1 \cap E[f \ge a]$ ir mērojama kā divu mērojamu kopu šķēlums. No definīcijas seko, ka funkcija f ir mērojama kopā E_1.◄

4° *Pieņemsim, ka kopa E ir ne vairāk kā sanumurējams kopu E_k apvienojums, t.i., $E = \bigcup\limits_k E_k$, kur indekss k pieņem ne vairāk kā sanumurējamu apjomu vērtību. Ja funkcija f ir mērojama kopā E_k katram k, tad funkcija f ir mērojama kopā E.*

► Tā kā funkcija f mērojama kopā E_k katram k, tad

1. kopa E_k ir mērojama katram k;
2. kopa $E_k[f \ge a]$ ir mērojama jebkuram $a \in \mathbb{R}$ un katram k.

No vienādības $E = \bigcup_k E_k$, ņemot vērā 1., seko, ka E ir mērojama kopa kā mērojamu kopu ne vairāk kā sanumurējams apvienojums. Acīmredzot, $E[f \geq a] = \bigcup_k E_k[f \geq a]$ katram k, no kurienes, ņemot vērā 2., izriet, ka jebkuram $a \in \mathbb{R}$ kopa $E[f \geq a]$ ir mērojama kā mērojamu kopu ne vairāk kā sanumurējams apvienojums. Saskaņā ar definīciju funkcija f ir mērojama kopā E.◀

5° *Pieņemsim, ka kopa E ir ne vairāk kā sanumurējams mērojamu kopu E_k apvienojums, t.i., $E = \bigcup_k E_k$, kur E_k ir mērojama kopa katram k, bet indekss k pieņem ne vairāk kā sanumurējamu apjomu vērtību. Ja funkcija f ir konstanta kopā E_k katram k, tad funkcija f ir mērojama kopā E.*

▶ Īpašības patiesums seko no 1° un 4° īpašības.◀

2.3. definīcija. Funkciju $f : E \to \mathbb{R}$ sauc par **kāpņveida funkciju**, ja tās vērtību kopa $f(E) = \{f(x) : x \in E\}$ ir ne vairāk kā sanumurējama.

Ja $f : E \to \mathbb{R}$ ir kāpņveida funkcija, tad $f(E) = \{a_k\}_{k \in \mathcal{J}}$, kur vai nu $\mathcal{J} = \{1; 2; \ldots; n\}$, vai arī $\mathcal{J} = \mathbb{N}$, bet $a_k \neq a_m$, ja $k, m \in \mathcal{J}$ un $k \neq m$. Katram $k \in \mathcal{J}$ apskatīsim kopu

$$E_k = E[f = a_k].$$

Tad

$$E = \bigcup_{k \in \mathcal{J}} E_k \quad \text{un} \quad E_k \cap E_m = \emptyset \ \ (k \neq m;\ k, m \in \mathcal{J}).$$

Šo apzīmējumu ietvaros ir spēkā šāda īpašība.

6° *Kāpņveida funkcija $f : E \to \mathbb{R}$ ir mērojama kopā E tad un tikai tad, kad kopa E_k ir mērojama katram $k \in \mathcal{J}$.*

▶ *Nepieciešamība.* Ja kāpņveida funkcija $f : E \to \mathbb{R}$ ir mērojama kopā E, tad saskaņā ar sekām no 2.1. teorēmas funkcijas f Lebega kopa $E[f = a_k] = f^{-1}(a_k) = E_k$ ir mērojama katram $k \in \mathcal{J}$.

Pietiekamība seko no 5° īpašības.◀

2.4. definīcija. Pieņemsim, ka $A \subset E$. Par **kopas A raksturfunkciju kopā** E sauc funkciju $\varphi_A : E \to \mathbb{R}$, ka

$$\forall x \in E : \varphi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{ja} \quad x \in A, \\ 0, & \text{ja} \quad x \in E \setminus A. \end{cases}$$

No definīcijas seko, ka *kopas $A \subset E$ raksturfunkcija $\varphi_A : E \to \mathbb{R}$ ir kāpņveida funkcija.*

7° *Pieņemsim, ka A ir mērojamas kopas E apakškopa. Kopa A ir mērojama tad un tikai tad, kad kopas A raksturfunkcija $\varphi_A : E \to \mathbb{R}$ ir mērojama funkcija kopā E.*

▶ *Nepieciešamība.* Pieņemsim, ka A ir mērojama kopa. Tad $E \setminus A$ ir mērojama kopa kā mērojamu kopu starpība. Tā kā $E = E_1 \cup E_2$, kur $E_1 = A$ un $E_2 = E \setminus A$, pie tam $\varphi_A(x) = 1$ jebkuram $x \in E_1$ un $\varphi_A(x) = 0$ jebkuram $x \in E_2$, tad no 5° īpašības seko, ka φ_A ir mērojama funkcija kopā E.

Pietiekamība. Pieņemsim, ka φ_A ir mērojama funkcija kopā E. Tad saskaņā ar sekām no 2.1. teorēmas kopa $E[\varphi_A = 1] = A$ ir mērojama.◀

2.2. piezīme. Atgādināsim (skat. 1.14. piezīmi), ka jebkura pozitīva mēra kopa E satur nemērojamu apakškopu A. No pēdējās īpašības seko, ka kopas A raksturfunkcija $\varphi_A : E \to \mathbb{R}$ ir nemērojama funkcija kopā E. Tādējādi *jebkurai pozitīva mēra kopai E eksistē nemērojama funkcija $f : E \to \mathbb{R}$.*

2.1. piemērs. Funkcija $f : E \to \mathbb{R}$, ka

$$\forall x \in \mathbb{R} : \ f(x) = [x],$$

ir mērojama kopā $E = \mathbb{R}$, kur $[x]$ ir reāla skaitļa x veselā daļa. Tiešām, f ir kāpņveida funkcija, jo tās vērtību kopa $f(E) = \mathbb{Z}$ ir sanumurējama kopa, pie tam jebkura elementa $k \in \mathbb{Z}$ pirmtēls attēlojumā f ir intervāls $[k; k+1)$, kurš ir mērojama kopa, tāpēc no 6° īpašības izriet, ka funkcija f ir mērojama kopā $E = \mathbb{R}$.

2.2. piemērs. Pieņemsim, ka E ir netukša mērojama kopa. **Dirihlē funkcija** $\chi : E \to \mathbb{R}$ **kopā** E,

$$\forall x \in E : \chi(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{ja} \quad x \in E \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{ja} \quad x \in E \cap \mathbb{I}, \end{cases}$$

ir kopas $E \cap \mathbb{Q}$ raksturfunkcija kopā E, tāpēc saskaņā ar 7° īpašību *Dirihlē funkcija $\chi : E \to \mathbb{R}$ ir mērojama funkcija kopā E.*

2.4. Mērojamu funkciju klases

2.5. definīcija. Saka, ka **īpašība A izpildās gandrīz visur kopā** E, ja visu to kopas E punktu, kuros īpašība A neizpildās, apakškopai ir nulles mērs.

2.3. piemērs. Nākamajiem trim piemēriem būs svarīga loma turpmākajā izklāstā.

- *Funkcija $f : E \to \mathbb{R}$ ir nepārtraukta gandrīz visur kopā E* nozīmē, ka visu to kopas E punktu, kuros funkcija f ir pārtraukta, apakškopai ir nulles mērs.
- *Funkcijas $f : E \to \mathbb{R}$ un $g : E \to \mathbb{R}$ ir vienādas gandrīz visur kopā E* nozīmē, ka visu to kopas E punktu, kuros funkcijas f un g nav vienādas, apakškopai ir nulles mērs.
- *Kopā E definētu funkciju virkne (f_n) konverģē gandrīz visur kopā E uz funkciju f* nozīmē, ka visu to kopas E punktu x, kuros skaitļu virkne $\big(f_n(x)\big)$ vai nu diverģē, vai arī konverģē, taču $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \neq f(x)$, apakškopai ir nulles mērs.

2.6. definīcija. Funkcijas $f : E \to \mathbb{R}$ un $g : E \to \mathbb{R}$ sauc par **ekvivalentām funkcijām kopā** E un raksta $f \overset{E}{\sim} g$, ja funkcijas f un g ir vienādas gandrīz visur kopā E, t.i.,

$$f \overset{E}{\sim} g \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \mathrm{m}\big(E[f \neq g]\big) = 0.$$

2.2. teorēma. *Pieņemsim, ka $\mathfrak{M}_E$ ir visu kopā E definēto funkciju kopa. Kopā $\mathfrak{M}_E$ definētā attieksme $\overset{E}{\sim}$ ir ekvivalences attieksme.*

▶ Pierādīsim, ka attieksme $\overset{E}{\sim}$ ir refleksīva, simetriska un transitīva.

1. Pieņemsim, ka $f \in \mathfrak{M}_E$. Tā kā $E[f \neq f] = \emptyset$, tad $\mathrm{m}\big(E[f \neq f]\big) = 0$, t.i., $f \overset{E}{\sim} f$. Tātad *attieksme $\overset{E}{\sim}$ ir refleksīva.*

2. Pieņemsim, ka $f, g \in \mathfrak{M}_E$ un $f \overset{E}{\sim} g$. Tad $\mathrm{m}\big(E[f \neq g]\big) = 0$. Tā kā $E[f \neq g] = E[g \neq f]$, tad $\mathrm{m}\big(E[g \neq f]\big) = 0$, t.i., $g \overset{E}{\sim} f$. Tātad *attieksme* $\overset{E}{\sim}$ *ir simetriska.*

3. Pieņemsim, ka $f, g, h \in \mathfrak{M}_E$, pie tam $f \overset{E}{\sim} g$ un $g \overset{E}{\sim} h$. Apskatīsim kopas $E_1 = E[f \neq g]$, $E_2 = E[g \neq h]$ un $E_3 = E[f \neq h]$. Tā kā $f \overset{E}{\sim} g$ un $g \overset{E}{\sim} h$, tad $\mathrm{m}(E_1) = 0$ un $\mathrm{m}(E_2) = 0$, no kurienes izriet, ka $\mathrm{m}(E_1 \cup E_2) = 0$, jo divu nulles mēra kopu apvienojums arī ir nulles mēra kopa.

Pierādīsim, ka

$$E \setminus (E_1 \cup E_2) \subset E \setminus E_3. \tag{2.5}$$

Pieņemsim, ka $x \in E \setminus (E_1 \cup E_2)$, t.i., $x \in E$ un $x \notin E_1 \cup E_2$, t.i., $x \in E$, $x \notin E_1$ un $x \notin E_2$. Tāpēc $x \in E \setminus E_1$ un $x \in E \setminus E_2$, t.i., $f(x) = g(x)$ un $g(x) = h(x)$, no kurienes seko, ka $f(x) = h(x)$, t.i., $x \in E \setminus E_3$. Formula (2.5) ir pierādīta.

No (2.5) izriet, ka $E_3 \subset E_1 \cup E_2$. Tāpēc E_3 ir nulles mēra kopa, jo jebkura nulles mēra kopas apakškopa arī ir nulles mēra kopa. Tātad *attieksme* $\overset{E}{\sim}$ *ir transitīva.*◀

2.3. teorēma. *Pieņemsim, ka funkcijas $f : E \to \mathbb{R}$ un $g : E \to \mathbb{R}$ ir ekvivalentas mērojamā kopā E. Ja viena no funkcijām f vai g ir mērojama kopā E, tad arī otra funkcija ir mērojama kopā E.*

▶ Pieņemsim, ka funkcija f ir mērojama kopā E. Apskatīsim kopas $E_1 = E[f \neq g]$ un $E_2 = E \setminus E_1$. Tad $E = E_1 \cup E_2$, pie tam $\mathrm{m}(E_1) = 0$, jo $f \overset{E}{\sim} g$. Tāpēc kopa E_1 ir mērojama kā nulles mēra kopa, bet kopa E_2 ir mērojama kā mērojamu kopu starpība. No mērojamu funkciju 2° un 3° īpašības seko, ka funkcija g ir mērojama gan kopā E_1, gan kopā E_2. Saskaņā ar mērojamu funkciju 4° īpašību funkcija g ir mērojama kopu E_1 un E_2 apvienojumā E.◀

2.4. teorēma. *Jebkura nepārtraukta funkcija f slēgtā kopā E ir mērojama funkcija kopā E.*

▶ Tā kā E ir slēgta kopa, tad saskaņā ar mērojamu kopu 2° īpašību kopa E ir mērojama. Apskatīsim patvaļīgu $a \in \mathbb{R}$. Pierādīsim, ka kopa $E[f \geq a]$ ir slēgta, t.i., šī kopa satur visus savus kontaktpunktus. Pieņemsim, ka $x_0 \in \overline{E[f \geq a]}$, t.i., x_0 ir kopas $E[f \geq a]$ kontaktpunkts. Tad eksistē kopas $E[f \geq a]$ punktu virkne (x_n), kas konverģē uz punktu x_0, t.i.,

1. $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in E[f \geq a]$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

No 1. seko, ka $f(x_n) \geq a$ jebkuram $n \in \mathbb{N}$, no kurienes, ņemot vērā teorēmu par robežpāreju nevienādībās, iegūsim

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \geq a. \tag{2.6}$$

Tā kā $x_0 \in \overline{E[f \geq a]} \subset \overline{E} = E$, bet funkcija f ir nepārtraukta kopā E (t.i., funkcija f ir nepārtraukta katrā kopas E punktā, tai skaitā arī punktā x_0), tad, ņemot vērā 2., iegūsim

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0). \tag{2.7}$$

No (2.6) un (2.7) atrodam, ka $f(x_0) \geq a$, t.i., $x_0 \in E[f \geq a]$. Tādējādi jebkuram $a \in \mathbb{R}$ kopa $E[f \geq a]$ ir slēgta un līdz ar to arī mērojama. Saskaņā ar definīciju funkcija f ir mērojama kopā E.◀

2.5. teorēma. *Jebkura nepārtraukta funkcija f mērojamā kopā E ir mērojama funkcija šajā kopā.*

▶ Tā kā E ir mērojama kopa, tad saskaņā ar kopu mērojamības 4° kritēriju kopu E var izteikt kā F_σ kopas un nulles mēra kopas apvienojumu, t.i., $E = F \cup E_0$, kur E_0 ir nulles mēra kopa (līdz ar to E_0 ir mērojama kopa), bet $F = \bigcup\limits_k F_k$, kur F_k ir slēgta kopa jebkuram k (indekss k pieņem ne vairāk kā sanumurējamu apjomu vērtību). Tā kā funkcija f ir nepārtraukta kopā E, tad funkcija f ir nepārtraukta slēgtā kopā $F_k \subset E$ jebkuram k. No 2.4. teorēmas izriet, ka funkcija f ir mērojama kopā $F_k \subset E$ jebkuram k. No mērojamu funkciju 2° īpašības seko, ka funkcija f ir mērojama kopā E_0, jo E_0 ir nulles mēra kopa. Tāpēc no mērojamu funkciju 4° īpašības izriet, ka funkcija f ir mērojama kopu $F = \bigcup\limits_k F_k$ un E_0 apvienojumā E.◀

2.6. teorēma. *Jebkura gandrīz visur nepārtraukta funkcija f mērojamā kopā E ir mērojama funkcija šajā kopā.*

▶ Tā kā funkcija f ir gandrīz visur nepārtraukta mērojamā kopā E, tad $E = E_1 \cup (E \setminus E_1)$, kur $E_1 \subset E$ ir kopas E visu to punktu, kuros funkcija f ir nepārtraukta, apakškopa, bet $E \setminus E_1$ ir nulles mēra kopa, kas sastāv no visiem tiem kopas E punktiem, kuros funkcija f ir pārtraukta. Tā kā $E \setminus E_1$ ir nulles mēra kopa, tad $E \setminus E_1$ ir mērojama kopa. Tāpēc $E_1 = E \setminus (E \setminus E_1)$ ir mērojama kopa kā mērojama kopu starpība. No 2.5. teorēmas izriet, ka funkcija f ir mērojama kopā E_1. Savukārt no mērojamu funkciju 2° īpašības seko, ka funkcija f ir mērojama kopā $E \setminus E_1$, jo $E \setminus E_1$ ir nulles mēra kopa. Tāpēc no mērojamu funkciju 4° īpašības izriet, ka funkcija f ir mērojama kopu E_1 un $E \setminus E_1$ apvienojumā E.◀

2.3. piezīme. Ja funkcija $f : E \to \mathbb{R}$ ir ekvivalenta nepārtauktai funkcijai $g : E \to \mathbb{R}$ kopā E, tad funkcija f var arī nebūt nepārtaukta kopā E, vēl vairāk, var izrādīties, ka funkcija f ir pārtraukta katrā kopas E punktā. Piemēram, Dirihlē funkcija $\chi : E \to \mathbb{R}$, kur $E = \mathbb{R}$, ir pārtraukta katrā kopas E punktā, taču tā ir ekvivalenta nullfunkcijai $\mathbb{O} : E \to \mathbb{R}$, kura, acīmredzot, ir nepārtraukta funkcija kopā E (atgādināsim, ka par **nullfunkciju kopā** E sauc funkciju, kura pieņem tikai nulles vērtības kopas E punktos).

2.7. teorēma. *Jebkura nogriezni $[a; b]$ monotona funkcija f ir mērojama funkcija kopā $[a; b]$.*

▶ Var pierādīt (skat., piemēram, [36]), ka monotonas funkcijas $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ pārtraukuma punktu kopa ir ne vairāk kā sanumurējama. Tāpēc funkcija f ir gandrīz visur nepārtraukta kopā $[a; b]$. No 2.6. teorēmas izriet, ka funkcija f ir mērojama kopā $[a; b]$.◀

2.4. piezīme. 2.4.-2.7. teorēmas uzrāda konkrētas mērojamu funkciju klases, taču neapraksta visu mērojamu funkciju klasi. Vairāki ekvivalenti visu mērojamu funkciju klases raksturojumi tiks sniegti 2.7. paragrāfā.

2.5. piezīme. No 2.5. teorēmas izriet, ka mērojamas funkcijas jēdzienu var uzlūkot kā nepārtrauktas funkcijas jēdziena vispārinājumu, lai gan ir jāatceras, ka nepārtrauktas funkcijas var tikt aplūkotas patvaļīgā netukšā kopā $E \subset \mathbb{R}$, savukārt mērojamas funkcijas tiek apskatītas tikai netukšās mērojamās kopās $E \subset \mathbb{R}$.

2.5. Darbības ar mērojamām funkcijām

1° *Ja funkcija f ir mērojama kopā E, tad funkcija $|f|$ arī ir mērojama kopā E.*

▶ Tā kā funkcija f ir mērojama kopā E, tad E ir mērojama kopa. Apskatīsim patvaļīgu $a \in \mathbb{R}$. Ja $a < 0$, tad $E\big[|f| \geq a\big] = E$ ir mērojama kopa. Ja $a \geq 0$, tad

$$E\big[|f| \geq a\big] = E[f \geq a] \cup E[f \leq -a]$$

ir mērojama kopa, jo, tā kā funkcija f ir mērojama kopā E, tad funkcijas f Lebega kopas $E[f \geq a]$ un $E[f \leq -a]$ ir mērojamas kopas. Tātad funkcija $|f|$ ir mērojama kopā E.◀

2° *Ja funkcija f ir mērojama kopā E, tad funkcija f^2 arī ir mērojama kopā E.*

▶ Tā kā funkcija f ir mērojama kopā E, tad E ir mērojama kopa. Apskatīsim patvaļīgu $a \in \mathbb{R}$. Ja $a < 0$, tad $E[f^2 \geq a] = E$ ir mērojama kopa. Ja $a \geq 0$, tad

$$E[f^2 \geq a] = E\big[|f| \geq \sqrt{a}\big]$$

ir mērojama kopa saskaņā ar 1° īpašību. Tātad funkcija f^2 ir mērojama kopā E.◀

3° *Ja funkcija f ir mērojama kopā E un c ir patvaļīgs reāls skaitlis, tad funkcija $f + c$ arī ir mērojama kopā E.*

▶ Tā kā funkcija f ir mērojama kopā E, tad funkcijas f Lebega kopa $E[f \geq a]$ ir mērojama jebkuram $a \in \mathbb{R}$. Tāpēc funkcijas $f + c$ Lebega kopa

$$E[f + c \geq a] = E[f \geq a - c]$$

arī ir mērojama jebkuram $a \in \mathbb{R}$, t.i., $f + c$ ir mērojama funkcija kopā E.◀

4° *Ja funkcija f ir mērojama kopā E un c ir patvaļīgs reāls skaitlis, tad funkcija cf arī ir mērojama kopā E.*

▶ Tā kā funkcija f ir mērojama kopā E, tad funkcijas f Lebega kopas $E[f \geq a]$ un $E[f \leq a]$ ir mērojamas jebkuram $a \in \mathbb{R}$.

1. Ja $c = 0$, tad $(cf)(x) = c \cdot f(x) = 0$ jebkuram $x \in E$, t.i., cf ir konstanta funkcija kopā E. No mērojamu funkciju 1° īpašības seko, ka cf ir mērojama funkcija kopā E.

2. Ja $c > 0$, tad

$$E\left[cf \geq a\right] = E\left[f \geq \frac{a}{c}\right]$$

ir mērojama kopa jebkuram $a \in \mathbb{R}$, jo f ir mērojama funkcija kopā E. Tātad cf ir mērojama funkcija kopā E, ja $c > 0$.

3. Ja $c < 0$, tad

$$E\left[cf \geq a\right] = E\left[f \leq \frac{a}{c}\right]$$

ir mērojama kopa jebkuram $a \in \mathbb{R}$, jo f ir mērojama funkcija kopā E. Tātad cf ir mērojama funkcija kopā E, ja $c < 0$.

No 1., 2. un 3. izriet, ka cf ir mērojama funkcija kopā E.◀

5° *Ja funkcija f ir mērojama kopā E, pie tam $f(x) \neq 0$ jebkuram $x \in E$, tad funkcija $\frac{1}{f}$ arī ir mērojama kopā E.*

► Pieņemsim, ka $f(x) \neq 0$ jebkuram $x \in E$.

1. Ja $a = 0$, tad kopa

$$E\left[\frac{1}{f} \geq a\right] = E[f > 0]$$

ir mērojama, jo f ir mērojama funkcija kopā E.

2. Pieņemsim, ka $a > 0$. Pierādīsim, ka

$$E\left[\frac{1}{f} \geq a\right] = E[f > 0] \cap E\left[f \leq \frac{1}{a}\right]. \tag{2.8}$$

- Pieņemsim, ka $x \in E\left[\frac{1}{f} \geq a\right]$. Tad $\frac{1}{f(x)} \geq a > 0$ $(x \in E)$, no kurienes izriet, ka $f(x) > 0$ $(x \in E)$ un $f(x) \leq \frac{1}{a}$ $(x \in E)$, t.i., $x \in E[f > 0] \cap E\left[f \leq \frac{1}{a}\right]$.
- Pieņemsim, ka $x \in E[f > 0] \cap E\left[f \leq \frac{1}{a}\right]$. Tad $f(x) > 0$ $(x \in E)$ un $f(x) \leq \frac{1}{a}$ $(x \in E)$, no kurienes izriet, ka $\frac{1}{f(x)} \geq a$ $(x \in E)$, t.i., $x \in E\left[\frac{1}{f} \geq a\right]$.

Tā kā funkcija f ir mērojama kopā E, tad funkcijas f Lebega kopas $E[f > 0]$ un $E\left[f \leq \frac{1}{a}\right]$ ir mērojamas, kur a ir patvaļīgs nenulles reāls skaitlis. Tāpēc no (2.8) seko, ka jebkuram $a > 0$ kopa $E\left[\frac{1}{f} \geq a\right]$ ir mērojama kā divu mērojamu kopu šķēlums.

3. Analoģiski pierāda, ka jebkuram $a < 0$ ir spēkā

$$E\left[\frac{1}{f} \geq a\right] = E[f > 0] \cup E\left[f \leq \frac{1}{a}\right],$$

no kurienes, spriežot līdzīgi kā iepriekš, izriet, ka kopa $E\left[\frac{1}{f} \geq a\right]$ ir mērojama kā divu mērojamu kopu apvienojums.

No 1., 2. un 3. izriet, ka kopa $E\left[\frac{1}{f} \geq a\right]$ ir mērojama jebkuram $a \in \mathbb{R}$, t.i., funkcija $\frac{1}{f}$ ir mērojama kopā E.◄

6° *Ja funkcijas f un g ir mērojamas kopā E, tad $E[f > g]$ ir mērojama kopa.*

► Tā kā racionālo skaitļu kopa $\mathbb{Q}$ ir sanumurējama, tad visus racionālos skaitļus var sanumurēt virknē $r_1, r_2, \ldots, r_k, \ldots$. Pierādīsim, ka

$$E[f > g] = \bigcup_{k=1}^{\infty} \big(E[f > r_k] \cap E[g < r_k]\big). \tag{2.9}$$

Pieņemsim, ka $x \in E[f > g]$, t.i., $f(x) > g(x)$. Tā kā racionālo skaitļu kopa $\mathbb{Q}$ ir visur blīva (skat. 6.2.6. apakšparagrāfu) reālo skaitļu kopas $\mathbb{R}$ apakškopa, tad eksistē tāds racionāls skaitlis r_{k_0}, ka $f(x) > r_{k_0} > g(x)$. Atrodam:

$$x \in E,\ f(x) > r_{k_0},\ g(x) < r_{k_0} \quad \text{jeb} \quad x \in E\big[f > r_{k_0}\big],\ x \in E\big[g < r_{k_0}\big] \quad \text{jeb}$$

$$x \in E[f > r_{k_0}] \cap E[g < r_{k_0}] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \big(E[f > r_k] \cap E[g < r_k]\big).$$

Tātad

$$E[f > g] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \big(E[f > r_k] \cap E[g < r_k]\big). \tag{2.10}$$

Tagad pieņemsim, ka

$$x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \big(E[f > r_k] \cap E[g < r_k]\big).$$

Tad eksistē $k_0 \in \mathbb{N}$, ka

$$x \in E[f > r_{k_0}] \cap E[g < r_{k_0}] \quad \text{jeb} \quad x \in E\big[f > r_{k_0}\big],\ x \in E\big[g < r_{k_0}\big] \quad \text{jeb}$$
$$x \in E,\ f(x) > r_{k_0},\ g(x) < r_{k_0} \quad \text{jeb} \quad x \in E,\ f(x) > r_{k_0} > g(x),$$

no kurienes izriet, ka $x \in E$ un $f(x) > g(x)$, t.i., $x \in E[f > g]$. Tātad

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \big(E[f > r_k] \cap E[g < r_k]\big) \subset E[f > g]. \tag{2.11}$$

No (2.10) un (2.11) seko (2.9).

Tā kā funkcijas f un g ir mērojamas kopā E, tad šo funkciju Lebega kopas $E[f > r_k]$ un $E[g < r_k]$ ir mērojamas jebkuram $k \in \mathbb{N}$. Līdz ar to šo kopu šķēlums $E[f > r_k] \cap E[g < r_k]$ arī ir mērojama kopa jebkuram $k \in \mathbb{N}$. Tāpēc no (2.9) izriet, ka kopa $E[f > g]$ ir mērojama kā mērojamu kopu sanumurējams apvienojums.◀

7° *Ja funkcijas f un g ir mērojamas kopā E, tad kopas $E[f \le g]$, $E[f < g]$, $E[f \ge g]$, $E[f = g]$ un $E[f \ne g]$ ir mērojamas.*

▶ Tā kā f un g ir mērojamas funkcijas kopā E, tad E ir mērojama kopa.

1. Ņemot vērā 6° īpašību, kopa $E[f \le g] = E \backslash E[f > g]$ ir mērojama kopa kā mērojamu kopu starpība.

2. Tā kā 6° īpašība ir spēkā jebkurām mērojamām kopā E funkcijām f un g, tad kopa $E[g > f] = E[f < g]$ ir mērojama.

3. Ņemot vērā 2. punktu, kopa $E[f \ge g] = E \backslash E[f < g]$ ir mērojama kopa kā mērojamu kopu starpība.

4. Ņemot vērā 1. un 3. punktu, kopa $E[f = g] = E[f \ge g] \cap E[f \le g]$ ir mērojama kā divu mērojamu kopu šķēlums.

5. Ņemot vērā 6° īpašību un 2. punktu, kopa

$$E[f \ne g] = E[f > g] \cup E[f < g]$$

ir mērojama kā divu mērojamu kopu apvienojums.◀

8° *Ja funkcijas f un g ir mērojamas kopā E, tad arī to starpība $f - g$ ir mērojama funkcija kopā E.*

▶ Atzīmēsim, ka jebkuram $a \in \mathbb{R}$ ir spēkā

$$E[f - g \ge a] = E[f \ge g + a]. \tag{2.12}$$

Apskatīsim patvaļīgu $a \in \mathbb{R}$. Tā kā funkcija g ir mērojama kopā E, tad no 3° īpašības seko, ka funkcija $g + a$ arī ir mērojama kopā E. Tāpēc no 7° īpašības izriet, ka kopa

$$E[f - g \ge a] \overset{(2.12)}{=} E[f \ge g + a]$$

ir mērojama. Tā kā a ir patvaļīgs reāls skaitlis, tad funkcija $f - g$ ir mērojama kopā E.◀

9° *Ja funkcijas f un g ir mērojamas kopā E, tad arī to summa $f+g$ ir mērojama funkcija kopā E.*

► Tā kā funkcija g ir mērojama kopā E, tad no 4° īpašības seko, ka $(-1)g$ ir mērojama funkcija kopā E. Tā kā funkcija f ir mērojama kopā E, tad no 8° īpašības izriet, ka funkciju f un $(-1)g$ starpība $f-(-1)g = f+g$ ir mērojama funkcija kopā E.◄

10° *Ja funkcijas f un g ir mērojamas kopā E, tad arī to reizinājums fg ir mērojama funkcija kopā E.*

► Tā kā funkcijas f un g ir mērojamas kopā E, tad no 8° un 9° īpašības izriet, ka funkcijas $f+g$ un $f-g$ ir mērojamas kopā E. No 2° īpašības seko, ka funkcijas $(f+g)^2$ un $(f-g)^2$ ir mērojamas kopā E. No 8° īpašības izriet, ka funkcija $(f+g)^2-(f-g)^2$ ir mērojama kopā E. No 4° īpašības seko, ka funkcija $\frac{1}{4}\big[(f+g)^2-(f-g)^2\big] = fg$ ir mērojama kopā E.◄

11° *Ja funkcijas f un g ir mērojamas kopā E, pie tam $g(x) \neq 0$ jebkuram $x \in E$, tad arī to dalījums $\frac{f}{g}$ ir mērojama funkcija kopā E.*

► Īpašības patiesums seko no 5° un 10° īpašības, jo $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$.◄

2.6. piezīme. Tātad, izpildot aritmētiskās darbības (- saskaitīšanu, atņemšanu, reizināšanu un dalīšanu) ar kopā E mērojamām funkcijām, iegūst kopā E mērojamas funkcijas, citiem vārdiem sakot, *kopā E mērojamu funkciju saime ir slēgta attiecībā pret aritmētiskajām darbībām* (protams, jāatceras, ka dalīt var tikai ar tādu funkciju, kura pieņem tikai nenulles vērtības dotajā kopā). Atgādināsim, ka visu kopā E nepārtraukto funkciju saime arī ir slēgta attiecībā pret aritmētiskajām darbībām.

2.6. Mērojamu funkciju virknes

Šajā paragrāfā aplūkosim saistību starp četriem funkciju virkņu konverģences veidiem: konverģenci (kuru sauc arī par punktveida konverģenci), vienmērīgo konverģenci, konverģenci gandrīz visur un konverģenci pēc mēra.

Turpmāk uzskatīsim, ka f_n $(n \in \mathbb{N})$ un f ir kopā E definētas funkcijas.

2.6.1. Daži funkciju virkņu konverģences veidi

2.7. definīcija. Saka, ka **funkciju virkne** (f_n) **konverģē kopā** E **uz funkciju** f, ja jebkuram $x \in E$ skaitļu virkne $f_n(x)$ konverģē uz skaitli $f(x)$. Raksta $(f_n) \xrightarrow{E} f$.

Tātad

$$\Big((f_n) \xrightarrow{E} f\Big) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \Big(\forall x \in E\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : \big|f_n(x) - f(x)\big| < \varepsilon\Big).$$

2.8. definīcija. Saka, ka **funkciju virkne** (f_n) **vienmērīgi konverģē kopā** E **uz funkciju** f, ja jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē $n_0 \in \mathbb{N}$, ka visiem $n \in \mathbb{N}$, ka $n \geq n_0$, un katram $x \in E$ ir patiesa nevienādība $\big|f_n(x) - f(x)\big| < \varepsilon$. Raksta $(f_n) \overset{E}{\rightrightarrows} f$.

Tātad

$$\Big((f_n) \overset{E}{\rightrightarrows} f\Big) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \Big(\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall x \in E : \big|f_n(x) - f(x)\big| < \varepsilon\Big).$$

2.4. paragrāfā jau aplūkojām konverģences gandrīz visur jēdzienu.

2.9. definīcija. Saka, ka **funkciju virkne** (f_n) **konverģē gandrīz visur kopā** E **uz funkciju** f, ja visu to kopas E punktu x, kuros skaitļu virkne $\big(f_n(x)\big)$ nekonverģē uz skaitli $f(x)$, apakškopai ir nulles mērs. Raksta $(f_n) \xrightarrow[\text{g.v.}]{E} f$.

Tātad

$$\Big((f_n) \xrightarrow[\text{g.v.}]{E} f\Big) \Longleftrightarrow \Big(\exists E_0 \subset E : \mathrm{m}(E_0) = 0,\ (f_n) \xrightarrow{E \setminus E_0} f\Big).$$

Konverģencei pēc mēra ir nozīmīga loma mērojamu funkciju teorijā.

2.10. definīcija. Pieņemsim, ka funkcijas f un f_n $(n \in \mathbb{N})$ ir mērojamas kopā E. Saka, ka **funkciju virkne** (f_n) **konverģē pēc mēra kopā** E **uz funkciju** f, ja jebkuram $\varepsilon > 0$ ir spēkā

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{m}\big(E_n(\varepsilon)\big) = 0,$$

kur $E_n(\varepsilon) = E\big[|f_n - f| \geq \varepsilon\big]$. Raksta $(f_n) \overset{E}{\Rightarrow} f$.

Tātad

$$\Big((f_n) \overset{E}{\Rightarrow} f\Big) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \Big(\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} \mathrm{m}\big(E_n(\varepsilon)\big) = 0\Big).$$

2.7. piezīme. Atzīmēsim, ka kopa $E_n(\varepsilon)$ ir mērojama jebkuram $n \in \mathbb{N}$ un patvaļīgam $\varepsilon > 0$, jo jebkuram $n \in \mathbb{N}$ funkcija $|f_n - f|$ ir mērojama kā divu mērojamu funkciju starpības modulis, tāpēc funkcijas $|f_n - f|$ Lebega kopa $E_n(\varepsilon)$ ir mērojama kopa jebkuram $n \in \mathbb{N}$ un patvaļīgam $\varepsilon > 0$.

2.8. piezīme.

• No 2.9. definīcijas izriet, ka, ja $\mathrm{m}(E) = 0$, tad jebkura kopā E definētu funkciju virkne f_n $(n \in \mathbb{N})$ konverģē gandrīz visur kopā E uz jebkuru kopā E definētu funkciju f.

• No 2.10. definīcijas izriet, ka, ja $\mathrm{m}(E) = 0$, tad jebkura kopā E mērojamu funkciju virkne f_n $(n \in \mathbb{N})$ konverģē pēc mēra kopā E uz jebkuru kopā E mērojamu funkciju f.

2.8. teorēma. [**Lebega teorēma**] *Ja funkcijas f_n $(n \in \mathbb{N})$ ir mērojamas kopā E un $(f_n) \xrightarrow[\text{g.v.}]{E} f$, tad funkcija f arī ir mērojama kopā E.*

► 1. Vispirms apskatīsim gadījumu, kad $(f_n) \xrightarrow{E} f$, *t.i., funkciju virkne (f_n) konverģē kopā E uz funkciju f* (konverģence kopā E ir konverģences gandrīz visur kopā E atsevišķs gadījums).

Lai pierādītu funkcijas f mērojamību kopā E, ir pietiekami pierādīt, ņemot vērā 2.1. teorēmu, ka funkcijas f Lebega kopa $A = E[f > a]$ ir mērojama jebkuram $a \in \mathbb{R}$. Šim nolūkam apskatīsim kopas

$$B_n^{(m)} = E\left[f_n > a + \frac{1}{m}\right] \ (n, m \in \mathbb{N}) \quad \text{un} \quad C_k^{(m)} = \bigcap_{n=k}^{\infty} B_n^{(m)} \ (m, k \in \mathbb{N}).$$

Tā kā jebkuram $n \in \mathbb{N}$ funkcija f_n ir mērojama kopā E, tad jebkuriem $n, m \in \mathbb{N}$ kopa $B_n^{(m)}$ ir mērojama. Tāpēc jebkuriem $m, k \in \mathbb{N}$ kopa $C_k^{(m)}$ ir mērojama kā mērojamu kopu sanumurējams šķēlums. Taču tad kopa $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} C_k^{(m)}$ arī ir mērojama kā mērojamu kopu sanumurējams apvienojums. Tātad, lai pierādītu funkcijas f mērojamību kopā E, ir pietiekami pierādīt vienādību

$$A = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k^{(m)}, \tag{2.13}$$

jo, ja šī vienādība tiks pierādīta, tad no iepriekš teiktā izrietēs, ka kopa A ir mērojama un līdz ar to arī funkcija f ir mērojama kopā E.

Pieņemsim, ka $x \in A = E[f > a]$, t.i., $f(x) > a$. Tad eksistē $m \in \mathbb{N}$, ka $f(x) > a + \frac{1}{m}$. Apskatīsim $\varepsilon = f(x) - \left(a + \frac{1}{m}\right) > 0$. Tā kā $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, tad eksistē $k \in \mathbb{N}$, ka visiem naturāliem skaitļiem $n \geq k$ ir patiesa nevienādība

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon \quad \text{jeb} \quad -\varepsilon < f_n(x) - f(x) < \varepsilon \quad \text{jeb} \quad f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon,$$

no kurienes seko

$$f_n(x) > f(x) - \varepsilon = f(x) - \left[f(x) - \left(a + \frac{1}{m}\right)\right] = a + \frac{1}{m}.$$

Tātad visiem naturāliem skaitļiem $n \geq k$ ir patiesa nevienādība $f_n(x) > a + \frac{1}{m}$. No kopas $B_n^{(m)}$ definīcijas izriet, ka visiem naturāliem skaitļiem $n \geq k$ ir spēkā $x \in B_n^{(m)}$. Tāpēc $x \in \bigcap\limits_{n=k}^{\infty} B_n^{(m)} = C_k^{(m)} \subset \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} C_k^{(m)}$. Tātad

$$A \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k^{(m)}. \tag{2.14}$$

Tagad pieņemsim, ka $x \in \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} C_k^{(m)}$, t.i., eksistē $m, k \in \mathbb{N}$, ka $x \in C_k^{(m)} = \bigcap\limits_{n=k}^{\infty} B_n^{(m)}$. Tātad visiem naturāliem skaitļiem $n \geq k$ ir spēkā $f_n(x) > a + \frac{1}{m}$. Ņemot vērā teorēmu par robežpāreju nevienādībās, iegūsim $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \geq a + \frac{1}{m}$, no kurienes seko $f(x) \geq a + \frac{1}{m} > a$. Tāpēc $f(x) > a$, t.i., $x \in E[f > a] = A$. Tātad

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k^{(m)} \subset A. \tag{2.15}$$

No (2.14) un (2.15) izriet (2.13) un līdz ar to funkcijas f mērojamība kopā E.

2. Pieņemsim, ka $(f_n) \xrightarrow[\text{g.v.}]{E} f$, *t.i., funkciju virkne* (f_n) *konverģē gandrīz visur kopā* E *uz funkciju* f. Tad eksistē $E_0 \subset E$, ka $\mathrm{m}(E_0) = 0$ un $(f_n) \xrightarrow{E \setminus E_0} f$. Kopa E_0 ir mērojama kā nulles mēra kopa. No mērojamu funkciju 2° īpašības seko, ka funkcija f ir mērojama kopā E_0. Kopa $E \setminus E_0$ ir mērojama kā mērojamu kopu starpība. No mērojamu funkciju 3° īpašības izriet, ka funkcijas f_n $(n \in \mathbb{N})$ ir mērojamas kopā $E \setminus E_0$. Tā kā $(f_n) \xrightarrow{E \setminus E_0} f$, tad no 1. punktā pierādītā izriet, ka funkcija f ir mērojama kopā $E \setminus E_0$. No mērojamu funkciju 4° īpašības seko, ka funkcija f ir mērojama arī kopu E_0 un $E \setminus E_0$ apvienojumā E.◀

2.9. piezīme. No pierādītās teorēmas seko, ka *kopā* E *mērojamu funkciju saime ir slēgta attiecībā pret konverģenci gandrīz visur kopā* E *(tai skaitā arī konverģenci kopā* E*).* Pēdējā teorēma atgādina matemātiskās analīzes teorēmu [7, 1. daļa, 422. lpp.]: *ja funkcijas* f_n $(n \in \mathbb{N})$ *ir nepārtrauktas kopā* E *un* $(f_n) \overset{E}{\rightrightarrows} f$*, tad funkcija* f *arī ir nepārtraukta kopā* E, citiem vārdiem sakot, kopā E nepārtrauktu funkciju saime ir slēgta attiecībā pret vienmērīgo konverģenci kopā E. Atzīmēsim, ka kopā E nepārtrauktu funkciju saime *nav* slēgta attiecībā pret konverģenci gandrīz visur kopā E (tai skaitā arī konverģenci kopā E). Piemēram, nogrieznī $[0;1]$ nepārtauktu funkciju virkne (f_n),

$$\forall x \in [0;1]: \ f_n(x) = x^n \ \ (n = 1, 2, \dots),$$

konverģē šajā nogrieznī uz funkciju f,

$$\forall x \in [0;1]: \ f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ja} \quad 0 \le x < 1, \\ 1, & \text{ja} \quad x = 1, \end{cases}$$

kura ir pārtraukta punktā $x = 1$.

2.10. piezīme. Viegli pierādīt [7, 1. daļa, 420. lpp.], ka *no funkciju virknes vienmērīgās konverģences dotajā kopā seko šīs virknes konverģence apskatāmajā kopā*, t.i., ja $(f_n) \overset{E}{\rightrightarrows} f$, tad $(f_n) \xrightarrow{E} f$. Apgrieztais apgalvojums nav spēkā, jo *vispārīgā gadījumā no funkciju virknes konverģences* ***neizriet*** *šīs funkciju virknes vienmērīgā konverģence apskatāmajā kopā uz attiecīgo robežfunkciju.* Piemēram, 2.9. piezīmē apskatītā funkciju virkne (f_n) konverģē, taču ne vienmērīgi, uz funkciju f nogrieznī $[0;1]$.

2.11. piezīme. Acīmredzot, *no funkciju virknes konverģences dotajā kopā seko šīs virknes konverģence gandrīz visur apskatāmajā kopā*, t.i., ja $(f_n) \xrightarrow{E} f$, tad $(f_n) \xrightarrow[\text{g.v.}]{E} f$. Viegli uzrādīt funkciju virkņu piemērus, kuri parāda, ka apgrieztais apgalvojums nav spēkā.

2.6.2. Lebega teorēma

2.9. teorēma. [**Lebega teorēma**] *Ja funkcijas* f_n $(n \in \mathbb{N})$ *ir mērojamas* <u>*galīga*</u> *mēra kopā* E *un* $(f_n) \xrightarrow[\text{g.v.}]{E} f$*, tad*

1. *funkcija* f *ir mērojama kopā* E*;*
2. $(f_n) \overset{E}{\Rightarrow} f$.

▶ 1. Funkcijas f mērojamība kopā E izriet no 2.8. teorēmas.

2. Pierādīsim, ka $(f_n) \overset{E}{\Rightarrow} f$.

Apskatīsim kopas E apakškopu B, kas sastāv no visiem tiem un tikai tiem punktiem x, kuros skaitļu virkne $\big(f_n(x)\big)$ vai nu diverģē, vai arī konverģē, bet ne uz skaitli $f(x)$, t.i., $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \neq f(x)$. Tā kā $(f_n) \xrightarrow[\text{g.v.}]{E} f$, t.i., funkciju virkne (f_n) konverģē gandrīz visur kopā E uz funkciju f, tad B ir nulles mēra kopa, t.i., $\mathrm{m}(B) = 0$.

Apskatīsim patvaļīgu $\varepsilon > 0$ un kopas

$$E_k(\varepsilon) = E\big[|f_k - f| \geq \varepsilon\big] \ (k \in \mathbb{N}),\ A_n(\varepsilon) = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k(\varepsilon) \ (n \in \mathbb{N}),\ A(\varepsilon) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n(\varepsilon).$$

Pierādīsim, ka $A(\varepsilon) \subset B$. Apskatīsim patvaļīgu $x \in A(\varepsilon)$. Pieņemsim pretējo, ka $x \notin B$, t.i., $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Tad eksistē $n_0 \in \mathbb{N}$, ka visiem naturāliem skaitļiem $n \geq n_0$ ir patiesa nevienādība $\big|f_n(x) - f(x)\big| < \varepsilon$, t.i., eksistē $n_0 \in \mathbb{N}$, ka visiem naturāliem skaitļiem $n \geq n_0$ ir spēkā $x \notin E_n(\varepsilon)$, t.i., eksistē $n_0 \in \mathbb{N}$, ka $x \notin A_{n_0}(\varepsilon)$. Tātad $x \notin A(\varepsilon)$. Ieguvām pretrunu. Tātad $A(\varepsilon) \subset B$.

Tā kā $A(\varepsilon) \subset B$ un $\mathrm{m}(B) = 0$, tad arī $\mathrm{m}\big(A(\varepsilon)\big) = 0$, jo jebkura nulles mēra kopas apakškopa ir nulles mēra kopa.

Acīmredzot, kopas $A_n(\varepsilon)$ $(n \in \mathbb{N})$ ir mērojamas un veido dilstošu virkni

$$A_1(\varepsilon) \supset A_2(\varepsilon) \supset \cdots \supset A_n(\varepsilon) \cdots .$$

Tā kā $A_n(\varepsilon) \subset E$ $(n \in \mathbb{N})$ un E ir galīga mēra kopa, tad $A_n(\varepsilon)$ arī ir galīga mēra kopa jebkuram $n \in \mathbb{N}$. Ņemot vērā Lebega mēra pusnepārtrauktību no augšas, iegūsim

$$0 = \mathrm{m}\big(A(\varepsilon)\big) = \mathrm{m}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n(\varepsilon)\right) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{m}\big(A_n(\varepsilon)\big).$$

Tā kā $E_n(\varepsilon) \subset A_n(\varepsilon)$ $(n \in \mathbb{N})$, tad no Lebega mēra nenegativitātes un monotonitātes seko $0 \leq \mathrm{m}\big(E_n(\varepsilon)\big) \leq \mathrm{m}\big(A_n(\varepsilon)\big)$ $(n \in \mathbb{N})$. Tā kā $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{m}\big(A_n(\varepsilon)\big) = 0$, tad, ņemot vērā teorēmu par robežpāreju nevienādībās, atrodam $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{m}\big(E_n(\varepsilon)\big) = 0$, t.i., $(f_n) \overset{E}{\Rightarrow} f$.◀

Lebega teorēmas pierādījuma gaitā tika pierādīts šāds apgalvojums.

2.10. teorēma. *Ja funkcijas f_n $(n \in \mathbb{N})$ ir mērojamas galīga mēra kopā E, pie tam $(f_n) \xrightarrow[\text{g.v.}]{E} f$, tad funkcija f ir mērojama kopā E un jebkuram $\varepsilon > 0$ ir spēkā*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{m}\big(A_n(\varepsilon)\big) = 0,$$

kur

$$A_n(\varepsilon) = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k(\varepsilon) \ (n \in \mathbb{N}) \quad \textit{un} \quad E_k(\varepsilon) = E\big[|f_k - f| \geq \varepsilon\big] \ (k \in \mathbb{N}).$$

2.12. piezīme. Lebega teorēmas apgrieztā teorēma nav spēkā, jo, kā rāda nākamais piemērs, *vispārīgā gadījumā no konverģences pēc mēra* ***neizriet*** *konverģence gandrīz visur, vēl vairāk, virkne var konverģēt pēc mēra un tajā pašā laikā diverģēt katrā apskatāmās kopas punktā.*

2.4. piemērs. [16, 34.-35. lpp.] Apskatīsim nogriežņa $E = [0;1]$ apakšnogriežņu virkni $I_1, I_2, \dots$, kur

$$I_1 = [0;1],$$

$$I_2 = \left[0;\frac{1}{2}\right],\ I_3 = \left[\frac{1}{2};1\right],$$

$$I_4 = \left[0;\frac{1}{4}\right],\ I_5 = \left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right],\ I_6 = \left[\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right],\ I_7 = \left[\frac{3}{4};1\right],$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$I_{2^n} = \left[0;\frac{1}{2^n}\right],\ I_{2^n+1} = \left[\frac{1}{2^n};\frac{2}{2^n}\right],\ \dots,\ I_{2^{n+1}-1} = \left[1-\frac{1}{2^n};1\right],$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

un nogrieznī E definētu funkciju virkni (f_n), ka

$$\forall x \in E:\ f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{ja} \quad x \in I_n, \\ 0, & \text{ja} \quad x \in [0;1] \setminus I_n, \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Pierādīsim, ka $(f_n) \overset{E}{\Rightarrow} \mathbb{O}$, t.i., funkciju virkne (f_n) konverģē pēc mēra nogrieznī $[0;1]$ uz nullfunkciju $\mathbb{O} : [0;1] \to \mathbb{R}$. Tiešām, ja ε ir patvaļīgs pozitīvs skaitlis, tad

$$E_n(\varepsilon) = E\big[|f_n - \mathbb{O}| \geq \varepsilon\big] = E[f_n \geq \varepsilon] = \begin{cases} I_n, & \text{ja} \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \\ \emptyset, & \text{ja} \quad \varepsilon > 1, \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{m}\big(E_n(\varepsilon)\big) = \left\{ \begin{array}{ll} \lim\limits_{n\to\infty} |I_n|, & \text{ja} \quad 0 < \varepsilon \leq 1 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{m}(\emptyset), & \text{ja} \quad \varepsilon > 1 \end{array} \right\} = 0,$$

t.i., $(f_n) \overset{E}{\Rightarrow} \mathbb{O}$. Taču virkne (f_n) diverģē katrā kopas E punktā. Tiešām, ja x_0 ir patvaļīgs kopas E punkts, tad eksistē bezgalīgi daudz numuru n, ka $x_0 \in I_n$ (šiem numuriem $f_n(x_0) = 1$), un bezgalīgi daudz numuru n, ka $x_0 \notin I_n$ (šiem numuriem $f_n(x_0) = 0$), t.i., virkne $\big(f_n(x_0)\big)$ satur bezgalīgi daudz locekļu, kuri ir vienādi ar 1, un bezgalīgi daudz locekļu, kuri ir vienādi ar 0, tāpēc šī virkne diverģē.

2.13. piezīme. *Ja* $\mathrm{m}(E) = +\infty$*, tad Lebega teorēma nav spēkā.* Tiešām, apskatīsim kopā $E = (0;+\infty)$ definētu funkciju virkni (f_n), ka

$$\forall x \in E:\ f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{ja} \quad 0 < x \leq n, \\ 1, & \text{ja} \quad x > n, \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Tad $(f_n) \xrightarrow{E} \mathbb{O}$, kur $\mathbb{O}$ ir nullfunkcija kopā $(0;+\infty)$. Taču $(f_n) \overset{E}{\not\Rightarrow} \mathbb{O}$, jo

$$\forall n \in \mathbb{N}:\ \mathrm{m}\big(E[f_n \geq 1]\big) = \mathrm{m}\big((n;+\infty)\big) = +\infty$$

un tāpēc $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{m}\big(E[f_n \geq 1]\big) = +\infty \neq 0$.

Saskaņā ar iepriekšējo piezīmi *vispārīgā gadījumā no konverģences gandrīz visur bezgalīga mēra kopā* ***neizriet*** *konverģence pēc mēra šajā kopā.* Taču, kā rāda nākamā teorēma, konverģenci pēc mēra kopā ar galīgu vai bezgalīgu mēru nodrošina konverģences gandrīz visur speciālgadījums - vienmērīgā konverģence.

2.11. teorēma. *Ja funkcijas f_n $(n \in \mathbb{N})$ ir mērojamas kopā E un $(f_n) \overset{E}{\rightrightarrows} f$, tad*

1. *funkcija f ir mērojama kopā E;*
2. $(f_n) \overset{E}{\Rightarrow} f$.

► Pieņemsim, ka funkcijas f_n $(n \in \mathbb{N})$ ir mērojamas kopā E un $(f_n) \overset{E}{\rightrightarrows} f$.

1. Funkcijas f mērojamība kopā E izriet no 2.8. teorēmas. Atgādināsim tikai, ka, ja $(f_n) \overset{E}{\rightrightarrows} f$, tad, protams, $(f_n) \xrightarrow[\text{g.v.}]{E} f$.

2. Tā kā $(f_n) \overset{E}{\rightrightarrows} f$, tad

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall x \in E:\ \big|f_n(x) - f(x)\big| < \varepsilon.$$

Tāpēc

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0:\ E\big[|f_n - f| < \varepsilon\big] = E$$

jeb

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0:\ E\big[|f_n - f| \geq \varepsilon\big] = \emptyset,$$

no kurienes seko

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0:\ \mathrm{m}\Big(E\big[|f_n - f| \geq \varepsilon\big]\Big) = 0.$$

Tātad $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{m}\Big(E\big[|f_n - f| \geq \varepsilon\big]\Big) = 0$, t.i., $(f_n) \overset{E}{\Rightarrow} f$.◄

2.14. piezīme. Ja E ir galīga mēra kopa, tad pēdējā teorēma ir Lebega teorēmas sekas.

2.6.3. Risa teorēma

Kā jau tika atzīmēts 2.12. piezīmē, tad Lebega teorēmas apgrieztā teorēma nav spēkā. Nākamo teorēmu *zināmā mērā* var uzlūkot kā Lebega teorēmas apgriezto teorēmu.

2.12. teorēma. [**Risa**[1] **teorēma**] *Ja funkcijas f_n $(n \in \mathbb{N})$ un f ir mērojamas kopā E un $(f_n) \overset{E}{\Rightarrow} f$, tad eksistē virknes (f_n) apakšvirkne (f_{n_k}), ka $(f_{n_k}) \xrightarrow[\text{g.v.}]{E} f$.*

► Pieņemsim, ka funkcijas f_n $(n \in \mathbb{N})$ un f ir mērojamas kopā E un $(f_n) \overset{E}{\Rightarrow} f$.

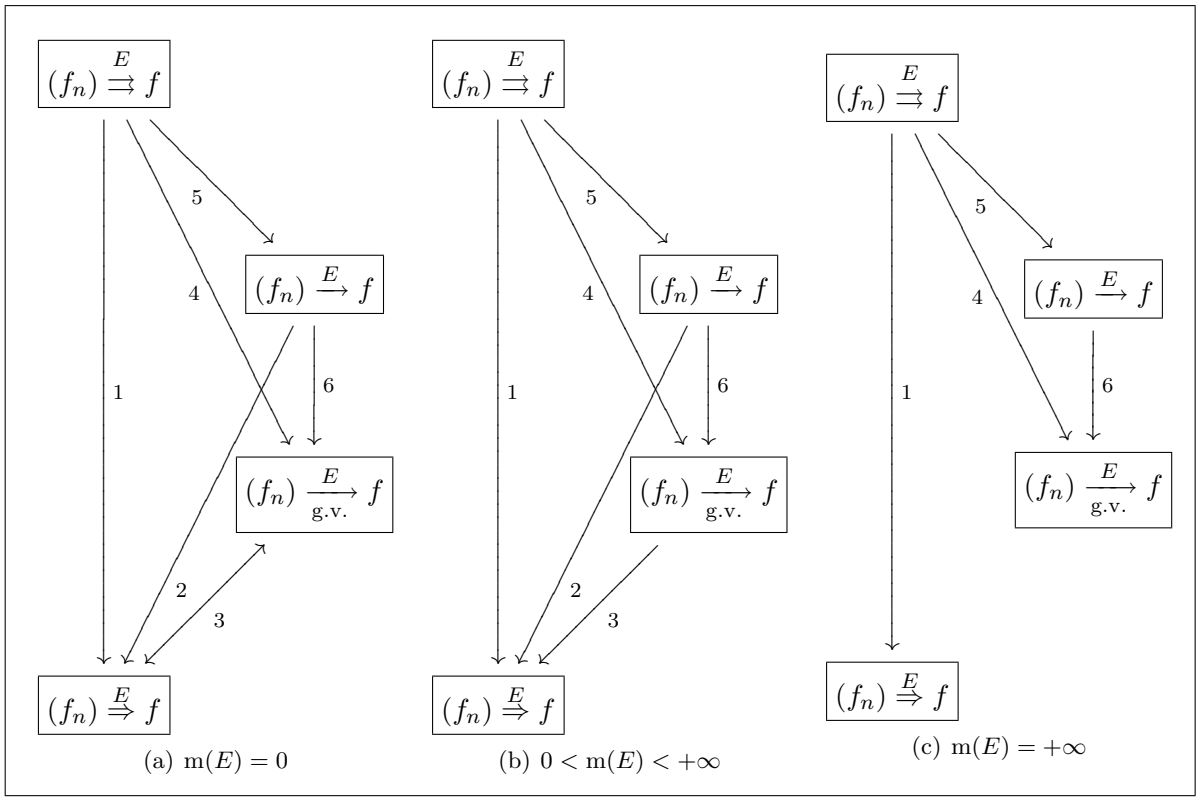
Apskatīsim stingri dilstošu pozitīvu skaitļu virkni (σ_k), ka $\lim\limits_{k\to\infty} \sigma_k = 0$, un pozitīvu skaitļu konverģentu rindu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \eta_n$. Meklējamo indeksu virkni $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$, ar kuras palīdzību tiks definēta virknes (f_n) apakšvirkne (f_{n_k}), konstruēsim šādi.

Pieņemsim, ka $E_n(\sigma_k) = E\big[|f_n - f| \geq \sigma_k\big]$ $(n, k \in \mathbb{N})$. Tā kā $(f_n) \overset{E}{\Rightarrow} f$, tad jebkuram $k \in \mathbb{N}$ ir spēkā

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{m}\big(E_n(\sigma_k)\big) = 0. \tag{2.16}$$

No (2.16) seko, ka dotajam skaitlim σ_1 eksistē $n_1 \in \mathbb{N}$, ka $\mathrm{m}\big(E_{n_1}(\sigma_1)\big) < \eta_1$.

[1] F. Riss (*Frigyes Riesz*, 1880-1956) - ungāru matemātiķis.



(a) $\mathrm{m}(E) = 0$ (b) $0 < \mathrm{m}(E) < +\infty$ (c) $\mathrm{m}(E) = +\infty$

2.1. zīmējums. Shēmās (a), (b) un (c) ir apkopots 2.9. teorēmā, 2.8., 2.12., 2.10., 2.11. un 2.13. piezīmē un 2.4. piemērā teiktais par saistību starp 2.6.1. apakšparagrāfā apskatītajiem funkciju virkņu konverģences veidiem.

- Apgalvojumi, kuri atbilst 1., 2. un 3. bultiņai, ir spēkā, ja f_n $(n \in \mathbb{N})$ ir mērojamas funkcijas kopā E (funkcijas f mērojamība izriet no Lebega teorēmas).
- Apgalvojumi, kuri atbilst 4., 5. un 6. bultiņai, ir spēkā, ja f_n $(n \in \mathbb{N})$ un f ir patvaļīgas funkcijas kopā E, pie tam kopai E ne obligāti ir jābūt mērojamai.

Ņemot vērā iepriekš minētajās piezīmēs un piemērā teikto, vispārīgā gadījumā nevienā no šīm shēmām nedrīkst pievienot nevienu citu divus "taisnstūrus" savienojošu bultiņu.

No (2.16) seko, ka dotajam skaitlim σ_2 eksistē $n_2 \in \mathbb{N}$, ka $n_2 > n_1$ un $\mathrm{m}\big(E_{n_2}(\sigma_2)\big) < \eta_2$.

No (2.16) seko, ka dotajam skaitlim σ_3 eksistē $n_3 \in \mathbb{N}$, ka $n_3 > n_2$ un $\mathrm{m}\big(E_{n_3}(\sigma_3)\big) < \eta_3$.

Ja n_{k-1} $(k = 2, 3, \ldots)$ ir jau atrasts, tad no (2.16) seko, ka dotajam skaitlim σ_k eksistē $n_k \in \mathbb{N}$, ka $n_k > n_{k-1}$ un $\mathrm{m}\big(E_{n_k}(\sigma_k)\big) < \eta_k$.

Apskatīsim virknes (f_n) apakšvirkni (f_{n_k}) un pierādīsim, ka $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x)$ gandrīz visiem $x \in E$. Šim nolūkam atradīsim tādu kopas E apakškopu A, ka $\mathrm{m}(A) = 0$ un $(f_n) \xrightarrow{E\setminus A} f$.

Kopas $A_i = \bigcup\limits_{k=i}^{\infty} E_{n_k}(\sigma_k)$ $(i \in \mathbb{N})$ un $A = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ ir mērojamas, pie tam kopu virkne $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ ir dilstoša. Izmantojot Lebega mēra pusnepārtrauktību no augšas, atrodam

$$\lim_{i\to\infty} \mathrm{m}(A_i) \geq \mathrm{m}(A). \tag{2.17}$$

No Lebega mēra nenegativitātes un sanumurējamās aditivitātes seko

$$0 \le \mathrm{m}(A_i) \le \sum_{k=i}^{\infty} \mathrm{m}\big(E_{n_k}(\sigma_k)\big) \ (i \in \mathbb{N}). \tag{2.18}$$

Saskaņā ar konstrukciju $\mathrm{m}\big(E_{n_k}(\sigma_k)\big) < \eta_k$ $(k \in \mathbb{N})$, no kurienes izriet

$$\sum_{k=i}^{\infty} \mathrm{m}\big(E_{n_k}(\sigma_k)\big) \le \sum_{k=i}^{\infty} \eta_k \ (i \in \mathbb{N}). \tag{2.19}$$

No (2.18) un (2.19) seko $0 \le \mathrm{m}(A_i) \le \sum\limits_{k=i}^{\infty} \eta_k$ $(i \in \mathbb{N})$. Tā kā $\lim\limits_{i\to\infty} \sum\limits_{k=i}^{\infty} \eta_k = 0$, jo $\left(\sum\limits_{k=i}^{\infty} \eta_k\right)_{i=1}^{\infty}$ ir konverģentas rindas $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \eta_k$ atlikumu virkne, tad, izmantojot teorēmu par robežpāreju nevienādībās, iegūsim

$$\lim_{i\to\infty} \mathrm{m}(A_i) = 0. \tag{2.20}$$

No (2.17) un (2.20) izriet, ka $\mathrm{m}(A) \le 0$. Tā kā mērs ir nenegatīvs, tad $\mathrm{m}(A) \ge 0$. Tātad $\mathrm{m}(A) = 0$.

Pierādīsim, ka $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x)$ jebkuram $x \in E \setminus A$. Apskatīsim patvaļīgu $x_0 \in E \setminus A$. Tad $x_0 \notin \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, t.i., eksistē $i_0 \in \mathbb{N}$, ka $x_0 \notin A_{i_0}$. Tāpēc $x_0 \notin E_{n_k}(\sigma_k)$ jebkuram $k \ge i_0$, t.i., jebkuram $k \ge i_0$ ir spēkā $0 \le \big|f_{n_k}(x_0) - f(x_0)\big| < \sigma_k$. Tā kā $\lim\limits_{k\to\infty} \sigma_k = 0$, tad $\lim\limits_{k\to\infty} \big|f_{n_k}(x_0) - f(x_0)\big| = 0$ jeb $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x_0) = f(x_0)$.◀

2.5. piemērs. Ilustrēsim Risa teorēmu. 2.4. piemērā tika apskatīta kopā $[0;1]$ mērojamu funkciju virkne (f_n), ka $(f_n) \overset{E}{\Rightarrow} \mathbb{O}$, kur $\mathbb{O}$ ir nullfunkcija kopā $[0;1]$. Aplūkosim virknes (f_n) apakšvirkni $f_1, f_2, f_4, f_8, f_{16}, \ldots$, t.i., aplūkosim virknes (f_n) apakšvirkni (f_{n_k}), kur $n_k = 2^k$ $(k \in \mathbb{N})$. Tad

$$\forall x \in [0;1] : \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ja} \quad x = 0, \\ 0, & \text{ja} \quad 0 < x \le 1, \end{cases}$$

t.i., $(f_{n_k}) \xrightarrow[\text{g.v.}]{[0;1]} \mathbb{O}$.

2.6.4. Jegorova teorēma

Cik "liela" ir atšķirība starp konverģenci gandrīz visur un vienmērīgo konverģenci dotajā kopā? Atbildi uz šo jautājumu sniedz nākamā teorēma.

2.13. teorēma. [**Jegorova**[2] **teorēma**] *Ja funkcijas f_n $(n \in \mathbb{N})$ ir mērojamas* ***galīga mēra kopā*** *E un $(f_n) \xrightarrow[\text{g.v.}]{E} f$, tad*

1. *funkcija f ir mērojama kopā E;*

[2] D. Jegorovs (*Егоров Дмитрий Федорович*, 1869-1931) - krievu matemātiķis.

2. jebkuram $\delta > 0$ eksistē mērojama apakškopa $E_\delta \subset E$, ka $\mathrm{m}(E \setminus E_\delta) < \delta$ un $(f_n) \overset{E_\delta}{\rightrightarrows} f$.

▶ 1. Funkcijas f mērojamība kopā E izriet no 2.8. teorēmas.

2. Katram $\sigma > o$ apskatīsim kopas

$$E_k(\sigma) = E\big[|f_k - f| \geq \sigma\big] \ (k \in \mathbb{N}) \ \text{ un } \ A_n(\sigma) = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k(\sigma) \ (n \in \mathbb{N}).$$

Saskaņā ar 2.10. teorēmu jebkuram $\sigma > 0$ ir spēkā

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{m}\big(A_n(\sigma)\big) = 0. \tag{2.21}$$

Apskatīsim stingri dilstošu pozitīvu skaitļu virkni (σ_k), ka $\lim\limits_{k\to\infty} \sigma_k = 0$, un pozitīvu skaitļu konverģentu rindu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \eta_n$. No (2.21) seko, ka katram $k \in \mathbb{N}$ eksistē tāds $n_k \in \mathbb{N}$, ka

$$\mathrm{m}\big(A_{n_k}(\sigma_k)\big) < \eta_k. \tag{2.22}$$

Apskatīsim patvaļīgu $\delta > 0$. Tā kā rinda $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \eta_k$ konverģē, tad tās atlikumu virkne $\left(\sum\limits_{k=i}^{\infty} \eta_k\right)_{i=1}^{\infty}$ konverģē uz nulli. Tāpēc var atrast tādu $i_0 \in \mathbb{N}$, ka

$$\sum_{k=i_0}^{\infty} \eta_k < \delta. \tag{2.23}$$

No (2.22) seko

$$\sum_{k=i_0}^{\infty} \mathrm{m}\big(A_{n_k}(\sigma_k)\big) \leq \sum_{k=i_0}^{\infty} \eta_k. \tag{2.24}$$

Apskatīsim kopu $P = \bigcup\limits_{k=i_0}^{\infty} A_{n_k}(\sigma_k)$. Saskaņā ar Lebega mēra sanumurējamo pusaditivitāti atrodam

$$\mathrm{m}(P) \leq \sum_{k=i_0}^{\infty} \mathrm{m}\big(A_{n_k}(\sigma_k)\big). \tag{2.25}$$

No (2.23), (2.24) un (2.25) iegūsim

$$\mathrm{m}(P) < \delta. \tag{2.26}$$

Apskatīsim kopu $E_\delta = E \setminus P$. Tā kā $P \subset E$, tad, ņemot vērā (2.26), atrodam

$$\mathrm{m}(E \setminus E_\delta) = \mathrm{m}\big(E \setminus (E \setminus P)\big) = \mathrm{m}(P) < \delta.$$

Atliek pierādīt, ka $(f_n) \overset{E_\delta}{\rightrightarrows} f$. Apskatīsim patvaļīgu $\varepsilon > 0$. Tā kā (σ_i) ir pozitīvu skaitļu dilstoša virkne, pie tam $\lim\limits_{i\to\infty} \sigma_i = 0$, tad eksistē tāds $i \in \mathbb{N}$, ka $i \geq i_0$ un $\sigma_i < \varepsilon$. Apskatīsim patvaļīgu $x \in E_\delta = E \setminus P$. Tad $x \notin P = \bigcup\limits_{k=i_0}^{\infty} A_{n_k}(\sigma_k)$. Tāpēc $x \notin A_{n_i}(\sigma_i) = \bigcup\limits_{n=n_i}^{\infty} E_n(\sigma_i)$,

t.i., $x \notin E_n(\sigma_i)$ jebkuram $n \geq n_i$, t.i., jebkuram $n \geq n_i$ ir spēkā $\left|f_n(x) - f(x)\right| < \sigma_i < \varepsilon$. Tātad jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē $n_i \in \mathbb{N}$, ka visiem naturāliem skaitļiem $n \geq n_i$ un visiem $x \in E_\delta$ ir patiesa nevienādība $\left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon$, t.i., $(f_n) \overset{E_\delta}{\rightrightarrows} f$.◀

2.15. piezīme. Jegorova teorēma parāda, ka mērojamu funkciju konverģence gandrīz visur galīga mēra kopā maz atšķiras no šo funkciju vienmērīgās konverģences dotajā kopā - atliek no dotās kopas izmest kādu pēc patikas maza mēra apakškopu un atlikušajā kopas daļā funkcijas konverģēs vienmērīgi.

2.16. piezīme. Tā kā E ir galīga mēra kopa, tad Jegorova teorēmā nosacījumu, ka $\mathrm{m}(E \setminus E_\delta) < \delta$, var nomainīt ar nosacījumu, ka $\mathrm{m}(E_\delta) > \mathrm{m}(E) - \delta$.

2.17. piezīme. *Ja* $\mathrm{m}(E) = +\infty$, *tad Jegorova teorēma nav spēkā*, jo, ja funkcijas f_n $(n \in \mathbb{N})$ ir mērojamas bezgalīga mēra kopā E un $(f_n) \xrightarrow[\text{g.v.}]{E} f$, tad funkcija f, protams, ir mērojama kopā E, taču var izrādīties, ka jebkuram $\delta > 0$ un patvaļīgai mērojamai apakškopai $E_\delta \subset E$, ka $\mathrm{m}(E \setminus E_\delta) < \delta$, ir spēkā $(f_n) \overset{E_\delta}{\not\rightrightarrows} f$. Pamatosim teikto. Apskatīsim kopā $E = (0; +\infty)$ definētu funkciju virkni (f_n) (skat. 2.13. piezīmi), ka

$$\forall x \in E: \; f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{ja} \quad 0 < x \leq n, \\ 1, & \text{ja} \quad x > n, \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Tad f_n $(n \in \mathbb{N})$ ir mērojamas funkcijas kopā E, pie tam $(f_n) \xrightarrow{E} f$, kur $f = \mathbb{O}$ ir nullfunkcija kopā $(0; +\infty)$. Apskatīsim jebkuru $\delta > 0$ un patvaļīgu kopas E mērojamu apakškopu E_δ, ka $\mathrm{m}(E \setminus E_\delta) < \delta$. Atzīmēsim, ka E_δ ir neierobežota kopa. Tiešām, ja pieņemt pretējo, ka E_δ ir ierobežota kopa, t.i., eksistē $\alpha > 0$, ka $0 < x \leq \alpha$ jebkuram $x \in E_\delta$, tad $E \setminus E_\delta \supset (\alpha; +\infty)$ un līdz ar to $\mathrm{m}(E \setminus E_\delta) \geq +\infty$, kas ir pretrunā ar to, ka $\mathrm{m}(E \setminus E_\delta) < \delta$. Tātad pieņēmums nav patiess un E_δ ir neierobežota kopa. Pierādīsim, ka $(f_n) \overset{E_\delta}{\not\rightrightarrows} f$. Pieņemsim, ka $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Apskatīsim patvaļīgu $n \in \mathbb{N}$. Tā kā kopa E_δ ir neierobežota, tad eksistē tāds $x \in E_\delta$, ka $x > n$. Tāpēc $\left|f_n(x) - f(x)\right| = |1 - 0| = 1 > \frac{1}{2}$. Tātad $(f_n) \overset{E_\delta}{\not\rightrightarrows} f$.

Paragrāfa noslēgumā atzīmēsim, ka daži citi funkciju virkņu konverģences veidi (- pēc vidējā un pēc vidējā kvadrātiskā) tiks aplūkoti 5. nodaļā.

2.7. Mērojamu funkciju struktūra

Kā jau tika atzīmēts 2.4. paragrāfā, tad 2.4.-2.7. teorēmas uzrāda konkrētas mērojamu funkciju klases, taču neapraksta visu mērojamu funkciju klasi. Šajā paragrāfā tiks pierādīti vairāki ekvivalenti visu mērojamu funkciju klases raksturojumi.

2.7.1. Mērojamu funkciju tuvināšana ar kāpņveida funkcijām

2.14. teorēma. *Funkcija f ir mērojama kopā E tad un tikai tad, kad eksistē kopā E mērojamu kāpņveida funkciju, katra no kurām* ***pieņem tikai galīgu skaitu vērtību****, virkne (f_n), ka $(f_n) \xrightarrow{E} f$.*

► *Nepieciešamība.* a) Pieņemsim, ka f ir `nenegatīva` mērojama funkcija kopā E. Apskatīsim kopā E definētu funkciju virkni (f_n), ka

$$\forall x \in E: \; f_n(x) = \begin{cases} \frac{i-1}{n}, & \text{ja} \quad \frac{i-1}{n} \le f(x) < \frac{i}{n}, \; 1 \le i \le n^2, \\ n, & \text{ja} \quad f(x) \ge n, \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Acīmredzot, f_n $(n \in \mathbb{N})$ ir kāpņveida funkcijas, katra no kurām pieņem tikai galīgu skaitu vērtību, pie tam kopas $f^{-1}\left(\frac{i-1}{n}\right) = E\left[\frac{i-1}{n} \le f < \frac{i}{n}\right]$ $(1 \le i \le n^2)$ un $f^{-1}(n) = E[f \ge n]$ ir mērojamas jebkuram $n \in \mathbb{N}$. No 2.3. paragrāfa 6° īpašības seko, ka funkcijas f_n $(n \in \mathbb{N})$ ir mērojamas kopā E. Pierādīsim, ka $(f_n) \xrightarrow{E} f$. Pieņemsim, ka $x \in E$. Apskatīsim patvaļīgu $\varepsilon > 0$. Atradīsim tādu $n_0 \in \mathbb{N}$, ka $f(x) < n_0$ un $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Tad jebkuram $n \in \mathbb{N}$, ka $n \ge n_0$, izpildās $f(x) < n$ un $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Līdz ar to katram $n \in \mathbb{N}$, ka $n \ge n_0$, eksistē vienīgais $i \in \mathbb{N}$, ka $1 \le i \le n^2$ un $\frac{i-1}{n} \le f(x) < \frac{i}{n}$. Saskaņā ar virknes (f_n) definīciju $f_n(x) = \frac{i-1}{n}$. Tāpēc jebkuram $n \in \mathbb{N}$, ka $n \ge n_0$, ir spēkā $f_n(x) \le f(x) < \frac{i}{n}$, no kurienes izriet $\left|f_n(x) - f(x)\right| < \frac{1}{n} < \varepsilon$. Tātad $(f_n) \xrightarrow{E} f$.

b) Pieņemsim, ka funkcija f ir mērojama kopā E. Atzīmēsim, ka $f = f^+ - f^-$, kur $f^+ = \frac{|f|+f}{2}$ un $f^- = \frac{|f|-f}{2}$ ir nenegatīvas funkcijas kopā E, pie tam šīs funkcijas, ņemot vērā 2.5. paragrāfā teikto, ir mērojamas kopā E. Saskaņā ar a) punktā pierādīto eksistē mērojamu kāpņveida funkciju, katra no kurām pieņem tikai galīgu skaitu vērtību, virknes (f_n^+) un (f_n^-), ka $(f_n^+) \xrightarrow{E} f^+$ un $(f_n^-) \xrightarrow{E} f^-$. Acīmredzot, $f_n = f_n^+ - f_n^-$ $(n \in \mathbb{N})$ ir mērojamas kāpņveida funkcijas, katra no kurām pieņem tikai galīgu skaitu vērtību, pie tam $(f_n) \xrightarrow{E} f$.

Pietiekamība izriet no 2.8. teorēmas.◄

2.15. teorēma. *Kopā E* ***`ierobežota`*** *funkcija f ir mērojama kopā E tad un tikai tad, kad eksistē kopā E mērojamu kāpņveida funkciju, katra no kurām* ***`pieņem tikai galīgu skaitu vērtību`****, virkne (f_n), ka $(f_n) \overset{E}{\rightrightarrows} f$.*

► *Nepieciešamība.* a) Pieņemsim, ka f ir `nenegatīva` ierobežota mērojama funkcija kopā E. Tad eksistē $M > 0$, ka $0 \le f(x) \le M$ visiem $x \in E$. Apskatīsim patvaļīgu $\varepsilon > 0$. Atradīsim tādu $n_0 \in \mathbb{N}$, ka $n_0 > M$ un $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Pieņemsim, ka (f_n) ir 2.14. teorēmas a) punktā apskatītā virkne. Apskatīsim patvaļīgu $n \in \mathbb{N}$, ka $n \ge n_0$, un jebkuru $\varepsilon > 0$. Tā kā $f(x) \le M < n_0 \le n$, tad $f(x) < n$ un līdz ar to eksistē vienīgais $i \in \mathbb{N}$, ka $1 \le i \le n^2$ un $\frac{i-1}{n} \le f(x) < \frac{i}{n}$. Saskaņā ar virknes (f_n) definīciju $f_n(x) = \frac{i-1}{n}$. Tāpēc $f_n(x) \le f(x) < \frac{i}{n}$, no kurienes izriet $\left|f_n(x) - f(x)\right| < \frac{1}{n} \le \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Tātad $(f_n) \overset{E}{\rightrightarrows} f$.

b) Pieņemsim, ka f ir ierobežota mērojama funkcija kopā E. Tad $f = f^+ - f^-$, kur $f^+ = \frac{|f|+f}{2}$ un $f^- = \frac{|f|-f}{2}$ ir nenegatīvas ierobežotas funkcijas kopā E, pie tam šīs funkcijas, ņemot vērā 2.5. paragrāfā teikto, ir mērojamas kopā E. Saskaņā ar a) punktā pierādīto eksistē mērojamu kāpņveida funkciju, katra no kurām pieņem tikai galīgu skaitu vērtību, virknes (f_n^+) un (f_n^-), ka $(f_n^+) \overset{E}{\rightrightarrows} f^+$ un $(f_n^-) \overset{E}{\rightrightarrows} f^-$. Acīmredzot, $f_n = f_n^+ - f_n^-$ $(n \in \mathbb{N})$ ir mērojamas kāpņveida funkcijas, katra no kurām pieņem tikai galīgu skaitu vērtību, pie tam $(f_n) \overset{E}{\rightrightarrows} f$.

Pietiekamība izriet no 2.8. teorēmas.◄

2.16. teorēma. *Funkcija f ir mērojama kopā E tad un tikai tad, kad eksistē kopā E mērojamu kāpņveida funkciju virkne (f_n), ka $(f_n) \overset{E}{\rightrightarrows} f$.*

► *Nepieciešamība.* Konstruēsim kopā E definētu funkciju virkni (f_n) šādi. Dotajiem $n \in \mathbb{N}$ un $x \in E$ eksistē vienīgs[3] $m = m(n;x) \in \mathbb{Z}$, ka $\frac{m}{n} \le f(x) < \frac{m+1}{n}$. Uzskatīsim, ka $f_n(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{m}{n}$.

Katram $n \in \mathbb{N}$ funkcija f_n ir kāpņveida funkcija kopā E. Tiešām, tā kā $f_n(E) \subset \left\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}\right\} = A_n$ $(n \in \mathbb{N})$, tad kopa $f_n(E)$ ir ne vairāk kā sanumurējama, jo tā ir ne vairāk kā sanumurējamas kopas A_n apakškopa.

Katram $n \in \mathbb{N}$ funkcija f_n ir mērojama kopā E. Tiešām, ja dotajam $n \in \mathbb{N}$ ir spēkā $\frac{m}{n} \in f_n(E)$, kur $m \in \mathbb{Z}$, tad kopa $f_n^{-1}\left(\frac{m}{n}\right) = \left[\frac{m}{n}; \frac{m+1}{n}\right)$ ir mērojama, jo tā ir mērojamas kopā E funkcijas f Lebega kopu šķēlums (skat. sekas no 2.1. teorēmas). Saskaņā ar mērojamu funkciju 6° īpašību funkcija f_n ir mērojama kopā E katram $n \in \mathbb{N}$.

Pierādīsim, ka $(f_n) \overset{E}{\rightrightarrows} f$. Apskatīsim patvaļīgu $\varepsilon > 0$. Atradīsim tādu $n_0 \in \mathbb{N}$, ka $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Tad jebkuram $n \ge n_0$ un patvaļīgam $x \in E$ eksistē vienīgs $m = m(n;x) \in \mathbb{Z}$, ka $0 \le f(x) - \frac{m}{n} < \frac{1}{n}$, no kurienes izriet $\left|f(x) - f_n(x)\right| < \frac{1}{n} \le \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Saskaņā ar 2.8. definīciju $(f_n) \overset{E}{\rightrightarrows} f$.

Pietiekamība izriet no 2.8. teorēmas.◄

2.7.2. Luzina teorēma

2.11. definīcija. Pieņemsim, ka funkcija f ir definēta mērojamā kopā E. Saka, ka **funkcijai f piemīt C-īpašība kopā** E, ja

1. jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē kopas E mērojama apakškopa E_ε, ka $\mathrm{m}(E \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon$;
2. funkcija f ir nepārtraukta kopā E_ε.

2.18. piezīme. Sniegsim dažus ar šo definīciju saistītus komentārus.

- Terminu "C-īpašība" ieviesa N. Luzins, un tas ir cēlies no franču valodas vārda *continu* - nepārtraukts.
- Ja E ir galīga mēra kopa, tad nosacījums $\mathrm{m}(E \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon$ ir ekvivalents nosacījumam $\mathrm{m}(E) - \mathrm{m}(E_\varepsilon) < \varepsilon$.
- *Funkcija f ir nepārtraukta kopā $E_\varepsilon \subset E$* nozīmē, ka jebkuram $x \in E_\varepsilon$ un patvaļīgai *kopas E_ε punktu* virknei (x_n), ka $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, ir spēkā $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. Saka arī, ka *funkcija f ir nepārtraukta kopā E_ε <u>attiecībā pret kopu E_ε</u>*, lai pasvītrotu, ka virknes (x_n) locekļi tiek ņemti tikai no kopas E_ε.

2.17. teorēma. [Luzina teorēma] *Jebkurai mērojamai funkcijai f kopā E piemīt C-īpašība kopā E.*

► Apskatīsim mērojamu kopā E funkciju f.

a) Pieņemsim, ka funkcija f ir ierobežota kopā E, t.i.,

$$\exists M > 0 \, \forall x \in E : \left|f(x)\right| \le M.$$

[3] Tiešām, ja $n \in \mathbb{N}$ ir fiksēts, tad intervāli $\frac{m}{n}; \frac{m+1}{n}$, kur $m \in \mathbb{Z}$, savstarpēji (t.i., dažādiem $m \in \mathbb{Z}$) nešķeļas un to apvienojums ir vienāds ar $\mathbb{R}$. Tāpēc katram $n \in \mathbb{N}$ un patvaļīgam $x \in \mathbb{R}$ eksistē vienīgs $m = m(n;x)$, ka $\frac{m}{n}; \frac{m+1}{n} \ni x$.

Katram $k \in \mathbb{N}$ nogriezni $[-M; M]$ sadalīsim $2k$ vienādās daļās ar punktiem

$$y_i = -M + \frac{iM}{k} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, 2k).$$

Kopas

$$\begin{aligned} E_{k_1} &= E[y_0 \le f \le y_1], \\ E_{k_i} &= E[y_{i-1} < f \le y_i] \quad (i = 2, 3, \dots, 2k) \end{aligned} \tag{2.27}$$

ir mērojamas, tās savstarpēji nešķeļas, pie tam

$$E = \bigcup_{i=1}^{2k} E_{k_i} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Apskatīsim patvaļīgu $\varepsilon > 0$. Saskaņā ar kopu mērojamības Lebega nozīmē 1° kritēriju katram $k = 1, 2, \dots$ un jebkuram $i = 1, 2, \dots, 2k$ eksistē slēgta kopa F_{k_i}, ka

$$F_{k_i} \subset E_{k_i} \quad (i = 1, 2, \dots, 2k;\ k = 1, 2, \dots) \tag{2.28}$$

un

$$\mathrm{m}\,(E_{k_i} \setminus F_{k_i}) < \frac{\varepsilon}{k \cdot 2^{k+2}} \quad (i = 1, 2, \dots, 2k;\ k = 1, 2, \dots). \tag{2.29}$$

Apskatīsim kopas

$$F_k = \bigcup_{i=1}^{2k} F_{k_i} \quad (k = 1, 2, \dots). \tag{2.30}$$

Tad

$$F_k = \bigcup_{i=1}^{2k} F_{k_i} \subset \bigcup_{i=1}^{2k} E_{k_i} = E \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$E \setminus F_k = \left(\bigcup_{i=1}^{2k} E_{k_i} \right) \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{2k} F_{k_i} \right) \subset \bigcup_{i=1}^{2k} \big(E_{k_i} \setminus F_{k_i}\big) \quad (k = 1, 2, \dots). \tag{2.31}$$

No (2.31), ņemot vērā Lebega mēra monotonitāti un sanumurējamo pusaditivitāti, kā arī nevienādības (2.29), iegūsim

$$\mathrm{m}(E \setminus F_k) \le \sum_{i=1}^{2k} \mathrm{m}\,(E_{k_i} \setminus F_{k_i}) < 2k \cdot \frac{\varepsilon}{k \cdot 2^{k+2}} = \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

jeb

$$\mathrm{m}(E \setminus F_k) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \quad (k = 1, 2, \dots). \tag{2.32}$$

Katram $k = 1, 2, \dots$ kopā F_k definēsim funkciju f_k šādi:

$$\forall x \in F_k : \ f_k(x) = y_i, \ \text{ ja } x \in F_{k_i} \ (i = 1, 2, \dots, 2k).$$

Atzīmēsim, ka funkciju f_k definīcija ir korekta, jo, tā kā kopas F_{k_i} $(i = 1, 2, \dots, 2k)$ savstarpēji nešķeļas, tad jebkurš punkts $x \in F_k$ pieder vienai un tikai vienai kopai F_{k_i} $(i = 1, 2, \dots, 2k)$.

Fiksēsim kādu $k = 1, 2, \dots$. Pierādīsim, ka funkcija f_k ir nepārtraukta kopā F_k. Apskatīsim patvaļīgu $x \in F_k$ un jebkuru kopas F_k punktu virkni (x_n), ka $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Tā kā $x \in F_k = \bigcup\limits_{i=1}^{2k} F_{k_i}$, tad, kā jau iepriekš tika atzīmēts, eksistē vienīgā kopa F_{k_i}, kur $i \in \{1, 2, \dots, 2k\}$, ka $x \in F_{k_i}$. Pierādīsim, ka $x_n \in F_{k_i}$, izņemot, varbūt, galīgu skaitu indeksu n. Pieņemsim pretējo, ka eksistē indekss $j \in \{1; 2; \dots; 2k\}$, pie tam $j \neq i$, ka $x_n \in F_{k_j}$ bezgalīgi daudziem indeksiem n. Sakārtosim šos indeksus augošā virknē

$$n_1 < n_2 < \dots < n_m < \dots$$

un apskatīsim virknes (x_n) apakšvirkni (x_{n_m}). Tā kā virkne (x_n) konverģē uz x, tad arī tās apakšvirkne (x_{n_m}) konverģē uz x. Tā kā kopa F_{k_j} ir slēgta un visi apakšvirknes (x_{n_m}) locekļi pieder šai kopai, tad apakšvirknes (x_{n_m}) robeža x arī pieder kopai F_{k_j}. Tātad $x \in F_{k_i}$ un $x \in F_{k_j}$, t.i., $x \in F_{k_i} \cap F_{k_j}$. Taču tas ir pretrunā ar to, ka $F_{k_i} \cap F_{k_j} = \emptyset$, jo $i \neq j$. Tādējādi $x_n \in F_{k_i}$, izņemot, varbūt, galīgu skaitu indeksu n. Tāpēc $f_k(x_n) = y_i$, izņemot, varbūt, galīgu skaitu indeksu n. Tā kā $x \in F_{k_i}$, tad $f_k(x) = y_i$. Tātad $\lim\limits_{n\to\infty} f_k(x_n) = f_k(x)$, t.i., funkcija f_k ir nepārtraukta punktā $x \in F_k$. Tā kā x ir patvaļīgs kopas F_k punkts, tad funkcija f_k ir nepārtraukta kopā F_k.

Ņemot vērā (2.27), (2.28) un (2.30), iegūsim

$$\forall x \in F_k : \ 0 \leq f_k(x) - f(x) < \frac{M}{k} \quad (k = 1, 2, \dots). \tag{2.33}$$

Apskatīsim kopu $E_\varepsilon = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k$. Tad $E \setminus E_\varepsilon = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (E \setminus F_k)$, no kurienes, ņemot vērā Lebega mēra monotonitāti un sanumurējamo pusaditivitāti, kā arī nevienādības (2.32), iegūsim

$$\mathrm{m}(E \setminus E_\varepsilon) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}(E \setminus F_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Tā kā funkcija f_k $(k \in \mathbb{N})$ ir nepārtraukta kopā F_k, bet $E_\varepsilon = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k \subset F_k$ $(k \in \mathbb{N})$, tad funkcija f_k $(k \in \mathbb{N})$ ir nepārtraukta arī kopā E_ε.

Pierādīsim, ka $(f_k) \overset{E_\varepsilon}{\rightrightarrows} f$. Apskatīsim patvaļīgu $\delta > 0$. Atradīsim tādu $k_0 \in \mathbb{N}$, ka $\frac{M}{k_0} < \delta$. No kopas E_ε definīcijas, ņemot vērā nevienādības (2.33), izriet, ka jebkuram $k \geq k_0$ un katram $x \in E_\varepsilon$ ir spēkā $\left|f_k(x) - f(x)\right| < \frac{M}{k} \leq \frac{M}{k_0} < \delta$. Saskaņā ar 2.8. definīciju $(f_k) \overset{E_\varepsilon}{\rightrightarrows} f$. Tā kā funkcijas f_k $(k \in \mathbb{N})$ ir nepārtrauktas kopā E_ε, tad funkcija f arī ir nepārtraukta kopā E (skat. 2.9. piezīmi). Tātad, ja f ir ierobežota mērojama funkcija kopā E, tad funkcijai f piemīt C-īpašība kopā E.

b) Pieņemsim, ka funkcija f ir neierobežota kopā E. Kopā E definēsim funkciju g, ka

$$\forall x \in E : \ g(x) = \operatorname{arctg} f(x).$$

Funkcija g ir ierobežota kopā E, jo

$$\forall x \in E : \ \left|g(x)\right| < \frac{\pi}{2}.$$

Bez tam funkcija g ir mērojama kopā E:

1. ja $a \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, tad funkcijas g Lebega kopa
$$E\big[g \geq a\big] = E\big[\operatorname{arctg} f \geq a\big] = E\big[f \geq \operatorname{tg} a\big]$$
ir mērojama, jo tā ir vienāda ar mērojamas kopā E funkcijas f Lebega kopu;

2. ja $a \geq \frac{\pi}{2}$ vai $a \leq -\frac{\pi}{2}$, tad funkcijas g Lebega kopa
$$E\big[g \geq a\big] = E\big[\operatorname{arctg} f \geq a\big] = \begin{cases} \emptyset, & \text{ja} \quad a \geq \frac{\pi}{2}, \\ E, & \text{ja} \quad a \leq -\frac{\pi}{2}, \end{cases}$$
arī ir mērojama.

Saskaņā ar a) punktā pierādīto jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē kopas E slēgta apakškopa E_ε, ka $\mathrm{m}(E \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon$ un funkcija g ir nepārtraukta kopā E_ε. Taču tad kopā E_ε nepārtrauktas funkcijas g un kopā $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ nepārtrauktas funkcijas tg kompozīcija $\operatorname{tg} \circ g = f$ arī ir nepārtraukta funkcija kopā E_ε. Tātad, ja f ir neierobežota mērojama funkcija kopā E, tad funkcijai f arī piemīt C-īpašība kopā E. Teorēma ir pierādīta.◀

2.19. piezīme. Luzina teorēma parāda, ka mērojama funkcija kopā E maz atšķiras no nepārtrauktas funkcijas dotajā kopā: atliek no kopas E izmest kādu pēc patikas maza mēra apakškopu un atlikušajā kopas E daļā funkcija kļūs nepārtraukta.

2.20. piezīme. Vai ir spēkā šāds Luzina teorēmas vispārinājums: jebkurai mērojamai funkcijai f kopā E eksistē kopas E nulles mēra apakškopa E_0, ka funkcija f ir nepārtraukta kopā $E \setminus E_0$? Vispārīgā gadījumā atbilde uz šo jautājumu ir *noliedzoša*. Tiešām, pieņemsim, ka A ir kopas $E = [0; 1]$ nekur neblīva apakškopa ar pozitīvu mēru (skat. 13. uzdevumu 1. nodaļas beigās), bet f ir kopas A raksturfunkcija kopā E, t.i.,
$$\forall x \in E: \ f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ja} \quad x \in A, \\ 0, & \text{ja} \quad x \in E \setminus A. \end{cases}$$
Saskaņā ar 2.3. paragrāfa 7° īpašību funkcija f ir mērojama kopā E, bez tam funkcija f ir pārtraukta jebkurā kopas A punktā. Taču, izmetot no kopas $E = [0; 1]$ jebkuru nulles mēra apakškopu E_0, pāri palikušajā kopas E daļā $E \setminus E_0$ funkcija f nebūs nepārtraukta, jo kopas $E \setminus E_0$ apakškopā $A \setminus E_0$ funkcija f vienmēr būs pārtraukta, pie tam $\mathrm{m}(A \setminus E_0) = \mathrm{m}(A) > 0$. Atsevišķos gadījumos šāda apakškopa E_0 eksistē. Piemēram, Dirihlē funkcija $\chi : E \to \mathbb{R}$ (skat. 2.2. piemēru), kur $E = [0; 1]$, kļūs nepārtraukta, ja no kopas E izmest nulles mēra kopu E_0, kas sastāv no visiem kopas E racionāliem punktiem.

2.7.3. Frešē teorēma

2.18. teorēma. *Ja funkcijai f piemīt C-īpašība kopā E, tad jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē kopā $\mathbb{R}$ nepārtraukta funkcija φ, ka*
$$\mathrm{m}\big(E[f \neq \varphi]\big) < \varepsilon. \tag{2.34}$$

▶ Apskatīsim patvaļīgu $\varepsilon > 0$. Tā kā funkcijai f piemīt C-īpašība kopā E, tad eksistē mērojama apakškopa $E_\varepsilon \subset E$, ka funkcija f ir nepārtraukta kopā E_ε un
$$\mathrm{m}(E \setminus E_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.35}$$

Tā kā E_ε ir mērojama kopa, tad saskaņā ar kopu mērojamības Lebega nozīmē 1° kritēriju eksistē tāda slēgta kopa $F \subset E_\varepsilon$, ka

$$\mathrm{m}(E_\varepsilon \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.36}$$

Atzīmēsim, ka

$$E \setminus F \subset (E \setminus E_\varepsilon) \cup (E_\varepsilon \setminus F), \tag{2.37}$$

pie tam kopas $E \setminus F$, $E \setminus E_\varepsilon$ un $E_\varepsilon \setminus F$ ir mērojamas saskaņā ar mērojamu kopu 5° īpašību.

No (2.37), ņemot vērā Lebega mēra monotonitāti un sanumurējamo pusaditivitāti, kā arī nevienādības (2.35) un (2.36), iegūsim

$$\mathrm{m}(E \setminus F) \le \mathrm{m}(E \setminus E_\varepsilon) + \mathrm{m}(E_\varepsilon \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

jeb

$$\mathrm{m}(E \setminus F) < \varepsilon. \tag{2.38}$$

Tā kā funkcija f ir nepārtraukta kopā E_ε, tad tā ir nepārtraukta arī kopas E_ε apakškopā F. Var pierādīt šādu apgalvojumu [14, 163.-164. lpp.]: *ja f ir nepārtraukta funkcija slēgtā kopā $F \subset \mathbb{R}$, tad eksistē tāda nepārtraukta funkcija $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ka $\varphi(x) = f(x)$ jebkuram $x \in F$.* Tā kā f ir nepārtraukta funkcija slēgtā kopā F, tad eksistē nepārtraukta funkcija $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ka $\varphi(x) = f(x)$ jebkuram $x \in F$.

Acīmredzot, $E[f \neq \varphi] \subset E \setminus F$, no kurienes, ņemot vērā Lebega mēra monotonitāti, seko

$$\mathrm{m}\big(E[f \neq \varphi]\big) \le \mathrm{m}(E \setminus F). \tag{2.39}$$

No (2.38) un (2.39) izriet (2.34).◀

2.19. teorēma. [**Frešē**[4] **teorēma**] *Pieņemsim, ka funkcija f ir definēta mērojamā kopā E. Ja jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē kopā $\mathbb{R}$ nepārtraukta funkcija φ, ka*

$$\mathrm{m}\big(E[f \neq \varphi]\big) < \varepsilon,$$

tad eksistē kopā $\mathbb{R}$ nepārtrauktu funkciju virkne (φ_k), ka $(\varphi_k) \xrightarrow[\text{g.v.}]{E} f$.

▶ Apskatīsim konverģentu rindu $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k$ ar pozitīviem locekļiem ε_k $(k \in \mathbb{N})$. Ja $\sigma_k = \sum\limits_{i=k}^{\infty} \varepsilon_i$ ir dotās rindas k-tais atlikums, kur $k \in \mathbb{N}$, tad

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_k = 0. \tag{2.40}$$

No teorēmas nosacījuma izriet, ka jebkuram $k \in \mathbb{N}$ eksistē kopā $\mathbb{R}$ nepārtraukta funkcija φ_k, ka

$$\mathrm{m}(E_k) < \varepsilon_k, \tag{2.41}$$

kur $E_k = E[f \neq \varphi_k]$ $(k \in \mathbb{N})$.

[4] M. Frešē (*Maurice René Fréchet*, 1878-1973) - franču matemātiķis.

Apskatīsim kopas $A_k = \bigcup\limits_{i=k}^{\infty} E_i$ $(k \in \mathbb{N})$ un $A = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. Pierādīsim, ka $\mathrm{m}(A) = 0$. No (2.41), ņemot vērā rindu ar nenegatīviem locekļiem salīdzināšanas pazīmi, iegūsim

$$\sum_{i=k}^{\infty} \mathrm{m}(E_i) \leq \sum_{i=k}^{\infty} \varepsilon_i = \sigma_k \ (k \in \mathbb{N}). \tag{2.42}$$

Izmantojot Lebega mēra nenegativitāti, monotonitāti, sanumurējamo pusaditivitāti un (2.42), atrodam

$$0 \leq \mathrm{m}(A_k) = \mathrm{m}\left(\bigcup_{i=k}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=k}^{\infty} \mathrm{m}(E_i) \leq \sigma_k \ (k \in \mathbb{N})$$

jeb

$$0 \leq \mathrm{m}(A_k) \leq \sigma_k \ (k \in \mathbb{N}), \tag{2.43}$$

no kurienes, ņemot vērā teorēmu par robežpāreju nevienādībās un (2.40), iegūsim

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} \mathrm{m}(A_k) \leq \lim_{k\to\infty} \sigma_k = 0.$$

Tātad

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{m}(A_k) = 0. \tag{2.44}$$

No (2.43) seko, ka A_k $(k \in \mathbb{N})$ ir galīga mēra kopas. Tā kā kopu virkne $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ ir dilstoša, tad saskaņā ar Lebega mēra pusnepārtrauktību no augšas ir spēkā

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{m}(A_k) = \mathrm{m}(A). \tag{2.45}$$

No (2.44) un (2.45) izriet, ka $\mathrm{m}(A) = 0$, t.i., A ir kopas E nulles mēra apakškopa.

Pierādīsim, ka $(\varphi_k) \xrightarrow[\text{g.v.}]{E} f$. Apskatīsim patvaļīgu $x \in E \setminus A$. Tad $x \notin A = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. Tāpēc eksistē tāds $k \in \mathbb{N}$, ka $x \notin A_k = \bigcup\limits_{i=k}^{\infty} E_i$, t.i., $x \notin E_i$ $(i \geq k)$ jeb $f(x) = \varphi_i(x)$ $(i \geq k)$, no kurienes izriet $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x)$. Tātad eksistē kopas E nulles mēra apakškopa A, ka $(\varphi_k) \xrightarrow{E\setminus A} f$. Tas nozīmē, ka funkciju virkne (φ_k) konverģē gandrīz visur kopā E uz funkciju f.◀

2.7.4. Mērojamas funkcijas kritēriji

Nākamā teorēma sniedz vairākus ekvivalentus visu mērojamo funkciju kopā E klases raksturojumus.

2.20. teorēma. *Pieņemsim, ka funkcija f ir definēta mērojamā kopā E. Šādi apgalvojumi ir ekvivalenti.*

1. *Funkcija f ir mērojama kopā E, t.i., funkcijas f Lebega kopa $E[f \geq a]$ ir mērojama jebkuram $a \in \mathbb{R}$.*
2. *Eksistē kopā E mērojamu kāpņveida funkciju, katra no kurām pieņem tikai galīgu skaitu vērtību, virkne (f_n), ka $(f_n) \xrightarrow{E} f$.*

3. *Eksistē kopā E mērojamu kāpņveida funkciju virkne (f_n), ka $(f_n) \overset{E}{\rightrightarrows} f$.*
4. *Funkcijai f piemīt C-īpašība kopā E, t.i., jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē mērojama apakškopa $E_\varepsilon \subset E$, ka $\mathrm{m}(E \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon$ un funkcija f ir nepārtraukta kopā E_ε.*
5. *Jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē kopā $\mathbb{R}$ nepārtraukta funkcija φ, ka $\mathrm{m}\big(E[f \neq \varphi]\big) < \varepsilon$.*
6. *Eksistē kopā $\mathbb{R}$ nepārtrauktu funkciju virkne (φ_n), ka $(\varphi_n) \xrightarrow[\text{g.v.}]{E} f$.*

► Teorēmas patiesumu pamato shēmas:

$$2. \xleftrightarrow{\text{2.14. teorēma}} 1. \xleftrightarrow{\text{2.16. teorēma}} 3.$$

$$1. \xrightarrow[\text{Luzina teorēma}]{\text{2.17. teorēma}} 4. \xrightarrow{\text{2.18. teorēma}} 5. \xrightarrow[\text{Frešē teorēma}]{\text{2.19. teorēma}} 6. \xrightarrow[\text{Lebega teorēma}]{\text{2.8. teorēma}} 1.$$

Atzīmēsim tikai, ka, ja funkcijas φ_n $(n \in \mathbb{N})$ ir nepārtrauktas kopā $\mathbb{R}$, tad tās, protams, ir nepārtrauktas arī mērojamā apakškopā $E \subset \mathbb{R}$ un tāpēc arī mērojamas kopā E.◄

2.21. piezīme.

- Ja E ir galīga mēra kopa, tad nosacījumu $\mathrm{m}(E \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon$ 2.20. teorēmas 4. punktā var nomainīt ar nosacījumu $\mathrm{m}(E) - \mathrm{m}(E_\varepsilon) < \varepsilon$.
- Ja f ir ierobežota funkcija kopā E, tad 2.20. teorēmas 2. punktā nosacījumu $(f_n) \xrightarrow{E} f$ var nomainīt ar nosacījumu $(f_n) \overset{E}{\rightrightarrows} f$ (skat. 2.15. teorēmu).

2.22. piezīme. 2.20. teorēmas 2., 3., 4., 5. un 6. punktā minētās mērojamu funkciju īpašības var tikt ņemtas par mērojamas funkcijas definīciju. Visbiežāk izmanto 2. un 3. punktā minētās īpašības, kuras attiecīgi ļauj definēt mērojamu funkciju mērojamā kopā E kā šajā kopā kāpņveida funkciju, katra no kurām pieņem tikai galīgu skaitu vērtību, virknes (f_n) robežu, vai kā kopā E kāpņveida funkciju virknes (f_n) vienmērīgo robežu šajā kopā, pie tam gan vienā, gan otrā gadījumā jebkuram $n \in \mathbb{N}$ un katram $a \in \mathbb{R}$ kopai $f^{-1}(a)$ ir jābūt mērojamai.

2.8. Noslēguma piezīmes par funkciju mērojamību

Apskatīsim funkciju $f : E \to \mathbb{R}$, kur $E \subset \mathbb{R}$. Ir spēkā šāds apgalvojums: *ja jebkuram $a \in \mathbb{R}$ funkcijas f Lebega kopas $E[f \geq a]$ ir mērojamas, tad arī kopa E ir mērojama.* Apgalvojuma patiesums izriet no vienādības

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E[f \geq -n].$$

Analoģiski apgalvojumi ir spēkā arī pārējām funkcijas f Lebega kopām $E[f > a]$, $E[f \leq a]$ un $E[f < a]$. Iepriekš teiktais ļauj 2.2. definīcijā un 2.1. teorēmā atteikties no kopas E mērojamības.

Dažkārt ir jāsastopas ar nepieciešamību apskatīt reālā mainīgā funkcijas, kuras bez reālām vērtībām pieņem arī vērtības $-\infty$ un $+\infty$, t.i., funkcijas $f : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$, kur $E \subset \mathbb{R}$,

bet $\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ ir paplašinātā reālo skaitļu kopa. Šādu funkciju mērojamību var definēt ar jau pazīstamo 2.2. definīciju, pie tam skaitli a joprojām var uzskatīt par reālu. Atzīmēsim tikai, ka, ja $f : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$ ir mērojama funkcija kopā E (nepieprasot, lai kopa E būtu mērojama), tad kopas $E[f = -\infty]$ un $E[f = +\infty]$ ir mērojamas, jo

$$E[f = -\infty] = \bigcap_{n=1}^{\infty} E[f \leq -n] \quad \text{un} \quad E[f = +\infty] = \bigcap_{n=1}^{\infty} E[f \geq n].$$

Viegli pārliecināties, ka visi 2.2.-2.5. paragrāfos formulētie apgalvojumi paliek spēkā arī funkcijām $f : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$ ar piebildi, ka darbībām ar funkcijām ir jābūt izpildāmām, piemēram, apskatot divu funkciju summu kādā kopā, apskatāmā kopa nedrīkst saturēt punktus, kuros funkcijas pieņem dažādu zīmju bezgalīgas vērtības.

! Īpašu vietu ieņem 2.1. teorēma, kurā, apskatot funkciju $f : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$, nosacījumu par kopas E mērojamību nedrīkst atmest. Piemēram, funkcijas f, kura pieņem vērtību $-\infty$ jebkurā nemērojamas kopas E punktā, jebkura Lebega kopa $E[f \geq a]$, kur $a \in \mathbb{R}$, ir vienāda ar tukšo kopu un līdz ar to ir mērojama. Taču tad

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E[f \geq -n] = \emptyset,$$

kas ir pretrunā ar kopas E nemērojamību. Tātad vispārīgā gadījumā kopas E mērojamība neseko no funkcijas $f : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$ viena veida Lebega kopu mērojamības (piemēram, no Lebega kopu $E[f \geq a]$ mērojamības jebkuram $a \in \mathbb{R}$). Ja funkcijas $f : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$ mērojamības definīcijā pieprasīt funkcijas f visu četru veidu Lebega kopu mērojamību jebkuram $a \in \mathbb{R}$ (skat. [14, 141.-142., 152.-153. lpp.]), tad nosacījumu par kopas E mērojamību var atmest.

Starp funkcijām $f : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$ vislielāko interesi izraisa **gandrīz visur galīgas kopā** E **funkcijas** - funkcijas $f : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$, kuras pieņem vērtības $-\infty$ un $+\infty$ tikai kādā kopas E nulles mēra apakškopā, t.i., $\mathrm{m}(E_0) = 0$, kur $E_0 = E[f = -\infty] \cup E[f = +\infty]$. Ja gandrīz visur galīgas kopā E funkcijas $f : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$ bezgalīgās vērtības, ja tādas, protams, eksistē, nomainīt ar kādu galīgu, t.i., reālu, konstanti, tad iegūsim dotajai funkcijai ekvivalentu funkciju $f_1 : E \to \mathbb{R}$, par kuru saka, ka tā ir **visur galīga kopā** E **funkcija** (līdz ar to šīs nodaļas iepriekšējos paragrāfos tika aplūkota visur galīgu apskatāmajā kopā funkciju mērojamība). Sekojot 2.9. un 2.10. definīcijai, var definēt gandrīz visur galīgu kopā E funkciju f_n ($n \in \mathbb{N}$) virknes (f_n) konverģenci gandrīz visur kopā E un konverģenci pēc mēra kopā E. Atzīmēsim tikai, ka vispārīgā gadījumā kopa $E\big[|f_n - f| < \varepsilon\big]$ nav kopas $E\big[|f_n - f| \geq \varepsilon\big]$ papildkopa līdz kopai E, jo kopa E var saturēt arī nulles mēra apakškopu E_0, kura sastāv no visiem tiem kopas E punktiem, kuros starpība $f_n - f$ nav definēta.

Var pierādīt (skat., piemēram, [14], [22], [23] un [29]), ka 2.8. (- Lebega teorēma), 2.9. (- Lebega teorēma), 2.10., 2.12. (- Risa teorēma), 2.13. (- Jegorova teorēma), 2.14., 2.17. (- Luzina teorēma), 2.18., 2.19.(- Frešē teorēma) un 2.20. teorēma ir spēkā arī gandrīz visur galīgu apskatāmajā kopā funkciju virknēm.

2.9. Uzdevumi

1. Pieņemsim, ka f_1 un f_2 ir mērojamas funkcijas kopā E. Pierādīt:

   (a) $g = \max\{f_1; f_2\}$ ir mērojama funkcija kopā E, kur
   $$\forall x \in E : g(x) = \max\big\{f_1(x); f_2(x)\big\};$$

   (b) $h = \min\{f_1; f_2\}$ ir mērojama funkcija kopā E, kur
   $$\forall x \in E : h(x) = \min\big\{f_1(x); f_2(x)\big\}.$$

2. Pierādīt:

   (a) funkcija f ir mērojama kopā E tad un tikai tad, kad funkcija f^3 ir mērojama kopā E;

   (b) funkcija f ir mērojama kopā E tad un tikai tad, kad funkcija $\operatorname{arctg} f$ ir mērojama kopā E;

   (c) funkcija f ir mērojama kopā E tad un tikai tad, kad funkcija $\sin f$ ir mērojama kopā E.

3. Vai no funkcijas f^2 mērojamības kopā E izriet funkcijas f mērojamības kopā E?

4. Vai no funkcijas $|f|$ mērojamības kopā E izriet funkcijas f mērojamības kopā E?

5. Vai no funkcijas $e^{|f|}$ mērojamības kopā E izriet funkcijas f mērojamības kopā E?

6. Vai no funkcijas $\cos f$ mērojamības kopā E izriet funkcijas f mērojamības kopā E?

7. Pieņemsim, ka funkcija f ir nenegatīva kopā E, bet $\alpha > 0$. Pierādīt, ka funkcija f ir mērojama kopā E tad un tikai tad, kad funkcija f^α ir mērojama kopā E. Ko var teikt par funkcijas f^α mērojamību kopā E, ja funkcija f pieņem arī negatīvas vērtības kopā E?

8. Pieņemsim, ka funkcija f ir mērojama katrā nogrieznī $[\alpha; \beta]$, kur $a < \alpha < \beta < b$. Pierādīt, ka funkcija f ir mērojama nogrieznī $[a; b]$.

9. Pieņemsim, ka (f_n) ir mērojamu kopā E funkciju virkne.

   (a) Pierādīt, ka funkcija φ ir mērojama kopā E, kur
   $$\forall x \in E : \varphi(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x).$$

   (b) Pierādīt, ka funkcija ψ ir mērojama kopā E, kur
   $$\forall x \in E : \psi(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x).$$

   (c) Pierādīt, ka funkcija g ir mērojama kopā E, kur
   $$\forall x \in E : g(x) = \varliminf_{n\to\infty} f_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} f_k(x).$$

(d) Pierādīt, ka funkcija h ir mērojama kopā E, kur

$$\forall x \in E : h(x) = \overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x) \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} f_k(x).$$

(e) Pierādīt, ka, ja funkcija f ir mērojama kopā E, tad kopa $E\left[f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f\right]$ ir mērojama.

10. Pieņemsim, ka funkcijai f eksistē galīgs atvasinājums katrā nogriezņa $[a;b]$ punktā (uzskata, ka punktos a un b eksistē attiecīgie vienpusējie atvasinājumi). Pierādīt, ka funkcijas f atvasinājums f' ir mērojama funkcija nogriezņī $[a;b]$.

11. Pieņemsim, ka funkcija $f : E \to \mathbb{R}$ ir mērojama kopā E. Pierādīt:

    (a) jebkuras vaļējas kopas $G \subset \mathbb{R}$ pirmtēls $f^{-1}(G)$ attēlojumā f ir mērojama kopa;

    (b) jebkuras slēgtas kopas $F \subset \mathbb{R}$ pirmtēls $f^{-1}(F)$ attēlojumā f ir mērojama kopa.

12. Pieņemsim, ka funkcija $f : E \to \mathbb{R}$ ir mērojama kopā E, bet $A \subset \mathbb{R}$ ir mērojama kopa. Vai kopas A pirmtēls $f^{-1}(A)$ attēlojumā f ir mērojama kopa?

13. Pieņemsim, ka funkcija $f : E \to \mathbb{R}$ ir mērojama kopā E, bet B ir kopas E mērojama apakškopa. Vai kopas B attēls $f(B)$ attēlojumā f ir mērojama kopa?

14. Pieņemsim, ka funkcija f ir mērojama kopā E, bet $E_1 = f(E)$ ir funkcijas f vērtību kopa. Pieņemsim, ka funkcija g ir nepārtraukta kopā E_1. Pierādīt, ka funkciju f un g kompozīcija $g \circ f$ ir mērojama funkcija kopā E.

15. Pieņemsim, ka funkcija f ir nepārtraukta nogriezņī $E = [a;b]$, bet $E_1 = f(E)$ ir funkcijas f vērtību kopa. Pieņemsim, ka funkcija g ir mērojama kopā E_1. Vai funkciju f un g kompozīcija $g \circ f$ ir mērojama funkcija kopā E?

16. Pieņemsim, ka $(f_n) \overset{E}{\Rightarrow} f$ un $(f_n) \overset{E}{\Rightarrow} g$. Pierādīt, ka $f \overset{E}{\sim} g$.

17. Pieņemsim, ka $(f_n) \overset{E}{\Rightarrow} f$ un $f \overset{E}{\sim} g$. Pierādīt, ka $(f_n) \overset{E}{\Rightarrow} g$.

18. Pieņemsim, ka $(f_n) \xrightarrow[\text{g.v.}]{E} f$ un $(f_n) \xrightarrow[\text{g.v.}]{E} g$. Pierādīt, ka $f \overset{E}{\sim} g$.

19. Pieņemsim, ka $(f_n) \xrightarrow[\text{g.v.}]{E} f$ un $f \overset{E}{\sim} g$. Pierādīt, ka $(f_n) \xrightarrow[\text{g.v.}]{E} g$.

20. Pieņemsim, ka $(f_n) \overset{E}{\Rightarrow} f$ un $(f_n) \xrightarrow[\text{g.v.}]{E} g$. Pierādīt, ka $f \overset{E}{\sim} g$.

21. Pieņemsim, ka $(f_n) \overset{E}{\Rightarrow} f$ un $(g_n) \overset{E}{\Rightarrow} g$, kur E ir galīga vai bezgalīga mēra kopa. Pierādīt:

    (a) $\big(|f_n|\big) \overset{E}{\Rightarrow} |f|$;

    (b) $(f_n + g_n) \overset{E}{\Rightarrow} f + g$;

    (c) ja $f \overset{\text{E}}{\sim} \mathbb{O}$, tad $(f_n^2) \overset{E}{\Rightarrow} \mathbb{O}$.

22. Pieņemsim, ka $(f_n) \overset{E}{\Rightarrow} f$ un $(g_n) \overset{E}{\Rightarrow} g$, pie tam E ir galīga mēra kopa. Pierādīt:

(a) $(f_n g) \overset{E}{\Rightarrow} fg$;

(b) $(f_n g_n) \overset{E}{\Rightarrow} fg$;

(c) $\left(\frac{f_n}{g_n}\right) \overset{E}{\Rightarrow} \frac{f}{g}$, kur $g(x) \neq 0$ jebkuram $x \in E$;

(d) $(f_n^2) \overset{E}{\Rightarrow} f^2$;

(e) ja katram $n \in \mathbb{N}$ ir spēkā nevienādība $f_n(x) \leq a$ $(a \in \mathbb{R})$ gandrīz visiem $x \in E$, tad $f(x) \leq a$ gandrīz visiem $x \in E$.

(f) ja h_n $(n \in \mathbb{N})$ ir mērojamas funkcijas kopā E, pie tam $(f_n) \overset{E}{\Rightarrow} f$, $(g_n) \overset{E}{\Rightarrow} f$ un $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{m}\big(E[f_n \leq h_n \leq g_n]\big) = \mathrm{m}(E)$, tad $(h_n) \overset{E}{\Rightarrow} f$.

23. Apskatīsim kopā $\mathbb{R}$ definētas funkcijas f_n $(n \in \mathbb{N})$ un g, ka

$$\forall x \in \mathbb{R} : f_n(x) = \frac{1}{n + x^2};$$
$$\forall x \in \mathbb{R} : g(x) = x^2.$$

Pierādīt, ka $(f_n) \overset{\mathbb{R}}{\Rightarrow} \mathbb{O}$, taču $(f_n g) \overset{\mathbb{R}}{\not\Rightarrow} \mathbb{O}$ (tātad 22. uzdevumā nosacījums $\mathrm{m}(E) < +\infty$ ir būtisks, lai būtu spēkā šī uzdevuma (a) un (b) apgalvojumi).

24. Pieņemsim, ka funkcijas f_n un f $(n \in \mathbb{N})$ ir mērojamas kopā E. Saka, ka **funkciju virkne** (f_n) **konverģē Jegorova nozīmē kopā** E **uz funkciju** f, ja jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē mērojama apakškopa $e \subset E$, ka $\mathrm{m}(e) < \varepsilon$ un $(f_n) \overset{E\setminus e}{\rightrightarrows} f$. Pierādīt:

(a) ja funkciju virkne (f_n) konverģē Jegorova nozīmē kopā E uz funkciju f, tad $(f_n) \xrightarrow[\text{g.v.}]{E} f$ un līdz ar to $(f_n) \overset{E}{\Rightarrow} f$;

(b) vispārīgā gadījumā no $(f_n) \overset{E}{\Rightarrow} f$ neizriet funkciju virknes (f_n) konverģence Jegorova nozīmē kopā E uz funkciju f;

(c) ja funkciju virkne (f_n) konverģē pēc mēra kopā E uz funkciju f, tad eksistē virknes (f_n) apakšvirkne (f_{n_k}), kura konverģē Jegorova nozīmē kopā E uz funkciju f.

25. Apskatīsim kopā $\mathbb{R}$ definētu funkciju virkni (f_n), ka

$$\forall x \in \mathbb{R} : \ f_n(x) = e^{-(x-n)^2}.$$

Pierādīt, ka $(f_n) \overset{\mathbb{R}}{\to} \mathbb{O}$, kur $\mathbb{O}$ ir nullfunkcija kopā $\mathbb{R}$, taču $(f_n) \overset{\mathbb{R}}{\not\Rightarrow} \mathbb{O}$ un funkciju virkne (f_n) nekonverģē Jegorova nozīmē kopā E uz funkciju f.

26. Pieņemsim, ka funkcija f ir definēta mērojamā kopā E, pie tam kopa $E[f = a]$ ir mērojama jebkuram $a \in \mathbb{R}$. Pierādīt, ka funkcija f var būt arī nemērojama kopā E.

27. Pieņemsim, ka funkcijas f_n $(n \in \mathbb{N})$ ir mērojamas kopā E un $(f_n) \xrightarrow[\text{g.v.}]{E} f$. Pierādīt, ka

(a) funkcija f ir mērojama kopā E;

(b) jebkuram $\delta > 0$ un jebkurai kompaktai kopai K, $K \subset E$, eksistē kompakta[5] kopa K_δ, $K_\delta \subset K$, ka $\mathrm{m}(K \setminus K_\delta) < \delta$ un $(f_n) \overset{K_\delta}{\rightrightarrows} f$.

28. Pierādīt, ka jebkura kāpņveida funkcija $f : E \to \mathbb{R}$, kura pieņem tikai galīgu skaitu vērtību, $f(E) = \{a_1; a_2; \ldots; a_s\}$, ir kopas E apakškopu $E_k = f^{-1}(a_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, s)$ raksturfunkciju $\chi_{E_k} : E \to \mathbb{R}$ $(k = 1, 2, \ldots, s)$ kopā E lineāra kombinācija, pie tam
$$\forall x \in E : \; f(x) = \sum_{k=1}^{s} a_k \chi_{E_k}(x).$$

29. Apskatīsim funkciju f, ka $f(x) = |x|$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$. Konstruēt kopā $\mathbb{R}$ kāpņveida funkciju virkni (f_n), ka $(f_n) \overset{\mathbb{R}}{\to} f$. Vai $(f_n) \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f$?

30. Pieņemsim, ka

    (a) funkcijas f_n $(n \in \mathbb{N})$ un f ir mērojamas kopā $\mathbb{R}$;

    (b) gandrīz visiem $x \in \mathbb{R}$ ir spēkā nevienādība $f_n(x) \leq \frac{1}{|x|}$;

    (c) $(f_n) \xrightarrow[\text{g.v.}]{\mathbb{R}} f$.

    Pierādīt, ka $(f_n) \overset{\mathbb{R}}{\Rightarrow} f$ (*norādījums:* izmantot konverģences pēc mēra definīciju un 2.9. teorēmu).

[5] Par kompaktām kopām $E \subset \mathbb{R}$ skat. 6.2.3. apakšparagrāfu.

3. nodaļa

LEBEGA INTEGRĀLIS

Šajā nodaļā tiek apskatīts vienkārtīgā Rīmaņa integrāļa vispārinājums - viena reālā mainīgā ierobežotu funkciju Lebega integrālis galīga mēra kopās. Tiks aplūkotas Lebega integrāļa īpašības, tā saistība ar Rīmaņa integrāli, Lebega integrāļa izmantošana primitīvās funkcijas atrašanai ierobežota atvasinājuma gadījumā (- vispārinātā Ņūtona-Leibnica[1] formula), kā arī daži funkciju integrējamības Rīmaņa nozīmē teorijas jautājumi (- integrējamības Rīmaņa nozīmē Lebega kritērijs, integrējamu Rīmaņa nozīmē funkciju klases), kuru izklāstā nozīmīgu vietu ieņem Lebega mēra un integrāļa teorija.

3.1. Integrējamas Rīmaņa nozīmē funkcijas (īss atkārtojums)

Apskatīsim ierobežotu funkciju $f : [a; b] \to \mathbb{R}$, kur $a, b \in \mathbb{R}$ un $a < b$.

3.1. definīcija. Par **nogriežņa** $[a; b]$ **sasmalcinājumu** sauc jebkuru šī nogriežņa punktu sistēmu $T = \{x_k\}_{k=0}^n$, ka $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Nogriežņus $[x_{k-1}; x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ sauc par **nogriežņa** $[a; b]$ **sasmalcinājuma** T **elementārajiem nogriežņiem**. Pieņemsim, ka $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Skaitli $\lambda = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta x_k$ sauc par **nogriežņa** $[a; b]$ **sasmalcinājuma** T **soli**, bet patvaļīgi izvēlētus punktus $\xi_k \in [x_{k-1}; x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ sauc par **nogriežņa** $[a; b]$ **sasmalcinājuma** T **starppunktiem**. Sasmalcinājuma T starppunktu ξ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ sistēmu apzīmēsim ar ξ, t.i., $\xi = \{\xi_k\}_{k=1}^n$.

3.2. definīcija. Apskatīsim patvaļīgu nogriežņa $[a; b]$ sasmalcinājumu $T = \{x_k\}_{k=0}^n$ un brīvi izraudzītus šī sasmalcinājuma starppunktus ξ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Summu

$$\sigma(T; \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

sauc par **funkcijas** f **integrālo Rīmaņa summu, kas atbilst nogriežņa** $[a; b]$ **sasmalcinājumam** $T = \{x_k\}_{k=0}^n$ **un starppunktu sistēmai** $\xi = \{\xi_k\}_{k=1}^n$.

[1] Angļu matemātiķis I. Ņūtons (*Isaac Newton*, 1643-1727) un vācu matemātiķis G.V. Leibnics (*Gotfried Wilhelm von Leibniz*, 1646-1716) izstrādāja diferenciālrēķinu un integrālrēķinu pamatus (neatkarīgi viens no otra).

3.3. definīcija. Funkciju $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ sauc par **integrējamu Rīmaņa nozīmē funkciju nogriezni** $[a;b]$, ja eksistē skaitlis $\mathfrak{I} \in \mathbb{R}$, ka jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē $\delta > 0$, ka visiem nogriežņa $[a;b]$ sasmalcinājumiem T ar soli λ, ka $\lambda < \delta$, un patvaļīgai starppunktu ξ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ izvēlei nogriežņa $[a;b]$ attiecīgajā sasmalcinājumā T, ir patiesa nevienādība $\left|\sigma(T;\xi) - \mathfrak{I}\right| < \varepsilon$. Skaitli $\mathfrak{I}$ sauc par **funkcijas** f **Rīmaņa integrāli nogriezni** $[a;b]$ un apzīmē ar $\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f(x)dx}$.

- *Funkcijas $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ ierobežotība nogriezni $[a;b]$ ir tās integrējamības Rīmaņa nozīmē šajā nogriezni nepieciešamais nosacījums.*

Apskatīsim *ierobežotu* funkciju $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ un patvaļīgu nogriežņa $[a;b]$ sasmalcinājumu $T = \{x_k\}_{k=0}^n$. Tā kā funkcija f ir ierobežota nogriezni $[a;b]$, tad funkcija f ir ierobežota katrā elementārajā nogriezni $[x_{k-1};x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Tāpēc eksistē galīgi

$$\inf_{[x_{k-1};x_k]} f \quad \text{un} \quad \sup_{[x_{k-1};x_k]} f \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

3.4. definīcija. Par **funkcijas** f **apakšējo un augšējo Darbū**[2]**-Rīmaņa summu, kas atbilst nogriežņa** $[a;b]$ **sasmalcinājumam** $T = \{x_k\}_{k=0}^n$, sauc attiecīgi skaitļus

$$\underline{s}(T) = \sum_{k=1}^{n} \inf_{[x_{k-1};x_k]} f \cdot \Delta x_k \quad \text{un} \quad \overline{s}(T) = \sum_{k=1}^{n} \sup_{[x_{k-1};x_k]} f \cdot \Delta x_k.$$

Ir spēkā šādas Darbū-Rīmaņa summu īpašības.

1° *Jebkuram nogriežņa $[a;b]$ sasmalcinājumam $T = \{x_k\}_{k=0}^n$ un patvaļīgai starppunktu ξ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ izvēlei šajā sasmalcinājumā ir patiesas nevienādības $\underline{s}(T) \le \sigma(T;\xi) \le \overline{s}(T)$.*

3.5. definīcija. Pieņemsim, ka T un T^* ir nogriežņa $[a;b]$ sasmalcinājumi. Sasmalcinājumu T^* sauc par **sasmalcinājuma** T **turpinājumu**, ja T^* ir iegūts no T, pievienojot pēdējam jaunus punktus.

2° *Ja nogriežņa $[a;b]$ sasmalcinājums T^* ir šī nogriežņa sasmalcinājuma T turpinājums, tad $\underline{s}(T) \le \underline{s}(T^*) \le \overline{s}(T^*) \le \overline{s}(T)$.*

3° *Ja T_1 un T_2 ir nogriežņa $[a;b]$ sasmalcinājumi, tad $\underline{s}(T_1) \le \underline{s}(T_2)$.*

Apskatīsim ierobežotu funkciju $f : [a;b] \to \mathbb{R}$. No Darbū-Rīmaņa summu 3° īpašības seko, ka

$$\mathcal{A} = \{\underline{s}(T)\} \le \{\overline{s}(T)\} = \mathcal{B},$$

kur $\mathcal{A}$ ir visu funkcijas f apakšējo Darbū-Rīmaņa summu kopa, bet $\mathcal{B}$ ir visu funkcijas f augšējo Darbū-Rīmaņa summu kopa. Kopas $\mathcal{A}$ un $\mathcal{B}$ ir netukšas, jo, piemēram, ja $x_0 = a$ un $x_1 = b$, tad $T = \{x_0; x_1\}$ ir nogriežņa $[a;b]$ sasmalcinājums ar vienu elementāro nogriezni - pašu nogriezni $[a;b]$, bet

$$\underline{s}(T) = \inf_{[a;b]} f \cdot (b-a) \quad \text{un} \quad \overline{s}(T) = \sup_{[a;b]} f \cdot (b-a)$$

[2] G. Darbū (1842-1917) - franču matemātiķis.

ir attiecīgi funkcijas f apakšējā un augšējā Darbū-Rīmaņa summas, kas atbilst šim nogriežņa $[a;b]$ sasmalcinājumam, t.i., $\underline{s}(T) \in \mathcal{A}$ un $\overline{s}(T) \in \mathcal{B}$. Tātad $(\mathcal{A};\mathcal{B})$ ir reālo skaitļu kopas $\mathbb{R}$ šķēlums. Tāpēc saskaņā ar atdalītājnogriežņa principu (skat. 6.1. paragrāfu) eksistē galīgi

$$\underline{\mathfrak{I}}_R(f) = \sup \mathcal{A} = \sup \{\underline{s}(T)\} \quad \text{un} \quad \overline{\mathfrak{I}}_R(f) = \inf \mathcal{B} = \inf \{\overline{s}(T)\},$$

pie tam

$$\underline{\mathfrak{I}}_R(f) \leq \overline{\mathfrak{I}}_R(f).$$

3.6. definīcija. Skaitļus $\underline{\mathfrak{I}}_R(f)$ un $\overline{\mathfrak{I}}_R(f)$ sauc par **funkcijas f attiecīgi apakšējo un augšējo Rīmaņa integrāli nogriezņī** $[a;b]$.

Ir spēkā šādi integrējamības Rīmaņa nozīmē kritēriji.

1° *Ierobežota funkcija $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ ir integrējama Rīmaņa nozīmē nogriezņī $[a;b]$ tad un tikai tad, kad $\underline{\mathfrak{I}}_R(f) = \overline{\mathfrak{I}}_R(f)$, t.i., kopām $\mathcal{A}$ un $\mathcal{B}$ eksistē vienīgs atdalītājskaitlis $\mathfrak{I}_R(f) = \underline{\mathfrak{I}}_R(f) = \overline{\mathfrak{I}}_R(f)$, kurš ir vienāds ar funkcijas f Rīmaņa integrāli nogriezņī $[a;b]$.*

2° *Ierobežota funkcija $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ ir integrējama Rīmaņa nozīmē nogriezņī $[a;b]$ tad un tikai tad, kad jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tādi nogriežņa $[a;b]$ sasmalcinājumi T_1 un T_2, ka $\overline{s}(T_2) - \underline{s}(T_1) < \varepsilon$.*

3° *Ierobežota funkcija $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ ir integrējama Rīmaņa nozīmē nogriezņī $[a;b]$ tad un tikai tad, kad jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds nogriežņa $[a;b]$ sasmalcinājums T, ka $\overline{s}(T) - \underline{s}(T) < \varepsilon$.*

4° *Ierobežota funkcija $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ ir integrējama Rīmaņa nozīmē nogriezņī $[a;b]$ tad un tikai tad, kad jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē $\delta > 0$, ka jebkuram nogriežņa $[a;b]$ sasmalcinājumam T ar soli $\lambda < \delta$ ir spēkā nevienādība $\overline{s}(T) - \underline{s}(T) < \varepsilon$.*

5° *Ierobežota funkcija $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ ir integrējama Rīmaņa nozīmē nogriezņī $[a;b]$ tad un tikai tad, kad eksistē tāda nogriežņa $[a;b]$ sasmalcinājumu virkne (T_n), ka $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\overline{s}(T_n) - \underline{s}(T_n)\right] = 0$.*

6° *Ierobežota funkcija $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ ir integrējama Rīmaņa nozīmē nogriezņī $[a;b]$ tad un tikai tad, kad jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds nogriežņa $[a;b]$ sasmalcinājums $T = \{x_k\}_{k=0}^n$, ka $\sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k(f) \cdot \Delta x_k < \varepsilon$, kur*

$$\omega_k(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{[x_{k-1};x_k]} f - \inf_{[x_{k-1};x_k]} f$$

*ir **funkcijas f svārstība nogriezņī** $[x_{k-1};x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.*

Atzīmēsim dažas integrējamu Rīmaņa nozīmē funkciju klases.

- *Jebkura nepārtraukta nogriezņī funkcija ir integrējama Rīmaņa nozīmē šajā nogriezņī.*
- *Jebkura monotona nogriezņī funkcija ir integrējama Rīmaņa nozīmē šajā nogriezņī.*

- *Jebkura nogrieznī ierobežota funkcija, kurai šajā nogrieznī ir galīgs skaits pārtraukuma punktu, ir integrējama Rīmaņa nozīmē apskatāmajā nogrieznī.*

No integrējamības Rīmaņa nozīmē 1° kritērija izriet, ka *Rīmaņa integrāli varēja definēt arī kā iepriekš aplūkotā šķēluma* $(\mathcal{A};\mathcal{B})$ *vienīgo atdalītājskaitli* (skat., piemēram, [9]). Šo ideju realizēsim nākamajos paragrāfos, definējot Lebega integrāli kā attiecīgā šķēluma vienīgo atdalītājskaitli. Ar šī paragrāfa materiālu detalizētāk var iepazīties, piemēram, pēc [7, 1. daļa], [9], [34, 2. daļa], [38].

3.2. Darbū-Lebega summas un to īpašības

Pieņemsim, ka E ir netukša galīga mēra lineāra kopa.

3.7. definīcija. Par **kopas** E **sadalījumu** sauc kopas E netukšu mērojamu apakškopu galīgu sistēmu $T = \{E_k\}_{k=1}^n$, ka $E_k \cap E_m = \emptyset$ $(k \neq m;\ k,m = 1,2,\ldots,n)$ un $E = \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$. Kopas E_k $(k = 1,2,\ldots,n)$ sauc par **sadalījuma** T **šūnām**.

Apskatīsim *ierobežotu* funkciju $f : E \to \mathbb{R}$ un patvaļīgu kopas E sadalījumu $T = \{E_k\}_{k=1}^n$. Tā kā funkcija f ir ierobežota kopā E, tad funkcija f ir ierobežota katrā šūnā E_k $(k = 1,2,\ldots,n)$. Tāpēc katram $k = 1,2,\ldots,n$ eksistē galīgi

$$\inf_{E_k} f = \inf f\left(E_k\right) \quad \text{un} \quad \sup_{E_k} f = \sup f\left(E_k\right).$$

3.8. definīcija. Par **funkcijas** f **apakšējo un augšējo Darbū-Lebega summu, kas atbilst kopas** E **sadalījumam** $T = \{E_k\}_{k=1}^n$, sauc attiecīgi skaitļus

$$\underline{S}_f(T) = \sum_{k=1}^{n} \inf_{E_k} f \cdot \mathrm{m}(E_k) \ \text{ un } \ \overline{S}_f(T) = \sum_{k=1}^{n} \sup_{E_k} f \cdot \mathrm{m}(E_k).$$

Ja nerodas pārpratumi, par kādas funkcijas Darbū-Lebega summām tiek runāts, tad $\underline{S}_f(T)$ un $\overline{S}_f(T)$ vietā raksta arī attiecīgi $\underline{S}(T)$ un $\overline{S}(T)$.

Apskatīsim Darbū-Lebega summu īpašības.

1° *Jebkuram kopas E sadalījumam $T = \{E_k\}_{k=1}^n$ ir patiesa nevienādība $\underline{S}(T) \leq \overline{S}(T)$.*

► Tā kā

$$\inf_{E_k} f \leq \sup_{E_k} f \quad (k = 1,2,\ldots,n),$$

jo $E_k \neq \emptyset$ $(k = 1,2,\ldots,n)$, tad

$$\inf_{E_k} f \cdot \mathrm{m}(E_k) \leq \sup_{E_k} f \cdot \mathrm{m}(E_k) \quad (k = 1,2,\ldots,n),$$

no kurienes seko

$$\underline{S}(T) = \sum_{k=1}^{n} \inf_{E_k} f \cdot \mathrm{m}(E_k) \leq \sum_{k=1}^{n} \sup_{E_k} f \cdot \mathrm{m}(E_k) = \overline{S}(T). \ ◄$$

3.9. definīcija. Pieņemsim, ka $T = \{E_k\}_{k=1}^n$ un $T^* = \left\{E_j^*\right\}_{j=1}^m$ ir kopas E sadalījumi. Sadalījumu T^* sauc par **sadalījuma T turpinājumu**, ja katram $j \in \{1; 2; \ldots; m\}$ eksistē tāds $k \in \{1; 2; \ldots; n\}$, ka $E_j^* \subset E_k$, t.i., katra sadalījuma T^* šūna iekļaujas kādā sadalījuma T šūnā.

Nav izslēgts, ka vairākas sadalījuma T^* šūnas iekļaujas vienā un tajā pašā sadalījuma T šūnā. Definēsim attēlojumu $\nu : \{1; 2; \ldots, m\} \longrightarrow \{1; 2; \ldots, n\}$ pēc likuma

$$\forall j \in \{1; 2; \ldots, m\} : \big(\nu(j) = k\big) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \big(E_j^* \subset E_k\big).$$

1. lemma. *Jebkuram $k \in \{1; 2; \ldots, n\}$ ir spēkā $E_k = \bigcup\limits_{\nu(j)=k} E_j^*$.*

▶ No attēlojuma ν definīcijas izriet, ka

$$\bigcup_{\nu(j)=k} E_j^* \subset E_k.$$

Pierādīsim, ka

$$E_k \subset \bigcup_{\nu(j)=k} E_j^*.$$

Apskatīsim patvaļīgu $x \in E_k$. Tā kā $E_k \subset E = \bigcup\limits_{j=1}^m E_j^*$, tad $x \in \bigcup\limits_{j=1}^m E_j^*$, t.i., eksistē $j \in \{1; 2; \ldots; m\}$, ka $x \in E_j^*$. Pierādīsim, ka $\nu(j) = k$, t.i., $E_j^* \subset E_k$. Pieņemsim pretējo, ka $E_j^* \not\subset E_k$. Tā kā sadalījums T^* ir sadalījuma T turpinājums, tad eksistē $k_1 \in \{1; 2; \ldots; n\}$, ka $E_j^* \subset E_{k_1}$. Iespējami divi gadījumi.

1. Ja $k_1 = k$, tad $E_j^* \subset E_k$. Ieguvām pretrunu.
2. Pieņemsim, ka $k_1 \neq k$. Tā kā $x \in E_j^* \subset E_{k_1}$, tad $x \in E_{k_1}$. Tā kā $x \in E_k$, tad $x \in E_{k_1} \cap E_k$, t.i., $E_{k_1} \cap E_k \neq \emptyset$. Ieguvām pretrunu.

Abos iespējamos gadījumos ieguvām pretrunu. Tātad pieņēmums nav patiess un $\nu(j) = k$. Tāpēc $x \in \bigcup\limits_{\nu(j)=k} E_j^*$.◀

2° *Ja kopas E sadalījums T^* ir šīs kopas sadalījuma T turpinājums, tad*

$$\underline{S}(T) \leq \underline{S}(T^*) \leq \overline{S}(T^*) \leq \overline{S}(T). \tag{3.1}$$

▶ Saskaņā ar 1. lemmu

$$E_k = \bigcup_{\nu(j)=k} E_j^* \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

No Lebega mēra sanumurējamās aditivitātes izriet, ka

$$\mathrm{m}(E_k) = \sum_{\nu(j)=k} \mathrm{m}(E_j^*) \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Ja $E_j^* \subset E_k$, kur $\nu(j) = k$, tad

$$f\left(E_j^*\right) = \left\{f(x) : x \in E_j^*\right\} \subset \{f(x) : x \in E_k\} = f\left(E_k\right),$$

no kurienes, ņemot vērā suprēma īpašību (skat. 6.1. paragrāfu), seko

$$\sup_{E_j^*} f = \sup f\left(E_j^*\right) \leq \sup f\left(E_k\right) = \sup_{E_k} f.$$

Atrodam:

$$\overline{S}(T^*) = \sum_{j=1}^{m} \sup_{E_j^*} f \cdot \mathrm{m}(E_j^*) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\nu(j)=k} \sup_{E_j^*} f \cdot \mathrm{m}(E_j^*) \right) \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\nu(j)=k} \sup_{E_k} f \cdot \mathrm{m}(E_j^*) \right) = \sum_{k=1}^{n} \sup_{E_k} f \left(\sum_{\nu(j)=k} \mathrm{m}(E_j^*) \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sup_{E_k} f \cdot \mathrm{m}(E_k) = \overline{S}(T).$$

Tātad $\overline{S}(T^*) \leq \overline{S}(T)$. Analoģiski pierāda, ka $\underline{S}(T) \leq \underline{S}(T^*)$. Savukārt no Darbū-Lebega summu 1° īpašības seko, ka $\underline{S}(T^*) \leq \overline{S}(T^*)$. Trīskāršā nevienādība (3.1) ir pierādīta.◀

3° *Jebkuriem kopas E sadalījumiem T_1 un T_2 ir patiesa nevienādība $\underline{S}(T_1) \leq \overline{S}(T_2)$.*

▶ Konstruēsim **sadalījumu T_1 un T_2 reizinājumu** T^*, t.i., tādu kopas E sadalījumu T^*, kura šūnas ir visi iespējamie sadalījumu T_1 un T_2 šūnu netukšie šķēlumi. Viegli pārliecināties, ka sadalījums T^* ir gan sadalījuma T_1, gan sadalījuma T_2 turpinājums. Ņemot vērā Darbū-Lebega summu 1° un 2° īpašību, iegūsim $\underline{S}(T_1) \leq \underline{S}(T^*) \leq \overline{S}(T^*) \leq \overline{S}(T_2)$.◀

3.3. Lebega integrāļa jēdziens

Pieņemsim, ka $f : E \to \mathbb{R}$ ir ierobežota funkcija galīga mēra kopā E. Turpmāk, ja nav teikts pretējais, uzskatīsim, ka E *ir netukša kopa*. No Darbū-Lebega summu 3° īpašības seko, ka

$$\mathcal{A} = \{\underline{S}(T)\} \leq \left\{\overline{S}(T)\right\} = \mathcal{B},$$

kur $\mathcal{A}$ ir visu funkcijas f apakšējo Darbū-Lebega summu kopa, bet $\mathcal{B}$ ir visu funkcijas f augšējo Darbū-Lebega summu kopa. Kopas $\mathcal{A}$ un $\mathcal{B}$ ir netukšas, jo, piemēram, ja $E_1 = E$, tad $T = \{E_1\}$ ir kopas E sadalījums, kas sastāv tikai no vienas šūnas, kura ir vienāda ar pašu kopu E, bet

$$\underline{S}(T) = \inf_E f \cdot \mathrm{m}(E) \quad \text{un} \quad \overline{S}(T) = \sup_E f \cdot \mathrm{m}(E)$$

ir attiecīgi funkcijas f apakšējā un augšējā Darbū-Lebega summa, kas atbilst šim kopas E sadalījumam, t.i., $\underline{S}(T) \in \mathcal{A}$ un $\overline{S}(T) \in \mathcal{B}$. Tātad $(\mathcal{A}; \mathcal{B})$ ir reālo skaitļu kopas $\mathbb{R}$ šķēlums. Tāpēc saskaņā ar atdalītājnogriežņa principu (skat. 6.1. paragrāfu) eksistē galīgi

$$\underline{\mathfrak{I}}(f) = \sup \mathcal{A} = \sup \{\underline{S}(T)\} \quad \text{un} \quad \overline{\mathfrak{I}}(f) = \inf \mathcal{B} = \inf \left\{\overline{S}(T)\right\},$$

pie tam

$$\underline{\mathfrak{I}}(f) \leq \overline{\mathfrak{I}}(f). \tag{3.2}$$

3.10. definīcija. Skaitļus $\underline{\mathfrak{I}}(f)$ un $\overline{\mathfrak{I}}(f)$ sauc par **funkcijas f attiecīgi apakšējo un augšējo Lebega integrāli kopā** E. Funkciju f sauc par **integrējamu Lebega nozīmē funkciju kopā** E, ja $\underline{\mathfrak{I}}(f) = \overline{\mathfrak{I}}(f)$, t.i., kopām $\mathcal{A}$ un $\mathcal{B}$ eksistē vienīgs atdalītājskaitlis $\mathfrak{I}(f) = \underline{\mathfrak{I}}(f) = \overline{\mathfrak{I}}(f)$, kuru apzīmē ar

$$\int\limits_E f(x)dx$$

un sauc par **funkcijas f Lebega integrāli kopā** E.

Apskatīsim dažus integrējamības Lebega nozīmē kritērijus.

1° *Galīga mēra kopā E ierobežota funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē funkcija kopā E tad un tikai tad, kad jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tādi kopas E sadalījumi T_1 un T_2, ka $\overline{S}(T_2) - \underline{S}(T_1) < \varepsilon$.*

► Apgalvojuma patiesums seko no atdalītājnogriežņa principa (skat. 6.1. paragrāfu).◄

2° *Galīga mēra kopā E ierobežota funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē funkcija kopā E tad un tikai tad, kad jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds kopas E sadalījums T, ka $\overline{S}(T) - \underline{S}(T) < \varepsilon$.*

► *Nepieciešamība.* Apskatīsim patvaļīgu $\varepsilon > 0$. No 1° kritērija izriet, ka eksistē tādi kopas E sadalījumi T_1 un T_2, ka $\overline{S}(T_2) - \underline{S}(T_1) < \varepsilon$. Ja sadalījums T ir sadalījumu T_1 un T_2 reizinājums, tad sadalījums T ir gan sadalījuma T_1, gan sadalījuma T_2 turpinājums. Ņemot vērā Darbū-Lebega summu 1° un 2° īpašību, iegūsim $\underline{S}(T_1) \leq \underline{S}(T) \leq \overline{S}(T) \leq \overline{S}(T_2)$, no kurienes seko $\overline{S}(T) - \underline{S}(T) \leq \overline{S}(T_2) - \underline{S}(T_1) < \varepsilon$. Tātad $\overline{S}(T) - \underline{S}(T) < \varepsilon$.

Pietiekamība ir acīm redzama, ja uzskatīt, ka $T_2 = T_1 = T$, un pielietot 1° kritēriju.◄

3° *Galīga mēra kopā E ierobežota funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē funkcija kopā E tad un tikai tad, kad jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds kopas E sadalījums $T = \{E_k\}_{k=1}^n$, ka $\sum\limits_{k=1}^n \omega_k(f) \cdot \mathrm{m}(E_k) < \varepsilon$, kur*

$$\omega_k(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{E_k} f - \inf_{E_k} f$$

*ir **funkcijas f svārstība kopā** E_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$.*

► Apgalvojuma patiesums seko no 2° kritērija, ja ņemt vērā, ka

$$\overline{S}(T) - \underline{S}(T) = \sum_{k=1}^n \sup_{E_k} f \cdot \mathrm{m}(E_k) - \sum_{k=1}^n \inf_{E_k} f \cdot \mathrm{m}(E_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^n \left(\sup_{E_k} f - \inf_{E_k} f \right) \cdot \mathrm{m}(E_k) = \sum_{k=1}^n \omega_k(f) \cdot \mathrm{m}(E_k). \blacktriangleleft$$

3.4. Integrējamas Rīmaņa nozīmē funkcijas integrējamība Lebega nozīmē

3.1. teorēma. *Ja funkcija f ir integrējama Rīmaņa nozīmē nogrieznī $[a;b]$, tad funkcija f ir integrējama arī Lebega nozīmē kopā $[a;b]$, pie tam*

$$\int\limits_{[a;b]} f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx. \tag{3.3}$$

► Nogrieznis $[a;b]$ ir galīga mēra kopa. Tā kā funkcija f ir integrējama Rīmaņa nozīmē nogrieznī $[a;b]$, tad funkcija f ir ierobežota šajā nogrieznī. Pierādīsim, ka $\underline{\mathfrak{I}}_R(f) \leq \underline{\mathfrak{I}}(f)$. Pieņemsim pretējo, ka $\beta' = \underline{\mathfrak{I}}(f) < \underline{\mathfrak{I}}_R(f) = \sup\{\underline{s}(T)\} = \beta$. No suprēma īpašībām (skat. 6.1. paragrāfu) seko, ka eksistē tāda funkcijas f apakšējā Darbū-Rīmaņa summa $\underline{s}(T_0)$, citiem vārdiem sakot, tāds nogriežņa $[a;b]$ sasmalcinājums $T_0 = \{x_k\}_{k=0}^n$, ka

$$\underline{s}(T_0) > \beta' = \underline{\mathfrak{I}}(f). \tag{3.4}$$

Atzīmēsim, ka jebkurai funkcijas f apakšējai Darbū-Lebega summai $\underline{S}(T)$ ir spēkā

$$\underline{S}(T) \leq \underline{\mathfrak{I}}(f). \tag{3.5}$$

No (3.4) un (3.5) seko, ka jebkurai funkcijas f apakšējai Darbū-Lebega summai $\underline{S}(T)$ izpildās

$$\underline{S}(T) < \underline{s}(T_0). \tag{3.6}$$

Funkcijas f apakšējā Darbū-Rīmaņa summa, kas atbilst nogriežņa $[a;b]$ sasmalcinājumam $T_0 = \{x_k\}_{k=0}^n$:

$$\underline{s}(T_0) = \sum_{k=1}^n \inf_{[x_{k-1};x_k]} f \cdot \Delta x_k,$$

kur $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Apskatīsim funkcijas f apakšējo Darbū-Lebega summu

$$\underline{S}(T) = \sum_{k=1}^n \inf_{E_k} f \cdot \mathrm{m}(E_k),$$

kas atbilst kopas $[a;b]$ sadalījumam $T = \{E_k\}_{k=1}^n$ ar šūnām:

$$E_1 = [x_0; x_1],\ E_2 = (x_1; x_2],\ \ldots\ ,\ E_n = (x_{k-1}; x_n].$$

Tad

$$\inf_{E_1} f = \inf_{[x_0;x_1]} f. \tag{3.7}$$

Tā kā

$$E_k = (x_{k-1}; x_k] \subset [x_{k-1}; x_k]\ \ (k = 2, \ldots, n),$$

tad

$$A = \{f(x) : x \in E_k\} \subset \{f(x) : x \in [x_{k-1}; x_k]\} = B\ \ (k = 2, \ldots, n),$$

no kurienes, ņemot vērā infīma īpašību (skat. 6.1. paragrāfu), seko

$$\inf_{E_k} f = \inf A \geq \inf B = \inf_{[x_{k-1};x_k]} f \quad (k = 2, \ldots, n). \tag{3.8}$$

Izmantojot (3.7) un (3.8), atrodam

$$\underline{S}(T) = \inf_{E_1} f + \sum_{k=2}^{n} \inf_{E_k} f \cdot \mathrm{m}(E_k) \geq \inf_{[x_0;x_1]} f + \sum_{k=2}^{n} \inf_{[x_{k-1};x_k]} f \cdot \Delta x_k = \underline{s}(T_0).$$

Ieguvām pretrunu ar (3.6). Tātad pieņēmums nav patiess un $\underline{\mathfrak{I}}_R(f) \leq \underline{\mathfrak{I}}(f)$. Līdzīgi pierāda, ka $\overline{\mathfrak{I}}_R(f) \geq \overline{\mathfrak{I}}(f)$. Atzīmēsim, ka $\underline{\mathfrak{I}}(f) \leq \overline{\mathfrak{I}}(f)$. Tātad

$$\underline{\mathfrak{I}}_R(f) \leq \underline{\mathfrak{I}}(f) \leq \overline{\mathfrak{I}}(f) \leq \overline{\mathfrak{I}}_R(f).$$

Ja funkcija f ir integrējama Rīmaņa nozīmē nogriezni $[a;b]$, t.i., $\mathfrak{I}_R(f) = \underline{\mathfrak{I}}_R(f) = \overline{\mathfrak{I}}_R(f)$, tad no pēdējām nevienādībām izriet, ka $\underline{\mathfrak{I}}(f) = \overline{\mathfrak{I}}(f) = \mathfrak{I}(f)$, t.i., funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā $[a;b]$, pie tam

$$\mathfrak{I}(f) = \int\limits_{[a;b]} f(x)dx = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \mathfrak{I}_R(f).$$

Teorēma ir pierādīta.◀

3.1. piezīme. Teorēmas apgrieztais apgalvojums nav spēkā, jo ne katra integrējama Lebega nozīmē funkcija kopā $[a;b]$ ir integrējama Rīmaņa nozīmē funkcija nogriezni $[a;b]$ (skat. 3.1. piemēru nākamajā paragrāfā). Tātad *integrējamu Lebega nozīmē funkciju klase ir būtiski plašāka par integrējamu Rīmaņa nozīmē funkciju klasi.*

3.5. Mērojamas funkcijas integrējamība Lebega nozīmē

3.2. teorēma. *Jebkura galīga mēra kopā E ierobežota mērojama funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē funkcija kopā E.*

▶ Tā kā E ir galīga mēra kopa, t.i., $0 \leq \mathrm{m}(E) < +\infty$, tad ir iespējami divi gadījumi: $\mathrm{m}(E) = 0$ vai $\mathrm{m}(E)$ ir pozitīvs skaitlis.

1. Pieņemsim, ka $\mathrm{m}(E) = 0$. Apskatīsim patvaļīgu kopas E sadalījumu $T = \{E_k\}_{k=1}^{n}$. Tā kā E ir nulles mēra kopa, tad jebkura tās apakškopa arī ir nulles mēra kopa. Tāpēc $\mathrm{m}(E_k) = 0$ jebkuram $k = 1, 2, \ldots, n$. Sasmalcinājumam T atbilstošā apakšējā un augšējā Darbū-Lebega summa:

$$\underline{S}(T) = \sum_{k=1}^{n} \inf_{E_k} f \cdot \mathrm{m}(E_k) = \sum_{k=1}^{n} \inf_{E_k} f \cdot 0 = 0,$$

$$\overline{S}(T) = \sum_{k=1}^{n} \sup_{E_k} f \cdot \mathrm{m}(E_k) = \sum_{k=1}^{n} \sup_{E_k} f \cdot 0 = 0.$$

Funkcijas f apakšējais un augšējais Lebega integrālis kopā E:

$$\underline{\mathfrak{I}}(f) = \sup\{\underline{S}(T)\} = \sup\{0\} = 0, \quad \overline{\mathfrak{I}}(f) = \inf\{\overline{S}(T)\} = \inf\{0\} = 0.$$

Tā kā $\underline{\mathfrak{I}}(f) = \overline{\mathfrak{I}}(f)$, tad funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā E, pie tam tās Lebega integrālis

$$\mathfrak{I}(f) = \underline{\mathfrak{I}}(f) = \overline{\mathfrak{I}}(f) = \int\limits_{E} f(x)dx = 0.$$

2. Apskatīsim gadījumu, kad $\mathrm{m}(E)$ ir pozitīvs skaitlis. Tā kā kopa E ir netukša, bet funkcija f ir ierobežota šajā kopā, tad funkcijai f eksistē galīgs infīms un suprēms kopā E. Pieņemsim, ka

$$\alpha = \inf_E f \quad \text{un} \quad \beta = \sup_E f.$$

Ja $\alpha = \beta$, tad funkcija f ir konstanta kopā E, pie tam $f(x) = c$ jebkuram $x \in E$, kur $c = \alpha = \beta$. Patvaļīgam kopas E sadalījumam $T = \{E_k\}_{k=1}^n$ atbilstošā apakšējā un augšējā Darbū-Lebega summa:

$$\underline{S}(T) = \sum_{k=1}^n \inf_{E_k} f \cdot \mathrm{m}(E_k) = \sum_{k=1}^n c \cdot \mathrm{m}(E_k) = c \sum_{k=1}^n \mathrm{m}(E_k) = c \cdot \mathrm{m}(E),$$

$$\overline{S}(T) = \sum_{k=1}^n \sup_{E_k} f \cdot \mathrm{m}(E_k) = \sum_{k=1}^n c \cdot \mathrm{m}(E_k) = c \sum_{k=1}^n \mathrm{m}(E_k) = c \cdot \mathrm{m}(E).$$

Funkcijas f apakšējais un augšējais Lebega integrālis kopā E:

$$\underline{\mathfrak{I}}(f) = \sup\{\underline{S}(T)\} = \sup\{c \cdot \mathrm{m}(E)\} = c \cdot \mathrm{m}(E),$$

$$\overline{\mathfrak{I}}(f) = \inf\{\overline{S}(T)\} = \inf\{c \cdot \mathrm{m}(E)\} = c \cdot \mathrm{m}(E).$$

Tā kā $\underline{\mathfrak{I}}(f) = \overline{\mathfrak{I}}(f)$, tad funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā E, pie tam tās Lebega integrālis

$$\mathfrak{I}(f) = \underline{\mathfrak{I}}(f) = \overline{\mathfrak{I}}(f) = \int_E f(x)dx = c \cdot \mathrm{m}(E).$$

Pieņemsim, ka $\alpha \neq \beta$. Tad $\alpha < \beta$. Apskatīsim patvaļīgu $\varepsilon > 0$ un tādu nogriežņa $[\alpha; \beta]$ sasmalcinājumu $\widetilde{T} = \{y_k\}_{k=0}^n$, ka $\alpha = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = \beta$ un šī sasmalcinājuma solis

$$\lambda = \max_{1 \le k \le n} (y_k - y_{k-1}) < \frac{\varepsilon}{\mathrm{m}(E)}.$$

Apskatīsim kopas E apakškopu sistēmu $T = \{E_k\}_{k=1}^n$, kur

$$E_1 = E[y_0 \le f \le y_1],\ E_2 = E[y_1 < f \le y_2],\ \ldots\ ,\ E_n = E[y_{k-1} < f \le y_n];$$

skat. 3.1. zīmējumu. Viegli redzēt, ka T ir kopas E sadalījums. Tiešām,

1. tā kā funkcija f ir mērojama kopā E, tad kopas E_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ ir mērojamas saskaņā ar sekām no 2.1. teorēmas;

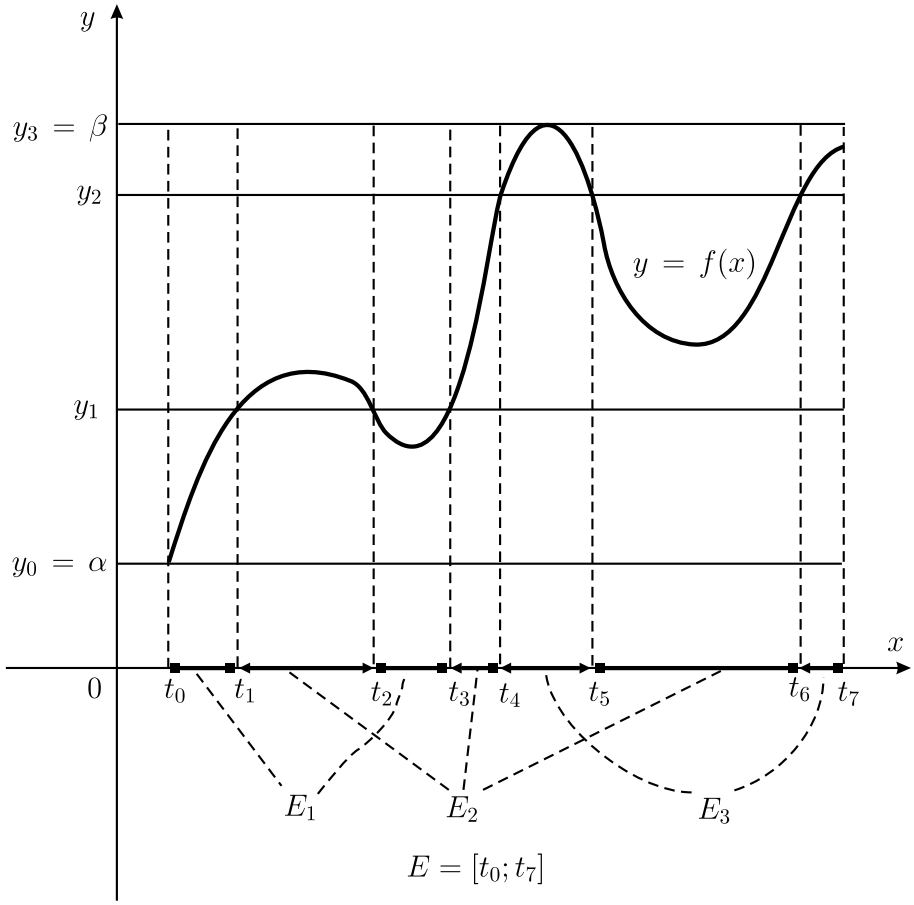
2. saskaņā ar kopu E_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ konstrukciju tās ir netukšas, savstarpēji nešķeļas un to apvienojums ir vienāds ar kopu E.

Apskatīsim kopas E sadalījumam T atbilstošo apakšējo un augšējo Darbū-Lebega summu:

$$\underline{S}(T) = \sum_{k=1}^n \inf_{E_k} f \cdot \mathrm{m}(E_k), \quad \overline{S}(T) = \sum_{k=1}^n \sup_{E_k} f \cdot \mathrm{m}(E_k).$$

Acīmredzot,

$$y_{k-1} \le \inf_{E_k} f \le \sup_{E_k} f \le y_k \ (k = 1, 2, \ldots, n).$$



3.1. zīmējums. Ilustrācija 3.2. teorēmas pierādījuma 2. punktam: kopā $E = [t_0; t_7]$ definētā funkcija f, tai atbilstošā nogriežņa $[\alpha; \beta]$, kur $\alpha = \inf\limits_E f$ un $\beta = \sup\limits_E f$, sasmalcinājums $\widetilde{T} = \{y_0; y_1; y_2; y_3\}$, ka

$$\alpha = y_0 < y_1 < y_2 < y_3 = \beta,$$

un šim sasmalcinājumam atbilstošais kopas E sadalījums $T = \{E_1; E_2; E_3\}$, kur

$$\begin{aligned}
E_1 &= E[y_0 \le f \le y_1] = [t_0; t_1] \cup [t_2; t_3];\\
E_2 &= E[y_1 < f \le y_2] = (t_1; t_2) \cup (t_3; t_4] \cup [t_5; t_6];\\
E_3 &= E[y_2 < f \le y_3] = (t_4; t_5) \cup (t_6; t_7].
\end{aligned}$$

Pareizinot šīs nevienādības ar $\mathrm{m}(E_k)$, iegūsim

$$y_{k-1} \cdot \mathrm{m}(E_k) \le \inf_{E_k} f \cdot \mathrm{m}(E_k) \le \sup_{E_k} f \cdot \mathrm{m}(E_k) \le y_k \cdot \mathrm{m}(E_k) \ (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Summējot pēdējās nevienādības no 1 līdz n, atrodam

$$\sum_{k=1}^{n} y_{k-1} \cdot \mathrm{m}(E_k) \le \sum_{k=1}^{n} \inf_{E_k} f \cdot \mathrm{m}(E_k) \le \sum_{k=1}^{n} \sup_{E_k} f \cdot \mathrm{m}(E_k) \le \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot \mathrm{m}(E_k)$$

jeb

$$\sum_{k=1}^{n} y_{k-1} \cdot \mathrm{m}(E_k) \le \underline{S}(T) \le \overline{S}(T) \le \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot \mathrm{m}(E_k),$$

no kurienes seko

$$\overline{S}(T) - \underline{S}(T) \le \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1}) \cdot \mathrm{m}(E_k) \le \lambda \sum_{k=1}^{n} \mathrm{m}(E_k) = \lambda \cdot \mathrm{m}(E) < \varepsilon.$$

No integrējamības Lebega nozīmē 2° kritērija izriet, ka funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā E.◀

3.2. piezīme. Var pierādīt (tas nav vienkārši, skat., piemēram, [29], [16] un 3.10. paragrāfu), ka ir spēkā teorēmas apgrieztais apgalvojums: *ja galīga mēra kopā E ierobežota funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā E, tad funkcija f ir mērojama kopā E.* Tātad funkcijas mērojamība ir integrējamības Lebega nozīmē nepieciešamais un pietiekamais nosacījums, citiem vārdiem sakot, ir spēkā šāda teorēma.

3.3. teorēma. *Galīga mēra kopā E ierobežota funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā E tad un tikai tad, kad funkcija f ir mērojama kopā E.*

3.3. piezīme. 3.3. teorēma paskaidro, kāpēc bieži vien Lebega integrāli definē uzreiz mērojamām funkcijām (skat., piemēram, [14], [23], [36]). Atzīmēsim, ka, balstoties uz dažādām ekvivalentām pieejām funkciju mērojamības (Lebega nozīmē) definēšanai (skat. 2.20. teorēmu un 2.22. piezīmi), var sniegt citas ekvivalentas pieejas galīga mēra kopā ierobežotu funkciju integrējamības Lebega nozīmē definēšanai (viena no šādām iespējamām pieejām ir minēta 3.10. paragrāfā).

3.4. piezīme. Teorēmas pierādījuma gaitā tika pierādīts šāds apgalvojums: *ja funkcija f ir ierobežota nulles mēra kopā E, tad funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā E un*

$$\int_E f(x)dx = 0.$$

3.5. piezīme. No teorēmas pierādījuma izriet šāds apgalvojums: *ja f ir c-konstanta funkcija galīga mēra kopā E, tad funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā E, pie tam*

$$\int_E f(x)dx = c \cdot \mathrm{m}(E) \ \text{ jeb } \int_E c\, dx = c \cdot \mathrm{m}(E).$$

3.6. piezīme. Tā kā nullfunkcija $\mathbb{O}$ ir 0-konstanta funkcija jebkurā kopā E, jo $\mathbb{O}(x) = 0$ jebkuram $x \in E$, tad no 3.5. piezīmes izriet šāds apgalvojums: *nullfunkcija $\mathbb{O}$ ir integrējama Lebega nozīmē jebkurā galīga mēra kopā E, pie tam*

$$\int\limits_E \mathbb{O}(x)dx = 0 \cdot \mathrm{m}(E) = 0.$$

3.1. piemērs.

• Iepriekšējās nodaļas 2.2. piemērā tika pierādīts, ka Dirihlē funkcija χ,

$$\forall x \in \mathbb{R}: \ \chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{ja} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{ja} \quad x \in \mathbb{I}, \end{cases}$$

ir mērojama jebkurā mērojamā kopā $E \subset \mathbb{R}$. Acīmredzot, Dirihlē funkcija ir ierobežota jebkurā kopā $E \subset \mathbb{R}$. No 3.2. teorēmas seko, ka *Dirihlē funkcija ir integrējama Lebega nozīmē jebkurā galīga mēra kopā E.*

• Pierādīsim, ka, ja $0 \leq \mathrm{m}(E) < +\infty$, tad

$$\int\limits_E \chi(x)dx = 0. \tag{3.9}$$

Ja $\mathrm{m}(E) = 0$, tad vienādība (3.9) ir spēkā saskaņā ar 3.4. piezīmi. Pieņemsim, ka $0 < \mathrm{m}(E) < +\infty$. Atzīmēsim, ka $\mathbb{I} \cap E \neq \emptyset$, t.i., kopa E satur vismaz vienu iracionālu punktu. Tiešām, ja pieņemt pretējo, ka visi kopas E punkti ir racionāli, t.i., $E \subset \mathbb{Q}$, tad no 1.4. teorēmas 2. apgalvojuma izrietēs, ka $\mathrm{m}(E) = 0$, kas ir pretrunā ar doto. Tātad $\mathbb{I} \cap E \neq \emptyset$.

a) Pieņemsim, ka $E \subset \mathbb{I}$, t.i., visi kopas E punkti ir iracionāli. Tad $\chi(x) = 0$ jebkuram $x \in E$, t.i., funkcija χ ir vienāda ar nullfunkciju $\mathbb{O}$ kopā E. No 3.6. piezīmes izriet, ka ir spēkā vienādība (3.9).

b) Pieņemsim, ka $\mathbb{Q} \cap E \neq \emptyset$, t.i., kopa E satur vismaz vienu racionālu punktu. Apskatīsim kopas E apakškopas $E_1 = \mathbb{Q} \cap E$ un $E_2 = \mathbb{I} \cap E$. Kopas E_1 un E_2 ir mērojamas kā mērojamu kopu šķēlumi, šo kopu apvienojums ir vienāds ar kopu E:

$$E_1 \cup E_2 = (\mathbb{Q} \cap E) \cup (\mathbb{I} \cap E) = (\mathbb{Q} \cup \mathbb{I}) \cap E = \mathbb{R} \cap E = E,$$

pie tam no iepriekš teiktā seko, ka kopas E_1 un E_2 ir netukšas. Tātad $T_0 = \{E_1; E_2\}$ ir kopas E sadalījums. Kopas E sadalījumam $T_0 = \{E_1; E_2\}$ atbilstošā funkcijas χ apakšējā un augšējā Darbū-Lebega summa:

$$\underline{S}_\chi(T_0) = \inf_{E_1} \chi \cdot \mathrm{m}(E_1) + \inf_{E_2} \chi \cdot \mathrm{m}(E_2) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot \mathrm{m}(E_2) = 0,$$
$$\overline{S}_\chi(T_0) = \sup_{E_1} \chi \cdot \mathrm{m}(E_1) + \sup_{E_2} \chi \cdot \mathrm{m}(E_2) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot \mathrm{m}(E_2) = 0.$$

Tā kā funkcijas χ Lebega integrālis kopā E ir šķēluma $(\mathcal{A}; \mathcal{B})$ (skat. 3.3. paragrāfu) atdalītājskaitlis, tad

$$0 = \underline{S}_\chi(T_0) \leq \int\limits_E \chi(x)dx \leq \overline{S}_\chi(T_0) = 0,$$

no kurienes izriet (3.9).

• *Dirihlē funkcija nav integrējama Rīmaņa nozīmē nevienā nogriezni* $[a;b]$ $(a<b)$. Apskatīsim patvaļīgu nogriezni $[a;b]$ un jebkuru tā sasmalcinājumu $T=\{x_k\}_{k=0}^n$. Nogriežņa $[a;b]$ sasmalcinājumam T atbilstošā funkcijas χ apakšējā un augšējā Darbū-Rīmaņa summa:

$$\underline{s}_\chi(T)=\sum_{k=1}^n \inf_{[x_{k-1};x_k]}\chi\cdot\Delta x_k=\sum_{k=1}^n 0\cdot\Delta x_k=0,$$

$$\overline{s}_\chi(T)=\sum_{k=1}^n \sup_{[x_{k-1};x_k]}\chi\cdot\Delta x_k=\sum_{k=1}^n 1\cdot\Delta x_k=b-a\neq 0,$$

kur $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$ $(k=1,2,\dots,n)$. Dirihlē funkcijas χ apakšējais un augšējais Rīmaņa integrālis nogriezni $[a;b]$:

$$\underline{\mathfrak{I}}_R(\chi)=\sup\{\underline{s}(T)\}=\sup\{0\}=0,$$

$$\overline{\mathfrak{I}}_R(\chi)=\inf\{\overline{s}(T)\}=\inf\{b-a\}=b-a\neq 0.$$

Tā kā $\underline{\mathfrak{I}}_R(\chi)\neq\overline{\mathfrak{I}}_R(\chi)$, tad Dirihlē funkcija χ nav integrējama Rīmaņa nozīmē nogriezni $[a;b]$.

3.6. Lebega integrāļa īpašības

Pierādot šajā paragrāfā apskatāmās Lebega integrāļa īpašības, netiek izmantota integrējamas Lebega nozīmē funkcijas mērojamība attiecīgajā kopā (skat. 3.3. teorēmu). Izņēmums ir 3.8. piezīmē apskatītais piemērs un 14′° īpašības pierādījums. Lebega integrāļa 12°, 17° un 18° īpašību formulējumos funkcijas mērojamības nosacījumu var nomainīt ar funkcijas integrējamības Lebega nozīmē attiecīgajā kopā nosacījumu un iegūtos apgalvojumus pierādīt, neizmantojot 3.3. teorēmu.

Uzskatīsim, ka E ir galīga mēra netukša kopa, bet apskatāmās funkcijas ir ierobežotas kopā E.

3.6.1. Lebega integrāļa linearitāte

1° *Ja funkcijas f un g ir integrējamas Lebega nozīmē kopā E, tad šo funkciju summa $f+g$ arī ir integrējama Lebega nozīmē funkcija kopā E, pie tam*

$$\int_E \big(f(x)+g(x)\big)dx=\int_E f(x)dx+\int_E g(x)dx. \tag{3.10}$$

▶ Apskatīsim patvaļīgu kopas E sadalījumu $T=\{E_k\}_{k=1}^n$. No sadalījuma definīcijas seko, ka E_k $(k=1,2,\dots,n)$ ir netukšas mērojamas kopas. Funkcijas f un g, būdamas integrējamas Lebega nozīmē kopā E, ir ierobežotas kopā E, tāpēc šo funkciju summa $f+g$ arī ir ierobežota kopā E, līdz ar to funkcijas f, g un $f+g$ ir ierobežotas kopā $E_k\subset E$ jebkuram $k=1,2,\dots,n$. No infīma un suprēma īpašībām (skat. 6.1. paragrāfu) izriet, ka funkciju f, g un $f+g$ infīmi un suprēmi kopā $E_k\subset E$ $(k=1,2,\dots,n)$ ir galīgi, pie tam

$$\inf_{E_k}(f+g)\geq\inf_{E_k}f+\inf_{E_k}g\quad(k=1,2,\dots,n),$$

$$\sup_{E_k}(f+g)\leq\sup_{E_k}f+\inf_{E_k}g\quad(k=1,2,\dots,n).$$

Pareizinot pēdējās nevienādības ar $\mathrm{m}(E_k)$ un summējot iegūtās nevienādības no 1 līdz n, iegūsim:

$$\sum_{k=1}^{n} \inf_{E_k}(f+g)\cdot \mathrm{m}(E_k) \geq \sum_{k=1}^{n} \inf_{E_k} f \cdot \mathrm{m}(E_k) + \sum_{k=1}^{n} \inf_{E_k} g \cdot \mathrm{m}(E_k),$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sup_{E_k}(f+g)\cdot \mathrm{m}(E_k) \leq \sum_{k=1}^{n} \sup_{E_k} f \cdot \mathrm{m}(E_k) + \sum_{k=1}^{n} \sup_{E_k} g \cdot \mathrm{m}(E_k)$$

jeb

$$\underline{S}_{f+g}(T) \geq \underline{S}_f(T) + \underline{S}_g(T),$$

$$\overline{S}_{f+g}(T) \leq \overline{S}_f(T) + \overline{S}_g(T),$$

no kurienes, ņemot vērā Darbū-Lebega summu 1° īpašību, seko

$$\underline{S}_f(T) + \underline{S}_g(T) \leq \underline{S}_{f+g}(T) \leq \overline{S}_{f+g}(T) \leq \overline{S}_f(T) + \overline{S}_g(T). \tag{3.11}$$

Apskatīsim patvaļīgu $\varepsilon > 0$. Tā kā

$$\underline{\mathfrak{I}}(f) = \sup\left\{\underline{S}_f(T)\right\}, \quad \underline{\mathfrak{I}}(g) = \sup\left\{\underline{S}_g(T)\right\},$$

tad eksistē kopas E sadalījumi T_1 un T_2, ka

$$\underline{S}_f(T_1) > \underline{\mathfrak{I}}(f) - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \underline{S}_g(T_2) > \underline{\mathfrak{I}}(g) - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.12}$$

Ja sadalījums T ir sadalījumu T_1 un T_2 reizinājums, tad sadalījums T ir gan sadalījuma T_1, gan sadalījuma T_2 turpinājums. Saskaņā ar Darbū-Lebega summu 2° īpašību

$$\underline{S}_f(T) \geq \underline{S}_f(T_1), \quad \underline{S}_g(T) \geq \underline{S}_g(T_2). \tag{3.13}$$

No (3.12) un (3.13) atrodam

$$\underline{S}_f(T) > \underline{\mathfrak{I}}(f) - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \underline{S}_g(T) > \underline{\mathfrak{I}}(g) - \frac{\varepsilon}{2},$$

no kurienes, ņemot vērā (3.11), seko

$$\underline{\mathfrak{I}}(f) + \underline{\mathfrak{I}}(g) - \varepsilon < \underline{S}_f(T) + \underline{S}_g(T) \leq \underline{S}_{f+g}(T). \tag{3.14}$$

Atzīmēsim, ka

$$\underline{S}_{f+g}(T) \leq \underline{\mathfrak{I}}(f+g), \tag{3.15}$$

jo, tā kā

$$\underline{\mathfrak{I}}(f+g) = \sup\left\{\underline{S}_{f+g}(T)\right\},$$

tad $\underline{\mathfrak{I}}(f+g)$ ir kopas $\left\{\underline{S}_{f+g}(T)\right\}$ mažorante. No (3.14) un (3.15) izriet

$$\underline{\mathfrak{I}}(f) + \underline{\mathfrak{I}}(g) - \varepsilon < \underline{\mathfrak{I}}(f+g).$$

Pārejot pēdējā nevienādībā pie robežas, kad ε tiecas uz 0 no labās puses, iegūsim

$$\underline{\mathfrak{I}}(f) + \underline{\mathfrak{I}}(g) \leq \underline{\mathfrak{I}}(f+g). \tag{3.16}$$

Analoģiski pierāda, ka

$$\overline{\mathfrak{I}}(f+g) \leq \overline{\mathfrak{I}}(f) + \overline{\mathfrak{I}}(g). \tag{3.17}$$

No (3.16) un (3.17), ņemot vērā (3.2), seko

$$\underline{\mathfrak{I}}(f)+\underline{\mathfrak{I}}(g)\le\underline{\mathfrak{I}}(f+g)\le\overline{\mathfrak{I}}(f+g)\le\overline{\mathfrak{I}}(f)+\overline{\mathfrak{I}}(g). \tag{3.18}$$

Tā kā funkcijas f un g ir integrējamas Lebega nozīmē kopā E, tad

$$\mathfrak{I}(f)=\underline{\mathfrak{I}}(f)=\overline{\mathfrak{I}}(f),\quad \mathfrak{I}(g)=\underline{\mathfrak{I}}(g)=\overline{\mathfrak{I}}(g). \tag{3.19}$$

No (3.18) un (3.19) iegūsim

$$\underline{\mathfrak{I}}(f+g)=\overline{\mathfrak{I}}(f+g)=\mathfrak{I}(f)+\mathfrak{I}(g).$$

Tātad funkcija $f+g$ ir integrējama Lebega nozīmē kopā E, pie tam

$$\mathfrak{I}(f+g)=\mathfrak{I}(f)+\mathfrak{I}(g),$$

t.i., izpildās (3.10).◀

2° *Ja funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā E, tad šīs funkcijas reizinājums λf ar patvaļīgu reālu skaitli λ arī ir integrējama Lebega nozīmē funkcija kopā E, pie tam*

$$\int\limits_E \lambda f(x)dx=\lambda\int\limits_E f(x)dx. \tag{3.20}$$

▶ Apskatīsim patvaļīgu kopas E sadalījumu $T=\{E_k\}_{k=1}^n$. No sadalījuma definīcijas seko, ka E_k $(k=1,2,\dots,n)$ ir netukšas mērojamas kopas. Funkcija f, būdama integrējama Lebega nozīmē kopā E, ir ierobežota kopā E, tāpēc jebkuram $\lambda\in\mathbb{R}$ funkcijas f reizinājums ar skaitli λ, t.i., funkcija λf, arī ir ierobežota kopā E, līdz ar to funkcijas f un λf ir ierobežotas kopā $E_k\subset E$ jebkuram $k=1,2,\dots,n$. No infīma un suprēma īpašībām (skat. 6.1. paragrāfu) izriet, ka funkciju f un λf infīmi un suprēmi kopā $E_k\subset E$ $(k=1,2,\dots,n)$ ir galīgi, pie tam

$$\inf_{E_k}(\lambda f)=\begin{cases}\lambda\inf\limits_{E_k} f, & \text{ja}\quad \lambda\ge 0,\\ \lambda\sup\limits_{E_k} f, & \text{ja}\quad \lambda<0,\end{cases}\qquad \sup_{E_k}(\lambda f)=\begin{cases}\lambda\sup\limits_{E_k} f, & \text{ja}\quad \lambda\ge 0,\\ \lambda\inf\limits_{E_k} f, & \text{ja}\quad \lambda<0.\end{cases}$$

Pareizinot pēdējās vienādības ar $\mathrm{m}(E_k)$ un summējot iegūtās vienādības no 1 līdz n, atrodam:

$$\sum_{k=1}^n\inf_{E_k}(\lambda f)\cdot\mathrm{m}(E_k)=\begin{cases}\lambda\sum\limits_{k=1}^n\inf\limits_{E_k} f\cdot\mathrm{m}(E_k), & \text{ja}\quad \lambda\ge 0,\\ \lambda\sum\limits_{k=1}^n\sup\limits_{E_k} f\cdot\mathrm{m}(E_k), & \text{ja}\quad \lambda<0,\end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^n\sup_{E_k}(\lambda f)\cdot\mathrm{m}(E_k)=\begin{cases}\lambda\sum\limits_{k=1}^n\sup\limits_{E_k} f\cdot\mathrm{m}(E_k), & \text{ja}\quad \lambda\ge 0,\\ \lambda\sum\limits_{k=1}^n\inf\limits_{E_k} f\cdot\mathrm{m}(E_k), & \text{ja}\quad \lambda<0,\end{cases}$$

jeb

$$\underline{S}_{\lambda f}(T)=\begin{cases}\lambda\underline{S}_f(T), & \text{ja}\quad \lambda\ge 0,\\ \lambda\overline{S}_f(T), & \text{ja}\quad \lambda<0,\end{cases}\qquad \overline{S}_{\lambda f}(T)=\begin{cases}\lambda\overline{S}_f(T), & \text{ja}\quad \lambda\ge 0,\\ \lambda\underline{S}_f(T), & \text{ja}\quad \lambda<0,\end{cases}$$

no kurienes, ņemot vērā infīma un suprēma īpašības (skat. 6.1. paragrāfu), iegūsim

$$\underline{\mathfrak{I}}(\lambda f) = \sup\left\{\underline{S}_{\lambda f}\right\} = \left\{\begin{array}{ll} \sup\left\{\lambda \underline{S}_f(T)\right\}, & \text{ja} \quad \lambda \geq 0 \\ \sup\left\{\lambda \overline{S}_f(T)\right\}, & \text{ja} \quad \lambda < 0 \end{array}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{array}{ll} \lambda \sup\left\{\underline{S}_f(T)\right\}, & \text{ja} \quad \lambda \geq 0 \\ \lambda \inf\left\{\overline{S}_f(T)\right\}, & \text{ja} \quad \lambda < 0 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ll} \lambda \underline{\mathfrak{I}}(f), & \text{ja} \quad \lambda \geq 0, \\ \lambda \overline{\mathfrak{I}}(f), & \text{ja} \quad \lambda < 0. \end{array}\right.$$

Tātad

$$\underline{\mathfrak{I}}(\lambda f) = \left\{\begin{array}{ll} \lambda \underline{\mathfrak{I}}(f), & \text{ja} \quad \lambda \geq 0, \\ \lambda \overline{\mathfrak{I}}(f), & \text{ja} \quad \lambda < 0. \end{array}\right. \tag{3.21}$$

Analoģiski pierāda, ka

$$\overline{\mathfrak{I}}(\lambda f) = \left\{\begin{array}{ll} \lambda \overline{\mathfrak{I}}(f), & \text{ja} \quad \lambda \geq 0, \\ \lambda \underline{\mathfrak{I}}(f), & \text{ja} \quad \lambda < 0. \end{array}\right. \tag{3.22}$$

Tā kā funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā E, tad

$$\mathfrak{I}(f) = \underline{\mathfrak{I}}(f) = \overline{\mathfrak{I}}(f). \tag{3.23}$$

No (3.21) un (3.22), ņemot vērā (3.23), iegūsim, ka jebkuram $\lambda \in \mathbb{R}$ ir spēkā

$$\underline{\mathfrak{I}}(\lambda f) = \overline{\mathfrak{I}}(\lambda f) = \lambda \mathfrak{I}(f).$$

Tātad jebkuram $\lambda \in \mathbb{R}$ funkcija λf ir integrējama Lebega nozīmē kopā E, pie tam jebkuram $\lambda \in \mathbb{R}$ ir spēkā

$$\mathfrak{I}(\lambda f) = \lambda \mathfrak{I}(f),$$

t.i., izpildās (3.20).◀

3.7. piezīme. Formulēsim pēdējās īpašības svarīgu speciālgadījumu.

Ja funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā E, tad šīs funkcijas pretējā funkcija $-f$ arī ir integrējama Lebega nozīmē kopā E, pie tam

$$\int\limits_E \big(-f(x)\big)dx = -\int\limits_E f(x)dx. \tag{3.24}$$

▶ Vienādības (3.24) patiesums izriet no vienādības (3.20), ja ņemt vērā, ka $(-1)f = -f$, t.i., funkcijas f reizinājums ar skaitli $\lambda = -1$ ir vienāds ar funkcijas f pretējo funkciju $-f$.◀

3° *Ja funkcijas f un g ir integrējamas Lebega nozīmē kopā E, tad jebkura šo funkciju lineārā kombinācija $\lambda f + \mu g$, kur $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, arī ir integrējama Lebega nozīmē funkcija kopā E, pie tam*

$$\int\limits_E \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)dx = \lambda \int\limits_E f(x)dx + \mu \int\limits_E g(x)dx.$$

▶ Īpašības patiesums izriet no 1° un 2° īpašības.◀

4° **Lebega integrāļa linearitāte.** *Ja funkcijas $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ir integrējamas Lebega nozīmē kopā E, tad jebkura šo funkciju lineārā kombinācija $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n$, kur $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, arī ir integrējama Lebega nozīmē funkcija kopā E, pie tam*

$$\int\limits_E \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j(x) \right) dx = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \int\limits_E f_j(x) dx.$$

► Īpašības patiesumu pierāda ar matemātiskās indukcijas metodi, izmantojot 3° īpašību.◄

3.6.2. Nevienādību integrēšana

5° *Ja funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā E un katram $x \in E$ ir spēkā nevienādība $f(x) \geq 0$, tad*

$$\int\limits_E f(x) dx \geq 0. \tag{3.25}$$

► Apskatīsim patvaļīgu kopas E sadalījumu $T = \{E_k\}_{k=1}^{n}$. Tā kā $f(x) \geq 0$ visiem $x \in E$, tad $f(x) \geq 0$ visiem $x \in E_k \subset E$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, t.i., skaitlis 0 ir kopas

$$f(E_k) = \big\{ f(x) : x \in E_k \big\} \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

minorante. Tā kā šīs kopas infīms

$$\inf_{E_k} f = \inf f(E_k) \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

ir šīs kopas vislielākā minorante, tad

$$\inf_{E_k} f \geq 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Ņemot vērā, ka $\mathrm{m}(E_k) \geq 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, iegūsim

$$\underline{S}(T) = \sum_{k=1}^{n} \inf_{E_k} f \cdot \mathrm{m}(E_k) \geq 0. \tag{3.26}$$

Tā kā $\underline{\mathfrak{I}}(f) = \sup\big\{\underline{S}(T)\big\}$, tad $\underline{\mathfrak{I}}(f)$ ir kopas $\big\{\underline{S}(T)\big\}$ mažorante, t.i.,

$$\underline{\mathfrak{I}}(f) \geq \underline{S}(T) \tag{3.27}$$

jebkurai apakšējai Darbū-Lebega summai $\underline{S}(T)$. No (3.26) un (3.27) izriet $\underline{\mathfrak{I}}(f) \geq 0$. Tā kā funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā E, tad $\underline{\mathfrak{I}}(f) = \overline{\mathfrak{I}}(f) = \mathfrak{I}(f)$. Tāpēc $\mathfrak{I}(f) \geq 0$, t.i., izpildās (3.25).◄

6° *Ja funkcijas f un g ir integrējamas Lebega nozīmē kopā E un katram $x \in E$ ir spēkā nevienādība $f(x) \leq g(x)$, tad*

$$\int\limits_E f(x) dx \leq \int\limits_E g(x) dx. \tag{3.28}$$

► Saskaņā ar 3° īpašību funkcija $h = g - f = 1g + (-1)f$ ir integrējama Lebega nozīmē kopā E, pie tam

$$\int\limits_E h(x)dx = \int\limits_E g(x)dx - \int\limits_E f(x)dx. \tag{3.29}$$

Tā kā $f(x) \le g(x)$ jebkuram $x \in E$, tad $h(x) \ge 0$ jebkuram $x \in E$. No 5° īpašības izriet

$$\int\limits_E h(x)dx \ge 0. \tag{3.30}$$

No (3.29) un (3.30) izriet (3.28).◄

7° *Ja funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā E un katram $x \in E$ ir spēkā nevienādība $A \le f(x) \le B$, kur $A, B \in \mathbb{R}$ un $A \le B$, tad*

$$A \cdot \mathrm{m}(E) \le \int\limits_E f(x)dx \le B \cdot \mathrm{m}(E). \tag{3.31}$$

► No 6° īpašības izriet

$$\int\limits_E Adx \le \int\limits_E f(x)dx \le \int\limits_E Bdx,$$

no kurienes, ņemot vērā 3.5. piezīmi, iegūsim (3.31).◄

8° *Ja funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā E, tad šīs funkcijas modulis $|f|$ arī ir integrējama Lebega nozīmē funkcija kopā E, pie tam*

$$\left| \int\limits_E f(x)dx \right| \le \int\limits_E \big|f(x)\big|dx. \tag{3.32}$$

► Apskatīsim patvaļīgu kopas E sadalījumu $T = \{E_k\}_{k=1}^n$. Saskaņā ar sadalījuma definīciju E_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ ir netukšas mērojamas kopas. Funkcija f, būdama integrējama Lebega nozīmē funkcija kopā E, ir ierobežota funkcija kopā E, tāpēc funkcijas f modulis $|f|$ arī ir ierobežota funkcija kopā E, līdz ar to f un $|f|$ ir ierobežotas funkcijas kopā $E_k \subset E$ jebkuram $k = 1, 2, \ldots, n$. No infīma un suprēma īpašībām (skat. 6.1. paragrāfu) izriet, ka funkciju f un $|f|$ infīmi un suprēmi kopā $E_k \subset E$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ ir galīgi, pie tam

$$\sup_{x \in E_k} \big|f(x)\big| - \inf_{x \in E_k} \big|f(x)\big| \le \sup_{x \in E_k} f(x) - \inf_{x \in E_k} f(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Pareizinot pēdējās nevienādības ar $\mathrm{m}(E_k)$ un summējot iegūtās nevienādības no 1 līdz n, atrodam

$$\overline{S}_{|f|}(T) - \underline{S}_{|f|}(T) = \sum_{k=1}^n \sup_{x \in E_k} \big|f(x)\big| \cdot \mathrm{m}(E_k) - \sum_{k=1}^n \inf_{x \in E_k} \big|f(x)\big| \cdot \mathrm{m}(E_k) \le$$

$$\le \sum_{k=1}^n \sup_{x \in E_k} f(x) \cdot \mathrm{m}(E_k) - \sum_{k=1}^n \inf_{x \in E_k} f(x) \cdot \mathrm{m}(E_k) = \overline{S}_f(T) - \underline{S}_f(T)$$

jeb

$$\overline{S}_{|f|}(T) - \underline{S}_{|f|}(T) \leq \overline{S}_f(T) - \underline{S}_f(T). \tag{3.33}$$

Apskatīsim patvaļīgu $\varepsilon > 0$. Tā kā funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā E, tad saskaņā ar integrējamības Lebega nozīmē 2° kritēriju eksistē tāds kopas E sadalījums T, ka

$$\overline{S}_f(T) - \underline{S}_f(T) < \varepsilon. \tag{3.34}$$

No (3.33) un (3.34) seko, ka

$$\overline{S}_{|f|}(T) - \underline{S}_{|f|}(T) < \varepsilon. \tag{3.35}$$

Tātad jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē kopas E sadalījums T, ka izpildās (3.35). Saskaņā ar integrējamības Lebega nozīmē 2° kritēriju funkcija $|f|$ ir integrējama Lebega nozīmē kopā E.

Pierādīsim nevienādību (3.32). Tā kā jebkuram $x \in E$ ir spēkā

$$-\big|f(x)\big| \leq f(x) \leq \big|f(x)\big|$$

tad no Lebega integrāļa 6° īpašības izriet nevienādības

$$-\int\limits_E \big|f(x)\big|dx \leq \int\limits_E f(x)dx \leq \int\limits_E \big|f(x)\big|dx,$$

kuras ir ekvivalentas nevienādībai (3.32).◀

3.8. piezīme.

- 8° *īpašības apgrieztais apgalvojums nav spēkā*, jo no funkcijas f moduļa $|f|$ integrējamības Lebega nozīmē kopā E vispārīgā gadījumā neizriet funkcijas f integrējamība Lebega nozīmē kopā E. Lai ilustrētu iepriekš teikto, konstruēsim ierobežotu funkciju f galīga pozitīva mēra kopā E šādi. Saskaņā ar 1.14. piezīmi kopa E satur nemērojamu apakškopu A. Pieņemsim, ka

  $$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ja} \quad x \in A, \\ -1, & \text{ja} \quad x \in E \setminus A. \end{cases}$$

  No vienas puses, tā kā funkcija f nav mērojama kopā E, jo tās Lebega kopa $E[f \geq 1] = A$ ir nemērojama kopa, tad no 3.3. teorēmas izriet, ka funkcija f nav integrējama Lebega nozīmē kopā E. No otras puses, tā kā $\big|f(x)\big| = 1$ jebkuram $x \in E$, tad funkcijas f modulis $|f|$ ir konstanta funkcija kopā E un līdz ar to arī integrējama Lebega nozīmē funkcija šajā kopā.
- Atzīmēsim, ka no 8° īpašības, ņemot vērā 3.2. teorēmu, izriet, ka *mērojama ierobežota funkcija f kopā E ir integrējama Lebega nozīmē funkcija kopā E tad un tikai tad, kad funkcijas f modulis $|f|$ ir integrējama Lebega nozīmē funkcija kopā E.*
- No iepriekš teiktā izriet, ka kopā E ($\mathrm{m}(E) < +\infty$) ierobežotu mērojamu funkciju klasē funkcijas f integrējamība Lebega nozīmē kopā E ir ekvivalenta funkcijas f moduļa $|f|$ integrējamībai Lebega nozīmē kopā E. Integrējamībai Rīmaņa nozīmē šāda īpašība nepiemīt, jo, piemēram, funkcija $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ $\big(a, b \in \mathbb{R};\ a < b\big)$, ka

  $$\forall x \in [a;b] : \begin{cases} 1, & \text{ja} \quad x \in \mathbb{Q} \cap [a;b], \\ -1, & \text{ja} \quad x \notin \mathbb{Q} \cap [a;b], \end{cases}$$

ir ierobežota mērojama funkcija galīga mēra kopā $[a;b]$, pie tam funkcija *nav* integrējama Rīmaņa nozīmē nogriezni $[a;b]$, taču tās modulis $|f|$:

$$\forall x \in [a;b]: \ |f|(x) = 1,$$

ir integrējama Rīmaņa nozīmē nogriezni $[a;b]$ funkcija.

9° *Ja funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā E, tad funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē jebkurā kopas E mērojamā apakškopā $\widehat{E}$.*

► Apskatīsim patvaļīgu kopas E sadalījumu $T = \{E_k\}_{k=1}^n$. Kopu sistēma T^*, kas sastāv no visām tām kopām $\widehat{E} \cap E_k$ un $\left(E \setminus \widehat{E}\right) \cap E_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, kuras ir netukšas, ir kopas E sadalījuma T turpinājums. Saskaņā ar Darbū-Lebega summu 2° īpašību

$$\underline{S}(T) \le \underline{S}(T^*) \le \overline{S}(T^*) \le \overline{S}(T),$$

no kurienes izriet

$$\overline{S}(T^*) - \underline{S}(T^*) \le \overline{S}(T) - \underline{S}(T). \tag{3.36}$$

Kopu sistēma $\widehat{T}$, kas sastāv no visām tām kopām $\widehat{E} \cap E_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, kuras ir netukšas, ir kopas $\widehat{E}$ sadalījums. Atrodam:

$$\begin{aligned}\overline{S}(T^*) - \underline{S}(T^*) = \sum_k \left(\sup_{\widehat{E}\cap E_k} f - \inf_{\widehat{E}\cap E_k} f \right) \cdot \mathrm{m}\left(\widehat{E} \cap E_k\right) + \\ + \sum_k \left(\sup_{\left(E\setminus\widehat{E}\right)\cap E_k} f - \inf_{\left(E\setminus\widehat{E}\right)\cap E_k} f \right) \cdot \mathrm{m}\left(\left(E \setminus \widehat{E}\right) \cap E_k\right) \ge \\ \ge \sum_k \left(\sup_{\widehat{E}\cap E_k} f - \inf_{\widehat{E}\cap E_k} f \right) \cdot \mathrm{m}\left(\widehat{E} \cap E_k\right) = \overline{S}(\widehat{T}) - \underline{S}(\widehat{T}),\end{aligned}$$

kur summēšana notiek pa visiem tiem indeksiem $k = 1, 2, \ldots, n$, pie kuriem attiecīgās kopas $\widehat{E} \cap E_k$ un $\left(E \setminus \widehat{E}\right) \cap E_k$ ir netukšas. Atzīmēsim tikai, ka ierobežotas dotajā kopā funkcijas suprēma un infīma šajā kopā starpība ir nenegatīvs skaitlis. Tātad

$$\overline{S}(\widehat{T}) - \underline{S}(\widehat{T}) \le \overline{S}(T^*) - \underline{S}(T^*). \tag{3.37}$$

No (3.36) un (3.37) seko

$$\overline{S}(\widehat{T}) - \underline{S}(\widehat{T}) \le \overline{S}(T) - \underline{S}(T). \tag{3.38}$$

Apskatīsim patvaļīgu $\varepsilon > 0$. Tā kā funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā E, tad saskaņā ar integrējamības Lebega nozīmē 2° kritēriju eksistē tāds kopas E sadalījums T, ka

$$\overline{S}(T) - \underline{S}(T) < \varepsilon. \tag{3.39}$$

No (3.36) un (3.37) seko

$$\overline{S}(\widehat{T}) - \underline{S}(\widehat{T}) < \varepsilon. \tag{3.40}$$

Tātad jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē kopas $\widehat{E}$ sadalījums $\widehat{T}$, ka izpildās (3.40). Saskaņā ar integrējamības Lebega nozīmē 2° kritēriju funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā $\widehat{E}$.◄

Lebega integrāļa 1°, 2°, 3°, 4°, 5°, 6°, 7°, 8° un 9° īpašības ir analoģiskas attiecīgajām Rīmaņa integrāļa īpašībām. Tāpēc dažkārt tās sauc par **Lebega integrāļa vienkāršākajām īpašībām**.

3.6.3. Lebega integrāļa sanumurējamā aditivitāte

Lebega integrāļa sanumurējamā aditivitāte ir viena no svarīgākajām (ja ne pati svarīgākā) Lebega integrāļa īpašībām. Rīmaņa integrālim analoģiska īpašība nepiemīt.

10° Lebega integrāļa sanumurējamā aditivitāte. *Ja funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē galīga mēra kopā E, kura ir ne vairāk kā sanumurējams savstarpēji nešķeļošos mērojamu apakškopu $E_k \subset E$ apvienojums, tad funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē katrā kopā E_k, pie tam*

$$\int\limits_E f(x)dx = \sum_k \int\limits_{E_k} f(x)dx. \tag{3.41}$$

► No Lebega integrāļa 9° īpašības seko, ka funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē katrā kopā E_k. Pierādīsim vienādību (3.41).

a) Pieņemsim, ka kopa E ir divu savu mērojamu apakškopu E_1 un E_2, kurām nav kopīgu punktu, apvienojums. Apskatīsim patvaļīgu kopas E sadalījumu $\widetilde{T} = \left\{\widetilde{E}_t\right\}_{t=1}^{s}$. Acīmredzot, $T^* = \{\widetilde{E}_i \cap E_1\} \cup \{\widetilde{E}_j \cap E_2\}$ ir kopas E sadalījuma $\widetilde{T}$ turpinājums, kur i un j ir visi tie indeksi $t = 1, 2, \ldots, s$, kuriem kopas attiecīgi $\widetilde{E}_i \cap E_1$ un $\widetilde{E}_j \cap E_2$ ir netukšas. No Darbū-Lebega summu īpašībām izriet, ka

$$\underline{S}(\widetilde{T}) \le \underline{S}(T^*) \le \overline{S}\,(T^*) \le \overline{S}(\widetilde{T}). \tag{3.42}$$

Var redzēt, ka $T_1 = \left\{\widetilde{E}_i \cap E_1\right\}$ un $T_2 = \left\{\widetilde{E}_j \cap E_2\right\}$ ir attiecīgi kopu E_1 un E_2 sadalījumi, pie tam

$$\underline{S}\,(T^*) = \sum_i \inf_{\widetilde{E}_i \cap E_1} f \cdot \mathrm{m}(\widetilde{E}_i \cap E_1) + \sum_j \inf_{\widetilde{E}_j \cap E_2} f \cdot \mathrm{m}(\widetilde{E}_j \cap E_2) = \underline{S}(T_1) + \underline{S}(T_2),$$

$$\overline{S}\,(T^*) = \sum_i \sup_{\widetilde{E}_i \cap E_1} f \cdot \mathrm{m}(\widetilde{E}_i \cap E_1) + \sum_j \sup_{\widetilde{E}_j \cap E_2} f \cdot \mathrm{m}(\widetilde{E}_j \cap E_2) = \overline{S}(T_1) + \overline{S}(T_2).$$

Tā kā

$$\underline{S}(T_1) \le \underline{\mathfrak{I}}_1(f) = \int\limits_{E_1} f(x)dx = \overline{\mathfrak{I}}_1(f) \le \overline{S}(T_1),$$

$$\underline{S}(T_2) \le \underline{\mathfrak{I}}_2(f) = \int\limits_{E_2} f(x)dx = \overline{\mathfrak{I}}_2(f) \le \overline{S}(T_2),$$

tad

$$\underline{S}(T_1) + \underline{S}(T_2) \le \int\limits_{E_1} f(x)dx + \int\limits_{E_2} f(x)dx \le \overline{S}(T_1) + \overline{S}(T_2)$$

jeb

$$\underline{S}\,(T^*) \le \int\limits_{E_1} f(x)dx + \int\limits_{E_2} f(x)dx \le \overline{S}\,(T^*)\,,$$

no kurienes, ņemot vērā (3.42), seko

$$\underline{S}(\widetilde{T}) \le \int\limits_{E_1} f(x)dx + \int\limits_{E_2} f(x)dx \le \overline{S}(\widetilde{T}).$$

Tā kā $\widetilde{T}$ ir patvaļīgs kopas E sadalījums, tad skaitlis $\int\limits_{E_1} f(x)dx + \int\limits_{E_2} f(x)dx$ ir šķēluma $(\mathcal{A};\mathcal{B})$ atdalītājskaitlis, kur $\mathcal{A}$ un $\mathcal{B}$ ir attiecīgi visu funkcijas f apakšējo un augšējo Darbū-Lebega summu kopas. Tā kā funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā E, tad $\int\limits_E f(x)dx$ ir šķēluma $(\mathcal{A};\mathcal{B})$ vienīgais atdalītājskaitlis. Tāpēc

$$\int\limits_E f(x)dx = \int\limits_{E_1} f(x)dx + \int\limits_{E_2} f(x)dx.$$

b) Ja

$$E = \bigcup_{k=1}^{n} E_k, \quad E_k \cap E_s = \emptyset \ (k \neq s;\ k,s = 1,2,\ldots,n),$$

kur E_k $(k = 1,2,\ldots,n)$ ir kopas E mērojamas apakškopas, tad ar matemātiskās indukcijas principa palīdzību, izmantojot a), pierāda, ka

$$\int\limits_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{E_k} f(x)dx.$$

c) Pieņemsim, ka

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k, \quad E_k \cap E_s = \emptyset \ (k \neq s;\ k,s = 1,2,\ldots),$$

kur E_k $(k \in \mathbb{N})$ ir kopas E mērojamas apakškopas.

Apskatīsim kopas

$$P_s = \bigcup_{k=s+1}^{\infty} E_k = E_{s+1} \cup E_{s+2} \cup \cdots \ (s = 1,2,\ldots).$$

No Lebega mēra sanumurējamās aditivitātes seko, ka

$$\mathrm{m}(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_k), \quad \mathrm{m}(P_s) = \sum_{k=s+1}^{\infty} \mathrm{m}(E_k) \ (s = 1,2,\ldots).$$

Tā kā E ir galīga mēra kopa, t.i., $\mathrm{m}(E) < +\infty$, tad rinda $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_k)$ ar nenegatīviem locekļiem konverģē. Tāpēc šīs rindas s-to atlikumu virknes $\big(\mathrm{m}(P_s)\big)$ robeža ir nulle, t.i.,

$$\lim_{s\to\infty} \mathrm{m}(P_s) = 0.$$

Jebkuram $s = 1,2,\ldots$ ir spēkā

$$\left(\bigcup_{k=1}^{s} E_k\right) \cup P_s = E, \quad E_k \cap P_s = \emptyset \ \ (k = 1,2,\ldots,s).$$

Tāpēc no b) punktā pierādītā seko, ka jebkuram $s = 1,2,\ldots$ izpildās

$$\int\limits_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{s} \int\limits_{E_k} f(x)dx + \int\limits_{P_s} f(x)dx \quad \text{jeb} \quad \int\limits_E f(x)dx - \sum_{k=1}^{s} \int\limits_{E_k} f(x)dx = \int\limits_{P_s} f(x)dx.$$

No pēdējās vienādības, ņemot vērā Lebega integrāļa 8° īpašību, iegūsim

$$\left|\int\limits_E f(x)dx - \sum_{k=1}^{s}\int\limits_{E_k} f(x)dx\right| \le \int\limits_{P_s}\big|f(x)\big|dx. \tag{3.43}$$

Tā kā funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā E, tad funkcija f ir ierobežota kopā E, t.i., eksistē tāds $M > 0$, ka

$$\forall x \in E: \ \big|f(x)\big| \le M.$$

No Lebega integrāļa 7° īpašības izriet, ka jebkuram $s = 1, 2, \ldots$ ir spēkā

$$\int\limits_{P_s}\big|f(x)\big|dx \le M \cdot \mathrm{m}(P_s). \tag{3.44}$$

No (3.43) un (3.44) atrodam, ka jebkuram $s = 1, 2, \ldots$ izpildās

$$\left|\int\limits_E f(x)dx - \sum_{k=1}^{s}\int\limits_{E_k} f(x)dx\right| \le M \cdot \mathrm{m}(P_s).$$

Apskatīsim patvaļīgu $\varepsilon > 0$. Tā kā $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{m}(P_n) = 0$, tad eksistē tāds naturāls skaitlis n_0, ka visiem naturāliem skaitļiem $n \ge n_0$ ir patiesa nevienādība $\mathrm{m}(P_n) < \frac{\varepsilon}{M}$. Tātad jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds naturāls skaitlis n_0, ka visiem naturāliem skaitļiem $n \ge n_0$ ir spēkā

$$\left|\int\limits_E f(x)dx - \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{E_k} f(x)dx\right| \le M \cdot \mathrm{m}(P_n) < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Tas nozīmē, ka rindas

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{E_k} f(x)dx$$

parciālsummu virkne

$$\left(\sum_{k=1}^{s}\int\limits_{E_k} f(x)dx\right)_{s=1}^{\infty}$$

konverģē uz skaitli $\int\limits_E f(x)dx$, t.i., apskatāmā rinda konverģē, bet tās summu aprēķina pēc formulas (3.41). Īpašība ir pierādīta.◀

3.9. piezīme. Kā jau iepriekš tika atzīmēts, tad Rīmaņa integrālim sanumurējamās aditivitātes īpašība nepiemīt. Rīmaņa integrālim piemīt tikai **galīgās aditivitātes īpašība** [7, 1. daļa], [9]: ja $a < x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, kur $n \in \mathbb{N}$, un funkcija f ir integrējama Rīmaņa nozīmē nogriezni $[a; b]$, tad funkcija f ir integrējama Rīmaņa nozīmē katrā apakšnogriezni $[x_{k-1}; x_k] \subset [a; b]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, pie tam ir spēkā vienādība

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{a=x_0}^{x_1} f(x)dx + \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n=b} f(x)dx.$$

3.6.4. Lebega integrāļa sanumurējamās aditivitātes sekas

11° *Ja funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā E, pie tam $f(x) \geq 0$ jebkuram $x \in E$, bet $E_1 \subset E$ ir kopas E mērojama apakškopa, tad funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā E_1 un*

$$\int\limits_{E_1} f(x)dx \leq \int\limits_{E} f(x)dx. \tag{3.45}$$

▶ Kopa $E \setminus E_1$ ir mērojama kā divu mērojamu kopu starpība. Tā kā $E = (E \setminus E_1) \cup E_1$ un $(E \setminus E_1) \cap E_1 = \emptyset$, tad no Lebega integrāļa sanumurējamās aditivitātes seko, ka funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopās E_1 un $E \setminus E_1$, pie tam

$$\int\limits_{E} f(x)dx = \int\limits_{E_1} f(x)dx + \int\limits_{E \setminus E_1} f(x)dx.$$

Saskaņā ar Lebega integrāļa 5° īpašību

$$\int\limits_{E \setminus E_1} f(x)dx \geq 0.$$

Tāpēc

$$\int\limits_{E} f(x)dx = \int\limits_{E_1} f(x)dx + \int\limits_{E \setminus E_1} f(x)dx \geq \int\limits_{E_1} f(x)dx,$$

t.i., izpildās (3.45).◀

12° *Ja f ir nenegatīva ierobežota mērojama funkcija galīga mēra kopā E, tad jebkuram $a > 0$ ir patiesa* ***Čebišova***[3] ***nevienādība***

$$\mathrm{m}\big(E[f \geq a]\big) \leq \frac{1}{a} \int\limits_{E} f(x)dx. \tag{3.46}$$

▶ Tā kā funkcija f ir mērojama kopā E, tad funkcijas f Lebega kopa $E[f \geq a]$ ir mērojama jebkuram $a > 0$. Savukārt, tā kā f ir ierobežota mērojama funkcija galīga mēra kopā E, tad no 3.2. teorēmas seko, ka funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā E. Tāpēc no Lebega integrāļa 11° īpašības seko

$$\int\limits_{E[f \geq a]} f(x)dx \leq \int\limits_{E} f(x)dx. \tag{3.47}$$

Tā kā $f(x) \geq a$ visiem $x \in E[f \geq a]$, tad no Lebega integrāļa 7° īpašības izriet

$$\int\limits_{E[f \geq a]} f(x)dx \geq a \cdot \mathrm{m}\big(E[f \geq a]\big). \tag{3.48}$$

[3] P. Čebišovs (*Чебышев Пафнутий Львович*,1821-1894) - krievu matemātiķis.

No (3.47) un (3.48) atrodam

$$a \cdot \mathrm{m}\big(E[f \geq a]\big) \leq \int\limits_E f(x)dx.$$

Izdalot pēdējo vienādību ar a, iegūsim (3.47).◀

13° *Ja funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē galīga mēra kopās E_1 un E_2, kurām nav kopīgu punktu, tad funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē arī to apvienojumā $E = E_1 \cup E_2$, pie tam*

$$\int\limits_E f(x)dx = \int\limits_{E_1} f(x)dx + \int\limits_{E_2} f(x)dx. \tag{3.49}$$

▶ Tā kā E_1 un E_2 ir galīga mēra kopas, kurām nav kopīgu punktu, tad no Lebega mēra sanumurējamās aditivitātes seko, ka $\mathrm{m}(E) = \mathrm{m}(E_1 \cup E_2) = \mathrm{m}(E_1) + \mathrm{m}(E_2) < +\infty$, t.i., kopa E arī ir galīga mēra kopa. Funkcija f ir ierobežota kopā $E = E_1 \cup E_2$, jo tā ir ierobežota kopās E_1 un E_2. Pierādīsim, ka funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā E. Apskatīsim patvaļīgu $\varepsilon > 0$. Tā kā funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopās E_1 un E_2, tad eksistē kopas E_1 sadalījums T_1 un kopas E_2 sadalījums T_2, ka

$$\overline{S}(T_1) - \underline{S}(T_1) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \overline{S}(T_2) - \underline{S}(T_2) < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Viegli redzēt, ka $T = T_1 \cup T_2$ ir kopas E sadalījums, pie tam

$$\overline{S}(T) = \overline{S}(T_1) + \overline{S}(T_2), \quad \underline{S}(T) = \underline{S}(T_1) + \underline{S}(T_2)\,.$$

Tāpēc

$$\overline{S}(T) - \underline{S}(T) = \big(\overline{S}(T_1) - \underline{S}(T_1)\big) + \big(\overline{S}(T_2) - \underline{S}(T_2)\big) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tātad funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā E. Vienādības (3.49) patiesums seko Lebega integrāļa sanumurējamās aditivitātes.◀

14° *Ja funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē savstarpēji nešķeļošās galīga mēra kopās E_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, tad funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē arī to apvienojumā $E = \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$, pie tam*

$$\int\limits_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{E_k} f(x)dx. \tag{3.50}$$

▶ Īpašības patiesumu pierāda ar matemātiskās indukcijas principa palīdzību, izmantojot 13° īpašību.◀

3.2. piemērs. *Pieņemsim, ka kopa E ir savstarpēji nešķeļošos galīga mēra kopu E_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ apvienojums, bet f ir kopā E definēta kāpņveida funkcija, ka $f(x) = c_k$ jebkuram $x \in E_k$, kur c_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ ir reālas konstantes. Tad funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā E, pie tam*

$$\int\limits_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \mathrm{m}(E_k). \tag{3.51}$$

► No mērojamu funkciju 1° īpašības izriet, ka funkcija f ir mērojama kopā E_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$. No 3.2. teorēmas seko, ka funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā E_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Saskaņā ar 14° īpašību funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā E. Vienādības (3.51) patiesums seko no vienādības (3.50), ja ņemt vērā 3.5. piezīmi.◄

3.10. piezīme. Ja 14° īpašības formulējumā pieņemt, ka kopa E ir savstarpēji nešķeļošos galīga mēra kopu *sanumurējams* apvienojums, tad iegūtais apgalvojums vispārīgā gadījumā nav spēkā, jo

1. galīga mēra kopu E_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ apvienojuma $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ mērs var būt arī bezgalīgs,
2. funkcija f var būt neierobežota kopā E, neskatoties uz to, ka tā ir ierobežota katrā kopā E_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Taču, ja pieņemt, ka funkcija f ir ierobežota galīga mēra kopā E, tad ir spēkā šāds 14° īpašības vispārinājums.

14′° *Pieņemsim, ka funkcija f ir ierobežota galīga mēra kopā E, kura ir savstarpēji nešķeļošos mērojamu kopu E_k $(k \in \mathbb{N})$ apvienojums. Ja funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē katrā kopā E_k $(k \in \mathbb{N})$, tad funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā E, pie tam*

$$\int\limits_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f(x)dx. \tag{3.52}$$

► Atzīmēsim, ka

1. funkcija f ir ierobežota katrā kopā E_k $(k \in \mathbb{N})$, jo funkcija f ir ierobežota šo kopu apvienojumā E,
2. no Lebega mēra monotonitātes un sanumurējamās aditivitātes izriet, ka E_k $(k \in \mathbb{N})$ ir galīga mēra kopas.

Tā kā funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā E_k $(k \in \mathbb{N})$, tad no 3.3. teorēmas seko, ka funkcija f ir mērojama kopā E_k $(k \in \mathbb{N})$. No mērojamu funkciju 4° īpašības izriet, ka funkcija f ir mērojama kopā E. Tātad f ir ierobežota mērojama funkcija galīga mēra kopā E. Saskaņā ar 3.3. teorēmu funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā E. Vienādības (3.52) patiesums izriet no Lebega integrāļa sanumurējamās aditivitātes.◄

3.3. piemērs. *Pieņemsim, ka galīga mēra kopa E ir savstarpēji nešķeļošos mērojamu kopu E_k $(k \in \mathbb{N})$ apvienojums, bet f ir kopā E definēta kāpņveida funkcija, ka $f(x) = c_k$ jebkuram $x \in E_k$, kur (c_k) ir ierobežota reālu skaitļu virkne. Tad funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā E, pie tam*

$$\int\limits_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot \mathrm{m}(E_k). \tag{3.53}$$

► No mērojamu funkciju 1° īpašības izriet, ka funkcija f ir mērojama kopā E_k $(k \in \mathbb{N})$. No 3.2. teorēmas seko, ka funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā

E_k ($k \in \mathbb{N}$). Tā kā virkne (c_k) ir ierobežota, tad funkcija f ir ierobežota kopā E. Saskaņā ar 14′° īpašību funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā E. Vienādības (3.53) patiesums seko no vienādības (3.52), ja ņemt vērā 3.5. piezīmi.◀

3.11. piezīme. 14° īpašības analogs ir spēkā arī Rīmaņa integrālim [7, 1. daļa]: ja $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, kur $n \in \mathbb{N}$, un funkcija f ir integrējama Rīmaņa nozīmē katrā nogriezni $[x_{k-1}; x_k]$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), tad funkcija f ir integrējama Rīmaņa nozīmē nogriezni $[a; b]$, pie tam

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{a=x_0}^{x_1} f(x)dx + \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n=b} f(x)dx.$$

15° *Ja ierobežota funkcija $g : E \to \mathbb{R}$ ir ekvivalenta integrējamai Lebega nozīmē funkcijai $f : E \to \mathbb{R}$, tad funkcija g arī ir integrējama Lebega nozīmē kopā E un*

$$\int\limits_E g(x)dx = \int\limits_E f(x)dx. \tag{3.54}$$

▶ Tā kā funkcijas f un g ir ekvivalentas kopā E, tad $E_1 = E[f \neq g]$ ir nulles mēra kopa, t.i., $\mathrm{m}(E_1) = 0$. Tā kā funkcijas f un g ir ierobežotas kopā E (funkcija g ir ierobežota kopā E saskaņā ar doto, savukārt funkcijas f ierobežotība kopā E izriet no tās integrējamības Lebega nozīmē kopā E), tad funkcijas f un g ir ierobežotas arī kopas E nulles mēra apakškopā E_1. No 3.4. piezīmes seko, ka funkcijas f un g ir integrējamas Lebega nozīmē kopā E_1, pie tam

$$\int\limits_{E_1} g(x)dx = \int\limits_{E_1} f(x)dx = 0.$$

Kopa $E \setminus E_1$ ir mērojama kā divu mērojamu kopu starpība (kopa E ir mērojama saskaņā ar doto, savukārt E_1 ir mērojama kopa kā nulles mēra kopa). No Lebega integrāļa 9° īpašības seko, ka funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā $E \setminus E_1$. Tā kā kopā $E \setminus E_1$ funkcijas f un g ir vienādas, tad funkcija g arī ir integrējama Lebega nozīmē kopā $E \setminus E_1$, pie tam

$$\int\limits_{E \setminus E_1} g(x)dx = \int\limits_{E \setminus E_1} f(x)dx.$$

Tā kā $E = (E \setminus E_1) \cup E_2$ un $(E \setminus E_1) \cap E_2 = \emptyset$, tad no Lebega integrāļa 13° īpašības izriet, ka funkcija g ir integrējama Lebega nozīmē kopā E, pie tam

$$\int\limits_E g(x)dx = \int\limits_{E \setminus E_1} g(x)dx + \int\limits_{E_1} g(x)dx = \int\limits_{E \setminus E_1} f(x)dx + \int\limits_{E_1} f(x)dx = \int\limits_E f(x)dx,$$

t.i., izpildās vienādība (3.54).◀

3.12. piezīme. 15° īpašība dažkārt ļauj vienkāršot Lebega integrāļu aprēķināšanu: *zemintegrāļa funkcija ir jāaizstāj ar tai ekvivalentu ierobežotu funkciju apskatāmajā kopā, integrāļa vērtība no tā neizmainīsies.*

3.4. piemērs. Kā jau tika atzīmēts 3.1. piemērā, tad Dirihlē funkcija χ ir mērojama funkcija jebkurā galīga mēra kopā E, pie tam tās Lebega integrālis jebkurā galīga mēra kopā ir vienāds ar 0. Izmantojot 3.12. piezīmē teikto, pēdējo apgalvojumu var pierādīt arī šādi: Dirihlē funkcija χ ir ekvivalenta nullfunkcijai $\mathbb{O}$ apskatāmajā kopā, jo to vērtības atšķiras tikai nulles mēra kopā $E \cap \mathbb{Q}$, tāpēc no 15° īpašības, ņemot vērā 3.6. piezīmi, iegūsim

$$\int\limits_E \chi(x)dx = \int\limits_E \mathbb{O}(x)dx = 0.$$

15° īpašību var pārformulēt arī šādi.

15′° *Ja funkcijas f un g ir ierobežotas galīga mēra kopā E, pie tam šīs funkcijas ir vienādas visur kopā E, izņemot nulles mēra (Lebega nozīmē) punktu apakškopu $B \subset E$, t.i., $\mathrm{m}(B) = 0$, kur $B = \{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$, tad vai nu funkcijas f un g ir integrējamas Lebega nozīmē kopā E un*

$$\int\limits_E f(x)dx = \int\limits_E g(x)dx,$$

vai arī funkcijas f un g nav integrējamas Lebega nozīmē kopā E.

15″° *Ja integrējamas Lebega nozīmē kopā E funkcijas g vērtības izmainīt nulles mēra (Lebega nozīmē) punktu apakškopā $B \subset E$ tā, lai iegūtā funkcija f būtu ierobežota kopā E, tad funkcija f arī ir integrējama Lebega nozīmē kopā E un*

$$\int\limits_E f(x)dx = \int\limits_E g(x)dx.$$

Izmantojot 15″° īpašību, var pierādīt šādus 5°, 6° un 7° īpašību vispārinājumus.

5′° *Ja funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā E un gandrīz visiem $x \in E$ ir spēkā nevienādība $f(x) \geq 0$, tad*

$$\int\limits_E f(x)dx \geq 0. \tag{3.55}$$

► Tā kā gandrīz visiem $x \in E$ ir spēkā nevienādība $f(x) \geq 0$, tad $\mathrm{m}(B) = 0$, kur $B = E[f < 0]$. Kopā E definēta funkcija $\widehat{f}$, ka

$$\forall x \in E : \ \widehat{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ja} \quad x \in E \setminus B, \\ 0, & \text{ja} \quad x \in B, \end{cases}$$

ir ierobežota kopā E un ir iegūta no funkcijas f, izmainot tās vērtības nulles mēra apakškopā B. Tāpēc no 15″° īpašības seko, ka funkcija $\widehat{f}$ ir integrējama Lebega nozīmē kopā E, pie tam

$$\int\limits_E \widehat{f}(x)dx = \int\limits_E f(x)dx. \tag{3.56}$$

Tā kā funkcija $\widehat{f}$ ir nenegatīva kopā E, tad no 5° īpašības seko

$$\int\limits_E \widehat{f}(x)dx \geq 0. \tag{3.57}$$

No (3.56) un (3.57) izriet (3.55).◄

6′° *Ja funkcijas f un g ir integrējamas Lebega nozīmē kopā E un gandrīz visiem $x \in E$ ir spēkā nevienādība $f(x) \le g(x)$, tad*

$$\int\limits_E f(x)dx \le \int\limits_E g(x)dx. \tag{3.58}$$

► Tā kā gandrīz visiem $x \in E$ ir spēkā nevienādība $f(x) \le g(x)$, tad $\mathrm{m}(B) = 0$, kur $B = E[f > g]$. Kopā E definētas funkcijas $\widehat{f}$ un $\widehat{g}$, ka

$$\forall x \in E: \ \widehat{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ja} \quad x \in E \setminus B, \\ 0, & \text{ja} \quad x \in B, \end{cases}$$
$$\forall x \in E: \ \widehat{g}(x) = \begin{cases} g(x), & \text{ja} \quad x \in E \setminus B, \\ 0, & \text{ja} \quad x \in B, \end{cases}$$

ir ierobežotas kopā E un ir iegūtas no attiecīgi funkcijām f un g, izmainot to vērtības nulles mēra apakškopā B. Tāpēc no 15″° īpašības seko, ka funkcijas $\widehat{f}$ un $\widehat{g}$ ir integrējamas Lebega nozīmē kopā E, pie tam

$$\int\limits_E \widehat{f}(x)dx = \int\limits_E f(x)dx \quad \text{un} \quad \int\limits_E \widehat{g}(x)dx = \int\limits_E g(x)dx. \tag{3.59}$$

Tā kā jebkuram $x \in E$ ir spēkā nevienādība $\widehat{f}(x) \le \widehat{g}(x)$, tad no 6° īpašības seko

$$\int\limits_E \widehat{f}(x)dx \le \int\limits_E \widehat{g}(x)dx. \tag{3.60}$$

No (3.59) un (3.60) izriet (3.58).◄

7′° *Ja funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā E un gandrīz visiem $x \in E$ ir spēkā nevienādība $A \le f(x) \le B$, kur $A, B \in \mathbb{R}$ un $A \le B$, tad*

$$A \cdot \mathrm{m}(E) \le \int\limits_E f(x)dx \le B \cdot \mathrm{m}(E). \tag{3.61}$$

► Iesakām lasītājam patstāvīgi pierādīt šo īpašību (skat. 6. uzdevumu).◄

3.13. piezīme.

a) No 15° (vai 15′°, 15″°) īpašības izriet, ka galīga mēra kopā E ierobežotas mērojamas funkcijas f integrējamība Lebega nozīmē kopā E nav atkarīga no tā, kādas tieši vērtības funkcija f pieņem kopas E nulles mēra (Lebega nozīmē) apakškopā B. *Tas ļauj definēt Lebega integrāli funkcijai φ, kura ir definēta visur galīga mēra kopā E, izņemot šīs kopas nulles mēra (Lebega nozīmē) apakškopu B, un kura ir mērojama kopā $E \setminus B$.* Šim nolūkam konstruēsim funkciju $g : E \to \mathbb{R}$ šādi. Uzskatīsim, ka funkcijas g vērtības kopas $E \setminus B$ punktos ir vienādas ar attiecīgajām funkcijas φ vērtībām, bet kopas B punktos funkcijai g piešķirsim patvaļīgas reālas vērtības tā, lai funkcija g būtu ierobežota kopā E. Tā kā funkcija g ir mērojama kopās $E \setminus B$ un B (kopā $E \setminus B$ funkcija g ir vienāda ar funkciju φ, kura ir mērojama šajā kopā saskaņā ar doto, savukārt kopā B funkcija g ir mērojama saskaņā ar mērojamu funkciju 2° īpašību, jo B ir nulles mēra kopa), tad no mērojamu funkciju 4° īpašības

seko, ka funkcija g ir mērojama arī kopu $E \setminus B$ un B apvienojumā $(E \setminus B) \cup B = E$. Tātad g ir ierobežota mērojama funkcija galīga mēra kopā E. Tāpēc, ņemot vērā 3.2. teorēmu, funkcija g ir integrējama Lebega nozīmē kopā E. *Uzskata, ka funkcija φ ir integrējama Lebega nozīmē kopā E, bet tās Lebega integrāli šajā kopā definē ar vienādību*

$$\int\limits_E \varphi(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_E g(x)dx. \tag{3.62}$$

Šī definīcija ir korekta, jo saskaņā ar $15''^{\circ}$ īpašību ne funkcijas g integrējamība Lebega nozīmē kopā E, ne funkcijas g Lebega integrāļa vērtība šajā kopā, nav atkarīga no tā, kādas tieši vērtības tika piešķirtas funkcijai g kopas B punktos.

b) Izmantojot 15° (vai $15'^{\circ}$, $15''^{\circ}$) īpašību, *Lebega integrāli var definēt galīga mēra kopā E mērojamai funkcijai φ, kura ir gandrīz visur ierobežota kopā E.* Šim nolūkam apskata funkcijai φ ekvivalentu ierobežotu funkciju g kopā E. No 2.3. teorēmas seko, ka funkcija g arī ir mērojama funkcija kopā E. Tātad g ir ierobežota mērojama funkcija galīga mēra kopā E. Tāpēc, ņemot vērā 3.2. teorēmu, funkcija g ir integrējama Lebega nozīmē kopā E. *Uzskata, ka funkcija φ ir integrējama Lebega nozīmē kopā E, bet tās Lebega integrāli šajā kopā definē ar vienādību* (3.62). Spriežot analoģiski kā a) punktā, var pamatot, ka šī definīcija ir korekta. Iesakām lasītājam patstāvīgi pārliecināties, ka iepriekš apskatīto funkciju klasei (t.i., galīga mēra kopā mērojamām funkcijām, kuras ir gandrīz visur ierobežotas apskatāmajā kopā) ir spēkā visi šajā nodaļā aplūkojamie Lebega integrāļa teorijas rezultāti, kuros, nepieciešamības gadījumā, ir jāveic tikai nenozīmīgas izmaiņas. Par to, kā apskatītais šajā punktā Lebega integrāļa vispārinājums var tikt izmantots Lebega integrāļa teorijā, skat. 3.19. piezīmi.

3.14. piezīme. Rīmaņa integrālim piemīt $15'^{\circ}$ un $15''^{\circ}$ īpašību analogi (skat., piemēram, [1], [9]).

- *Ja funkcijas f un g ir ierobežotas nogrieznī $[a;b]$, pie tam šīs funkcijas ir vienādas visur nogrieznī $[a;b]$, izņemot nulles mēra (Žordāna nozīmē) punktu apakškopu $B \subset [a;b]$, t.i.,* $\operatorname{mes}(B) = 0$, *kur* $B = \{x \in [a;b] : f(x) \neq g(x)\}$, *tad vai nu funkcijas f un g ir integrējamas Rīmaņa nozīmē nogrieznī $[a;b]$ un*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b g(x)dx,$$

  vai arī funkcijas f un g nav integrējamas Rīmaņa nozīmē nogrieznī $[a;b]$.
- *Ja integrējamas Rīmaņa nozīmē nogrieznī $[a;b]$ funkcijas g vērtības izmainīt nulles mēra (Žordāna nozīmē) punktu apakškopā*[4] *$B \subset [a;b]$ tā, lai iegūtā funkcija f būtu ierobežota nogrieznī $[a;b]$, tad funkcija f arī ir integrējama Rīmaņa nozīmē nogrieznī $[a;b]$ un*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b g(x)dx.$$

[4] Atzīmēsim, ka šīs īpašības ietvaros nosacījumu $\operatorname{mes}(B) = 0$ nevar aizstāt ar vispārīgāku nosacījumu, ka $\mathrm{m}(B) = 0$, vai ar nosacījumu, ka B ir sanumurējama kopa. Tiešām, ja nullfunkcijas $g = \mathbb{O}$ nogrieznī $[a;b]$ (kura, acīmredzot, ir integrējama Rīmaņa nozīmē funkcija šajā nogrieznī) vērtības izmainīt sanumurējamā un līdz ar to arī nulles mēra (Lebega nozīmē) apakškopā $B = [a;b] \cap \mathbb{Q}$ no 0 uz 1, tad iegūsim Dirihlē funkciju $f = \chi$ nogrieznī $[a;b]$, kura, kā jau tika pierādīts 3.1. piemērā, nav integrējama Rīmaņa nozīmē nogrieznī $[a;b]$.

Pēdējās īpašības speciālgadījums.

- *Ja integrējamas Rīmaņa nozīmē nogrieznī* $[a;b]$ *funkcijas* g *vērtības izmainīt galīgā punktu apakškopā* $B \subset [a;b]$ *tā, lai iegūtā funkcija* f *būtu ierobežota nogrieznī* $[a;b]$*, tad funkcija* f *arī ir integrējama Rīmaņa nozīmē nogrieznī* $[a;b]$ *un*
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

No iepriekš teiktā izriet, ka, izpildoties dažiem papildnosacījumiem, var definēt funkcijas Rīmaņa integrāli dotajā nogrieznī arī tad, ja funkcija ir definēta visur nogrieznī, izņemot šī nogriežņa nulles mēra (Žordāna nozīmē) apakškopu, piemēram, ja funkcija ir definēta visur nogrieznī, izņemot galīgu skaitu šī nogriežņa punktu. Apskatīsim ierobežotu funkciju $\varphi : [a;b] \setminus B \to \mathbb{R}$, kur B ir nogriežņa $[a;b]$ nulles mēra (Žordāna nozīmē) apakškopa. Konstruēsim funkciju $g : [a;b] \to \mathbb{R}$ šādi. Uzskatīsim, ka funkcijas g vērtības kopas $[a;b] \setminus B$ punktos ir vienādas ar attiecīgajām funkcijas φ vērtībām, bet kopas B punktos funkcijai g piešķirsim patvaļīgas reālas vērtības tā, lai funkcija g būtu ierobežota nogrieznī $[a;b]$. Ja funkcija g ir integrējama Rīmaņa nozīmē nogrieznī $[a;b]$, tad uzskata, ka funkcija φ arī ir integrējama Rīmaņa nozīmē nogrieznī $[a;b]$, bet tās Rīmaņa integrāli dotajā nogrieznī definē ar vienādību
$$\int_a^b \varphi(x)dx \overset{\text{def}}{=} \int_a^b g(x)dx. \tag{3.63}$$

Šī definīcija ir korekta, jo saskaņā ar šajā piezīmē formulētajām īpašībām ne funkcijas g integrējamība Rīmaņa nozīmē nogrieznī $[a;b]$, ne funkcijas g Rīmaņa integrāļa vērtība šajā nogrieznī, nav atkarīga no tā, kādas tieši vērtības tika piešķirtas funkcijai g kopas B punktos.

3.5. piemērs. Funkcija $\varphi(x) = \frac{\sin x}{x}$ nav definēta nogrieznī $[0;1]$, jo tā nav definēta punktā $x = 0$. Pie tam funkcija $\varphi(x)$ ir ierobežota[5] kopā $(0;1]$. Apskatīsim nogrieznī $[0;1]$ ierobežotu funkciju g, ka
$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{ja} \quad x \in (0;1], \\ c, & \text{ja} \quad x = 0, \end{cases}$$

kur c ir kāds reāls skaitlis. Funkcija g ir integrējama Rīmaņa nozīmē nogrieznī $[0;1]$, jo tās pārtraukuma punktu kopa ir galīga (funkcijai g nav pārtraukuma punktu, ja

[5] *Pierādīsim, ka funkcija* $\varphi(x) = \frac{\sin x}{x}$ *ir ierobežota kopā* $(0;1]$. Tā kā
$$\lim_{x \to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1,$$
tad funkcija $\varphi(x)$ ir ierobežota kādā punkta 0 labajā pusapkārtnē. Tāpēc var atrast tādu α, ka $0 < \alpha < 1$, un tādu $c_1 > 0$, ka
$$\forall x \in (0;\alpha) : \ \varphi(x) \le c_1.$$
Tā kā funkcija $\varphi(x)$ ir nepārtraukta nogrieznī $[\alpha;1]$, tad tā ir ierobežota šajā nogrieznī, t.i., eksistē $c_2 > 0$, ka
$$\forall x \in [\alpha;1] : \ \varphi(x) \le c_2.$$
Pieņemsim, ka $c = \max\{c_1; c_2\}$. Tad
$$\forall x \in (0;1] : \ \varphi(x) \le c,$$
t.i., funkcija $\varphi(x)$ ir ierobežota kopā $(0;1]$.

$c = 1$, un ir viens pārtraukuma punkts $x = 0$, ja $c \neq 1$), pie tam funkcijas g Rīmaņa integrālis

$$\int_0^1 g(x)dx = Si(1) \approx 0,946,$$

kur $Si : (0; +\infty) \to \mathbb{R}$ ir speciālā funkcija, kuru sauc par *integrālo sinusu*. Tāpēc funkciju φ arī uzskata par integrējamu Rīmaņa nozīmē funkciju nogrieznī $[0; 1]$, bet par tās Rīmaņa integrāļa šajā nogrieznī vērtību pieņem skaitli $Si(1) \approx 0,946$.

16° *Ja ierobežota funkcija $g : E \to \mathbb{R}$ gandrīz visur galīga mēra kopā E ir vienāda ar 0, tad funkcija g ir integrējama Lebega nozīmē kopā E un*

$$\int_E g(x)dx = 0.$$

► Saskaņā ar 3.5. piezīmi konstantā funkcija $\mathbb{O}$ ir integrējama Lebega nozīmē kopā E, pie tam

$$\int_E \mathbb{O}(x)dx = 0.$$

Tā kā funkcija g gandrīz visur kopā E ir vienāda ar 0, t.i., funkcijas g un $\mathbb{O}$ ir ekvivalentas kopā E, tad no Lebega integrāļa 15° īpašības seko, ka funkcija g ir integrējama Lebega nozīmē kopā E, pie tam

$$\int_E g(x)dx = \int_E \mathbb{O}(x)dx = 0. \blacktriangleleft$$

3.15. piezīme. 16° īpašības apgrieztais apgalvojums nav spēkā. Piemēram, funkcija f, ka

$$\forall x \in [0; 2] : \ f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ja} \quad x \in [0; 1), \\ -1, & \text{ja} \quad x \in [1; 2], \end{cases}$$

ir kāpņveida funkcija kopā $[0; 2]$, jo funkcija f ir konstanta mērojamās kopās $[0; 1)$ un $[1; 2]$, kuras savstarpēji nešķeļas un kuru apvienojums ir vienāds ar $[0; 2]$. No mērojamu funkciju 6° īpašības seko, ka funkcija f ir mērojama kopā $[0; 2]$. Tā kā funkcijas f pārtraukuma punktu kopa ir galīga (funkcijai f eksistē vienīgs pirmā veida pārtraukuma punkts $x = 1$), tad funkcija f ir integrējama Rīmaņa nozīmē nogrieznī $[0; 2]$, pie tam tās Rīmaņa integrālis

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = 1 - 1 = 0.$$

No 3.1. teorēmas seko, ka funkcija f ir integrējama arī Lebega nozīmē kopā $[0; 2]$, pie tam tās Lebega integrālis

$$\int_{[0;2]} f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx = 0.$$

Taču, acīmredzot, funkcija f nav vienāda ar nulli gandrīz visur kopā $[0; 2]$.

17° *Ja f ir nenegatīva ierobežota mērojama funkcija galīga mēra kopā E un*

$$\int_E f(x)dx = 0,$$

tad funkcija f ir vienāda ar nulli gandrīz visur kopā E.

► Tā kā funkcija f ir mērojama kopā E, tad kopa $E[f > a]$ ir mērojama jebkuram $a \in \mathbb{R}$. Pierādīsim, ka $\mathrm{m}\big(E[f > 0]\big) = 0$. Iepriekš tika pierādīts (skat. 2.1. paragrāfu), ka

$$E[f > 0] = \bigcup_{k=1}^{\infty} E\left[f \geq \frac{1}{k}\right].$$

Tāpēc no Lebega mēra sanumurējamās pusaditivitātes seko

$$\mathrm{m}\big(E[f > 0]\big) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}\left(E\left[f \geq \frac{1}{k}\right]\right).$$

No Čebišova nevienādības izriet, ka jebkuram $k \in \mathbb{N}$ ir spēkā

$$\mathrm{m}\left(E\left[f \geq \frac{1}{k}\right]\right) \leq k \int_E f(x)dx = 0,$$

no kurienes seko

$$\mathrm{m}\left(E\left[f \geq \frac{1}{k}\right]\right) = 0 \quad (k \in \mathbb{N}),$$

jo Lebega mērs ir nenegatīvs. Tātad

$$\mathrm{m}\big(E[f > 0]\big) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}\left(E\left[f \geq \frac{1}{k}\right]\right) = \sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0,$$

t.i., $\mathrm{m}\big(E[f > 0]\big) = 0$. Tā kā funkcija f ir nenegatīva, tad funkcija f ir vienāda ar nulli gandrīz visur kopā E.◄

18° *Galīga mēra kopā E nenegatīvas ierobežotas mērojamas funkcijas f Lebega integrālis ir vienāds ar 0 tad un tikai tad, kad funkcija f ir vienāda ar nulli gandrīz visur kopā E (t.i., funkcija f ir ekvivalenta nullfunkcijai $\mathbb{O}$ kopā E).*

► Īpašības patiesums seko no Lebega integrāļa 16° un 17° īpašības.◄

19° *Pieņemsim, ka E ir galīga mēra kopa, pie tam $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, kur $(E_k)_{k=1}^{\infty}$ ir kopas E mērojamu apakškopu augoša virkne:*

$$E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_k \subset E_{k+1} \subset \cdots.$$

Ja funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā E, tad funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā E_k $(k \in \mathbb{N})$, pie tam

$$\int_E f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f(x)dx. \tag{3.64}$$

▶ Tā kā funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā E, tad no Lebega integrāļa 9° īpašības izriet, ka funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā E_k ($k \in \mathbb{N}$). Pierādīsim vienādību (3.64). Apskatīsim kopas

$$A_1 = E_1,\ A_2 = E_2 \setminus E_1,\ \dots\ A_k = E_k \setminus E_{k-1}\ (k \geq 2),\ \dots\ . \tag{3.65}$$

Saskaņā ar 1.5. paragrāfā pierādīto 1. lemmu

$$A_n \cap A_m = \emptyset\ \ (n \neq m;\ n, m \in \mathbb{N}); \tag{3.66a}$$

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k; \tag{3.66b}$$

$$E_k = \bigcup_{j=1}^{k} A_j\ \ (k \in \mathbb{N}). \tag{3.66c}$$

No Lebega integrāļa sanumurējamās aditivitātes, ņemot vērā (3.66a) un (3.66b), iegūsim

$$\int\limits_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_k} f(x)dx. \tag{3.67}$$

Ņemot vērā rindas summas definīciju, atrodam

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \int\limits_{A_j} f(x)dx. \tag{3.68}$$

No Lebega integrāļa sanumurējamās aditivitātes, ņemot vērā (3.66a) un (3.66c), iegūsim

$$\sum_{j=1}^{k} \int\limits_{A_j} f(x)dx = \int\limits_{E_k} f(x)dx\ \ (k = 1, 2, \dots). \tag{3.69}$$

No (3.67), (3.68) un (3.69) izriet (3.64).◀

3.7. Robežpāreja zem Lebega integrāļa zīmes

3.11. definīcija. Pieņemsim, ka galīga mēra kopā E ierobežotu mērojamu funkciju virkne (f_n) kopā E konverģē kaut kādā nozīmē[6] uz ierobežotu mērojamu funkciju f kopā E. Saka, ka **virkne** (f_n) **pieļauj kopā** E **robežpāreju zem Lebega integrāļa zīmes**, ja ir spēkā sakarība

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x)dx = \int\limits_E f(x)dx.$$

3.16. piezīme. Atzīmēsim, ka visi šajā sakarībā ietilpstošie integrāļi eksistē saskaņā ar 3.2. teorēmu. Iepriekš minēto sakarību var pierakstīt arī šādi:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x)dx = \int\limits_E \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx,$$

[6] Pēc mēra, gandrīz visur dotajā kopā utt. (skat. 2.6.1. apakšparagrāfu).

kur $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ ir dotās virknes (f_n) robeža apskatāmās konverģences nozīmē, bet $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x)dx$ ir skaitļu virknes $\left(\int\limits_E f_n(x)dx\right)$ robeža. Jautājums: *kādiem nosacījumiem ir jāizpildās, lai virkne (f_n) pieļautu kopā E robežpāreju zem Lebega integrāļa zīmes, citiem vārdiem sakot, kādiem nosacījumiem ir jāizpildās, lai robežpārejas operāciju varētu mainīt vietām ar integrēšanas Lebega nozīmē operāciju?* Nākamais piemērs parāda, ka funkciju virknes (f_n) punktveida konverģence uz funkciju f dotajā kopā nav pietiekama, lai virkne (f_n) pieļautu robežpāreju zem Lebega integrāļa zīmes apskatāmajā kopā.

3.6. piemērs. Apskatīsim kopā $E = (0;1)$ ierobežotu mērojamu funkciju virkni (f_n), ka

$$\forall x \in E: \ f_n(x) = \begin{cases} n, & \text{ja} \quad x \in \left(0; \frac{1}{n}\right), \\ 0, & \text{ja} \quad x \in \left[\frac{1}{n}; 1\right), \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Patvaļīgam $x \in (0;1)$ atradīsim vismazāko $n_0 \in \mathbb{N}$, ka $\frac{1}{n_0} \le x$. Tad jebkuram $n \in \mathbb{N}$, ka $n \ge n_0$, ir spēkā $f_n(x) = 0$. Tātad

$$\forall x \in (0;1): \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0,$$

t.i., $(f_n) \xrightarrow{(0;1)} f$, kur $f = \mathbb{O}$ ir nullfunkcija kopā $(0;1)$. No vienas puses,

$$\int\limits_E f(x)dx = 0.$$

No otras puses, tā kā

$$\int\limits_E f_n(x)dx = \int\limits_{\left(0;\frac{1}{n}\right)} n\,dx + \int\limits_{\left[\frac{1}{n};1\right)} 0\,dx = n \cdot \mathrm{m}\left(\left(0; \frac{1}{n}\right)\right) + 0 = n \cdot \frac{1}{n} = 1,$$

tad

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x)dx = 1.$$

Tātad virkne (f_n) *nepieļauj* robežpāreju zem Lebega integrāļa zīmes, kaut arī tā konverģē uz nullfunkciju $\mathbb{O}$ kopā $(0;1)$ un līdz ar to saskaņā ar 2.9. teorēmu konverģē arī pēc mēra kopā $(0;1)$ uz nullfunkciju $\mathbb{O}$.

Nākamā teorēma, kuru ir pierādījis A. Lebegs, sniedz pietiekamos nosacījumus, lai konverģenta pēc mēra funkciju virkne pieļautu robežpāreju zem Lebega integrāļa zīmes.

3.4. teorēma. *Pieņemsim, ka galīga mēra kopā E ierobežotu mērojamu funkciju virkne (f_n)* ***konverģē pēc mēra kopā*** *E uz ierobežotu mērojamu funkciju f, pie tam virkne (f_n) ir gandrīz visur kopā E vienmērīgi ierobežota ar konstanti $K > 0$, t.i., gandrīz visiem $x \in E$ un katram $n \in \mathbb{N}$ ir patiesa nevienādība*

$$\left|f_n(x)\right| \le K. \tag{3.70}$$

Tad

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x)dx = \int\limits_E f(x)dx. \tag{3.71}$$

► a) *Pieņemsim, ka nevienādība (3.70) izpildās visiem $x \in E$ un katram $n \in \mathbb{N}$.* Tā kā funkcija f ir ierobežota kopā E, tad visiem $x \in E$ ir spēkā $\big|f(x)\big| \le K_1$, kur $K_1 > 0$. Nepieciešamības gadījumā palielinot konstanti K vai K_1, var uzskatīt, ka visiem $x \in E$ ir spēkā

$$\big|f(x)\big| \le K. \tag{3.72}$$

Ja $\mathrm{m}(E) = 0$, tad no 3.4. piezīmes seko, ka

$$\int\limits_E f_n(x)dx = 0 \ (n \in \mathbb{N}) \ \text{ un } \ \int\limits_E f(x)dx = 0.$$

Tāpēc, ja $\mathrm{m}(E) = 0$, tad vienādība (3.71) ir patiesa.

Pieņemsim, ka $0 < \mathrm{m}(E) < +\infty$. Fiksēsim $\varepsilon > 0$ un atradīsim tādu $\sigma > 0$, ka

$$\sigma < \frac{\varepsilon}{2 \cdot \mathrm{m}(E)}\,. \tag{3.73}$$

Apskatīsim kopu

$$E_n(\sigma) = E\big[|f_n - f| \ge \sigma\big] \ \ (n \in \mathbb{N}).$$

Atgādināsim (skat. 2.7. piezīmi), ka $E_n(\sigma)$ ir mērojama kopa jebkuram $n \in \mathbb{N}$ un patvaļīgam $\sigma > 0$. Tā kā $(f_n) \overset{E}{\Rightarrow} f$, tad saskaņā ar konverģences pēc mēra definīciju

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{m}\big(E_n(\sigma)\big) = 0.$$

Tāpēc dotajam $\varepsilon > 0$ eksistē $n_0 \in \mathbb{N}$, ka visiem numuriem $n \ge n_0$ ir patiesa nevienādība

$$\mathrm{m}\big(E_n(\sigma)\big) < \frac{\varepsilon}{4 \cdot K}\,. \tag{3.74}$$

Atrodam

$$\left|\int\limits_E f_n(x)dx - \int\limits_E f(x)dx\right| \overset{3^\circ}{=} \left|\int\limits_E \big(f_n(x) - f(x)\big)dx\right| \overset{8^\circ}{\le} \int\limits_E \big|f_n(x) - f(x)\big|dx. \tag{3.75}$$

Iepriekš jau tika atzīmēts, ka funkcija $\big|f_n - f\big|$ ir mērojama kopā E. Bez tam šī funkcija ir ierobežota kopā E, jo jebkuram $x \in E$ ir spēkā

$$\big|f_n(x) - f(x)\big| \le \big|f_n(x)\big| + \big|f(x)\big| \le K + K = 2K. \tag{3.76}$$

Tātad funkcija $\big|f_n - f\big|$ ir integrējama Lebega nozīmē kopā E. Kopa $E \setminus E_n(\sigma)$ ir mērojama kā divu mērojamu kopu starpība, pie tam

$$\big(E \setminus E_n(\sigma)\big) \cup E_n(\sigma) = E, \ \big(E \setminus E_n(\sigma)\big) \cap E_n(\sigma) = \emptyset.$$

Saskaņā ar Lebega integrāļa sanumurējamo aditivitāti

$$\int\limits_E \big|f_n(x) - f(x)\big|dx = \int\limits_{E_n(\sigma)} \big|f_n(x) - f(x)\big|dx + \int\limits_{E\setminus E_n(\sigma)} \big|f_n(x) - f(x)\big|dx. \tag{3.77}$$

No (3.75) un (3.77) izriet

$$\left|\int\limits_E f_n(x)dx - \int\limits_E f(x)dx\right| \le \int\limits_{E_n(\sigma)} \big|f_n(x) - f(x)\big|dx + \int\limits_{E\setminus E_n(\sigma)} \big|f_n(x) - f(x)\big|dx. \tag{3.78}$$

No Lebega integrāļa 9° īpašības, ņemot vērā (3.74) un (3.76), iegūsim

$$\int\limits_{E_n(\sigma)} \big|f_n(x) - f(x)\big| dx \le 2K \cdot \mathrm{m}\big(E_n(\sigma)\big) < 2K \cdot \frac{\varepsilon}{4K} = \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

t.i.,

$$\int\limits_{E_n(\sigma)} \big|f_n(x) - f(x)\big| dx < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{3.79}$$

Atzīmēsim, ka

$$E \setminus E_n(\sigma) = E\big[|f_n - f| < \sigma\big] \ (n \in \mathbb{N}),$$

t.i., jebkuram $x \in E \setminus E_n(\sigma)$ ir patiesa nevienādība

$$\big|f_n(x) - f(x)\big| < \sigma \ (n \in \mathbb{N}). \tag{3.80}$$

No Lebega integrāļa 7° īpašības, ņemot vērā (3.73) un (3.80), iegūsim

$$\int\limits_{E\setminus E_n(\sigma)} \big|f_n(x) - f(x)\big| dx \le \sigma \cdot \mathrm{m}\big(E \setminus E_n(\sigma)\big) \le \sigma \cdot \mathrm{m}(E) < \frac{\varepsilon}{2 \cdot \mathrm{m}(E)} \cdot \mathrm{m}(E) = \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

t.i.,

$$\int\limits_{E\setminus E_n(\sigma)} \big|f_n(x) - f(x)\big| dx < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{3.81}$$

No (3.77), (3.78) un (3.80) atrodam

$$\left|\int\limits_E f_n(x)dx - \int\limits_E f(x)dx\right| \le \int\limits_{E_n(\sigma)} \big|f_n(x) - f(x)\big| dx + \\ + \int\limits_{E\setminus E_n(\sigma)} \big|f_n(x) - f(x)\big| dx < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,$$

t.i.,

$$\left|\int\limits_E f_n(x)dx - \int\limits_E f(x)dx\right| < \varepsilon. \tag{3.82}$$

Tādējādi jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē $n_0 \in \mathbb{N}$, ka visiem numuriem $n \ge n_0$ ir patiesa nevienādība (3.82). Tas nozīmē, ka virkne $\left(\int\limits_E f_n(x)dx\right)$ konverģē uz skaitli $\int\limits_E f(x)dx$, t.i., izpildās (3.71).

b) *Pieņemsim, ka nevienādība (3.70) izpildās gandrīz visiem $x \in E$ un katram $n \in \mathbb{N}$.* Ar E_0 apzīmēsim kopas E visu to punktu kopu, kuros nevienādība (3.70) nav patiesa, t.i.,

$$E_0 = \big\{x \in E : \exists n \in \mathbb{N},\ \text{ka } \big|f_n(x)\big| > K\big\}.$$

Saskaņā ar doto E_0 ir nulles mēra kopa, t.i., $\mathrm{m}(E_0) = 0$. Apskatīsim kopu

$$E_1 = E \setminus E_0 = \big\{x \in E : \forall n \in \mathbb{N} \text{ ir spēkā } \big|f_n(x)\big| \le K\big\}.$$

Kopa $E_1 = E \setminus E_0$ ir mērojama kā divu mērojamu kopu starpība. Var redzēt, ka f_n $(n \in \mathbb{N})$ un f ir ierobežotas mērojamas funkcijas kopā E_1, jo tās ir ierobežotas mērojamas funkcijas kopā $E \supset E_1$. Pierādīsim, ka $(f_n) \overset{E_1}{\Rightarrow} f$. Apskatīsim kopas

$$E_n(\sigma) = E\big[|f_n - f| \geq \sigma\big] \quad \text{un} \quad E_{1n}(\sigma) = E_1\big[|f_n - f| \geq \sigma\big].$$

Tā kā $(f_n) \overset{E}{\Rightarrow} f$, tad no konverģences pēc mēra definīcijas izriet, ka jebkuram $\sigma > 0$ izpildās $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{m}\big(E_n(\sigma)\big) = 0$. Atzīmēsim, ka jebkuram $\sigma > 0$ un katram $n \in \mathbb{N}$ ir spēkā $E_{1n}(\sigma) \subset E_n(\sigma)$, jo $E_1 \subset E$. Ņemot vērā Lebega mēra nenegativitāti un monotonitāti, atrodam, ka jebkuram $\sigma > 0$ un katram $n \in \mathbb{N}$ izpildās $0 \leq \mathrm{m}\big(E_{1n}(\sigma)\big) \leq \mathrm{m}\big(E_n(\sigma)\big)$. No teorēmas par robežpāreju skaitliskās nevienādībās izriet, ka jebkuram $\sigma > 0$ izpildās $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{m}\big(E_{1n}(\sigma)\big) = 0$. No konverģences pēc mēra definīcijas izriet, ka $(f_n) \overset{E_1}{\Rightarrow} f$. Tātad kopā E_1 ir spēkā visi a) punkta nosacījumi. Tāpēc

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{E_1} f_n(x)dx = \int\limits_{E_1} f(x)dx. \tag{3.83}$$

Tā kā $\mathrm{m}(E_0) = 0$, bet funkcijas f_n $(n \in \mathbb{N})$ un f ir ierobežotas kopā E_0 (jo tās ir ierobežotas kopā $E \supset E_0$), tad no 3.4. piezīmes izriet, ka funkcijas f_n $(n \in \mathbb{N})$ un f ir integrējamas Lebega nozīmē kopā E_0, pie tam

$$\int\limits_{E_0} f_n(x)dx = 0 \ (n \in \mathbb{N}), \quad \int\limits_{E_0} f(x)dx = 0.$$

Acīmredzot,

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{E_0} f_n(x)dx = \int\limits_{E_0} f(x)dx. \tag{3.84}$$

Tā kā konverģentu skaitļu virkņu summa ir konverģenta virkne, pie tam summas robeža ir vienāda ar doto virkņu robežu summu, tad no (3.83) un (3.84) seko

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int\limits_{E_1} f_n(x)dx + \int\limits_{E_0} f_n(x)dx \right) = \int\limits_{E_1} f(x)dx + \int\limits_{E_0} f(x)dx. \tag{3.85}$$

No Lebega integrāļa sanumurējamās aditivitātes izriet

$$\int\limits_{E_1} f_n(x)dx + \int\limits_{E_0} f_n(x)dx = \int\limits_{E=E_0\cup E_1} f_n(x)dx, \tag{3.86}$$

$$\int\limits_{E_1} f(x)dx + \int\limits_{E_0} f(x)dx = \int\limits_{E=E_0\cup E_1} f(x)dx. \tag{3.87}$$

No (3.85), (3.86) un (3.87) iegūsim

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{E} f_n(x)dx = \int\limits_{E} f(x)dx,$$

t.i., izpildās (3.71). Teorēma ir pierādīta.◀

1. sekas. *Pieņemsim, ka galīga mēra kopā E ierobežotu mērojamu funkciju virkne (f_n)* ***gandrīz visur kopā*** *E* ***konverģē*** *uz ierobežotu funkciju f, pie tam virkne (f_n) ir gandrīz visur kopā E vienmērīgi ierobežota ar konstanti $K > 0$, t.i., gandrīz visiem $x \in E$ un katram $n \in \mathbb{N}$ ir patiesa nevienādība $\left|f_n(x)\right| \leq K$. Tad funkcija f ir mērojama kopā E un ir patiesa vienādība*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x)dx = \int\limits_E f(x)dx. \tag{3.88}$$

► Tā kā funkcijas f_n $(n \in \mathbb{N})$ ir mērojamas kopā E un $(f_n) \xrightarrow[\text{g.v.}]{E} f$, tad no 2.8. teorēmas seko, ka funkcija f ir mērojama kopā E. Savukārt, tā kā $(f_n) \xrightarrow[\text{g.v.}]{E} f$ un $\mathrm{m}(E) < +\infty$, tad no 2.9. teorēmas izriet, ka $(f_n) \overset{E}{\Rightarrow} f$. No pierādītās teorēmas seko, ka ir spēkā vienādība (3.88).◄

2. sekas. *Pieņemsim, ka galīga mēra kopā E ierobežotu mērojamu funkciju virkne (f_n)* ***konverģē kopā*** *E uz funkciju f, pie tam virkne (f_n) kopā E ir vienmērīgi ierobežota ar konstanti $K > 0$, t.i., visiem $x \in E$ un katram $n \in \mathbb{N}$ ir patiesa nevienādība $\left|f_n(x)\right| \leq K$. Tad f ir ierobežota mērojama funkcija kopā E un ir patiesa vienādība*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x)dx = \int\limits_E f(x)dx. \tag{3.89}$$

► Ņemot vērā 1. sekas, ir pietiekami pierādīt, ka funkcija f ir ierobežota kopā E. Tā kā $x \in E$ un katram $n \in \mathbb{N}$ ir spēkā $\left|f_n(x)\right| \leq K$ jeb $-K \leq f_n(x) \leq K$, pie tam $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ jebkuram $x \in E$, tad no teorēmas par robežpāreju nevienādībās izriet, ka jebkuram $x \in E$ izpildās $-K \leq \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \leq K$ jeb $-K \leq f(x) \leq K$ jeb $\left|f(x)\right| \leq K$, t.i., funkcija f ir ierobežota kopā E.◄

3.17. piezīme.

- 3.6. piemērā apskatītā funkciju virkne (f_n) sastāv no ierobežotām mērojamām funkcijām kopā $E = (0; 1)$, virkne (f_n) konverģē uz nullfunkciju kopā E (tāpēc šī virkne konverģē uz nullfunkciju gandrīz visur un pēc mēra dotajā kopā), taču šī virkne nav gandrīz visur kopā E vienmērīgi ierobežota ne ar vienu konstanti $K > 0$ un līdz ar to neizpildās 3.4. teorēmas nosacījumi un šīs teorēmas 1. un 2. seku nosacījumi. Kā jau tika atzīmēts 3.6. piemērā, tad virkne (f_n) nepieļauj kopā E robežpāreju zem Lebega integrāļa zīmes, t.i., vienādības (3.71), (3.88) un (3.89) arī nav spēkā.

- Savukārt 10. uzdevumā (skat. šīs nodaļas beigas) apskatīto funkciju virkni (f_n) veido ierobežotas mērojamas funkcijas kopā $E = [a; b]$, kur $a, b \in \mathbb{R}$ un $a < b$, virkne (f_n) konverģē pēc mēra uz nullfunkciju kopā E, virkne (f_n) nav gandrīz visur kopā E vienmērīgi ierobežota ne ar vienu konstanti $K > 0$, tātad 3.4. teorēmas nosacījumi neizpildās, taču vienādība (3.71) ir spēkā. *Tādējādi 3.4. teorēmas nosacījumi ir pietiekami, bet nav nepieciešami, lai virkne (f_n) pieļautu kopā E robežpāreju zem Lebega integrāļa zīmes.*

Pierādīsim vairākas lemmas, kuras izmantosim nākamo seku pierādījumā.

2. lemma. *Ja funkcijas f_n $(n \in \mathbb{N})$ ir ierobežotas kopā E un $(f_n) \overset{E}{\rightrightarrows} f$, tad funkcija f arī ir ierobežota kopā E.*

► Tā kā $(f_n) \overset{E}{\rightrightarrows} f$, tad

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall x \in E : \left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon.$$

Fiksēsim kādu $\varepsilon > 0$ un kādu tam atbilstošo $n_0 \in \mathbb{N}$. Tad

$$\forall x \in E : \left|f_{n_0}(x) - f(x)\right| < \varepsilon$$

jeb

$$\forall x \in E : f_{n_0}(x) - \varepsilon < f(x) < f_{n_0}(x) + \varepsilon. \tag{3.90}$$

Tā kā funkcija f_{n_0} ir ierobežota kopā E, tad eksistē tāds $K > 0$, ka

$$\forall x \in E : \left|f_{n_0}(x)\right| < K$$

jeb

$$\forall x \in E : -K \leq f_{n_0}(x) \leq K. \tag{3.91}$$

No (3.90) un (3.91) seko

$$\forall x \in E : -K - \varepsilon < f(x) < K + \varepsilon \ \text{ jeb } \ \forall x \in E : \left|f(x)\right| < K + \varepsilon.$$

Tātad funkcija f ir ierobežota kopā E.◄

3. lemma. *Pieņemsim, ka funkcijas f_n $(n \in \mathbb{N})$ ir ierobežotas kopā E. Tad ir spēkā ekvivalence $\left((f_n) \overset{E}{\rightrightarrows} f\right) \Leftrightarrow \left(\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 0\right)$, kur $M_n = \sup\limits_E \left|f_n - f\right|$ $(n \in \mathbb{N})$.*

► *Nepieciešamība.* No 2. lemmas seko, ka funkcija f ir ierobežota kopā E. Tā kā funkcijas f_n $(n \in \mathbb{N})$ ir ierobežotas kopā E, tad arī funkcijas $|f_n - f|$ $(n \in \mathbb{N})$ ir ierobežotas kopā E. Tāpēc kopā E funkcijai $|f_n - f|$, kur $n \in \mathbb{N}$, eksistē suprēms M_n. Tā kā $(f_n) \overset{E}{\rightrightarrows} f$, tad

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall x \in E : \left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon.$$

Tāpēc

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : M_n < \varepsilon, \tag{3.92}$$

jo ε ir kopas

$$\left\{\left|f_n(x) - f(x)\right| : x \in E\right\} \ \ (n \in \mathbb{N};\ n \geq n_0)$$

mažorante, bet M_n, būdams šīs kopas suprēms, ir vismazākā šīs kopas mažorante. No (3.92) izriet, ka $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 0$.

Pietiekamība pierāda, veicot iepriekš minētos spriedumus apgrieztā secībā.◄

4. lemma. *Ja funkcijas f_n $(n \in \mathbb{N})$ ir ierobežotas kopā E un $(f_n) \overset{E}{\rightrightarrows} f$, tad funkciju virkne (f_n) ir vienmērīgi ierobežota kopā E.*

▶ No 2. lemmas seko, ka funkcija f ir ierobežota kopā E, t.i., eksistē tāda konstante $K > 0$, ka

$$\forall \varepsilon > 0 : \left|f(x)\right| \leq K. \tag{3.93}$$

Tā kā $(f_n) \overset{E}{\rightrightarrows} f$, tad no 3. lemmas izriet, ka $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 0$, kur $M_n = \sup\limits_{E} \left|f_n - f\right|$ $(n \in \mathbb{N})$. Tā kā virkne (M_n) ir konverģenta, tad tā ir ierobežota, t.i., eksistē tāds $\alpha > 0$, ka

$$\forall n \in \mathbb{N} : M_n \leq \alpha. \tag{3.94}$$

Tā kā M_n ir kopas $\left\{\left|f_n(x) - f(x)\right| : x \in E\right\}$ $(n \in \mathbb{N})$ suprēms, tad M_n ir šīs kopas mažorante, t.i.,

$$\forall n \in \mathbb{N}\, \forall x \in E : \left|f_n(x) - f(x)\right| \leq M_n. \tag{3.95}$$

Atzīmēsim, ka

$$\forall n \in \mathbb{N}\, \forall x \in E : \left|f_n(x)\right| = \Big|f(x) + \big(f_n(x) - f(x)\big)\Big| \leq \left|f(x)\right| + \left|f_n(x) - f(x)\right|. \tag{3.96}$$

No (3.93), (3.94), (3.95) un (3.96) seko

$$\forall n \in \mathbb{N}\, \forall x \in E : \left|f_n(x)\right| \leq K + M_n \leq K + \alpha,$$

t.i., funkciju virkne (f_n) ir vienmērīgi ierobežota kopā E ar konstanti $K + \alpha$.◀

3. sekas. *Pieņemsim, ka galīga mēra kopā E ierobežotu mērojamu funkciju virkne (f_n)* ***vienmērīgi konverģē kopā*** *E uz funkciju f. Tad*

1. *f ir ierobežota mērojama funkcija kopā E;*
2. *funkciju virkne (f_n) ir vienmērīgi ierobežota kopā E, t.i., eksistē $K > 0$, ka visiem $x \in E$ un katram $n \in \mathbb{N}$ ir patiesa nevienādība $\left|f_n(x)\right| \leq K$;*
3. *ir patiesa vienādība*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x)dx = \int\limits_E f(x)dx. \tag{3.97}$$

▶ 1. Tā kā funkcijas f_n $(n \in \mathbb{N})$ ir mērojamas kopā E un $(f_n) \overset{E}{\rightrightarrows} f$, tad funkcija f arī ir mērojama kopā E. Funkcijas f ierobežotība kopā E izriet no 2. lemmas.

2. No 4. lemmas seko, ka funkciju virkne (f_n) ir vienmērīgi ierobežota kopā E.

3. Tā kā no $(f_n) \overset{E}{\rightrightarrows} f$ izriet, ka $(f_n) \overset{E}{\Rightarrow} f$ (skat. 2.11. teorēmu), tad saskaņā ar pēdējo teorēmu ir spēkā vienādība (3.97).◀

4. sekas. **[Teorēma par robežpāreju zem Rīmaņa integrāļa zīmes]** *Ja nogrieznī $[a; b]$ integrējamu Rīmaņa nozīmē funkciju virkne (f_n) vienmērīgi konverģē uz funkciju f šajā nogrieznī, tad funkcija f ir integrējama Rīmaņa nozīmē nogrieznī $[a; b]$, pie tam*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx. \tag{3.98}$$

► Tā kā funkcijas f_n $(n \in \mathbb{N})$ ir integrējamas Rīmaņa nozīmē nogriezni $[a;b]$, tad tās ir ierobežotas nogriezni $[a;b]$, bet no 3.1. teorēmas izriet, ka šīs funkcijas ir integrējamas Lebega nozīmē kopā $[a;b]$, pie tam

$$\int\limits_{[a;b]} f_n(x)dx = \int\limits_a^b f_n(x)dx \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{3.99}$$

Saskaņā ar 3.3. teorēmu funkcijas f_n $(n \in \mathbb{N})$ ir mērojamas kopā $[a;b]$. Tā kā funkcija f_n, kur $n \in \mathbb{N}$, ir integrējama Rīmaņa nozīmē nogriezni $[a;b]$, tad no 3.6. teorēmas (skat. nākamo paragrāfu) seko, ka funkcijas f_n visu pārtraukuma punktu nogriezni $[a;b]$ kopa P_n ir nulles mēra kopa. Kopa $P = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n$, kura ir funkciju f_n $(n \in \mathbb{N})$ visu pārtraukuma punktu nogriezni $[a;b]$ kopa, ir nulles mēra kopa kā nulles mēra kopu P_n $(n \in \mathbb{N})$ sanumurējams apvienojums. Kopas $E \setminus P = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (E \setminus P_n)$ punktos funkcijas f_n $(n \in \mathbb{N})$ ir nepārtrauktas. Tā kā $(f_n) \overset{E}{\rightrightarrows} f$, tad funkcija f arī ir nepārtraukta kopas $E \setminus P$ punktos. Ņemot vērā, ka P ir nulles mēra kopa, no 3.6. teorēmas izriet, ka funkcija f ir integrējama Rīmaņa nozīmē nogriezni $[a;b]$. Saskaņā ar 3.1. teorēmu funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā $[a;b]$, pie tam

$$\int\limits_{[a;b]} f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx. \tag{3.100}$$

Tātad izpildās visi 3. seku nosacījumi. Tāpēc no (3.97), ņemot vērā (3.99) un (3.100), izriet (3.98).◄

3.18. piezīme. Atzīmēsim, ka pēdējās sekās formulēto apgalvojumu var pierādīt (skat., piemēram, [38, 373.-375. lpp.]), neizmantojot 3. sekas un integrējamības Rīmaņa nozīmē kritēriju (3.6. teorēmu), bet izmantojot tikai klasiskās matemātiskās analīzes metodes un faktus, piemēram, integrējamības Rīmaņa nozīmē 3° (vai 6°) kritēriju (skat. 3.1. paragrāfu). Iepriekš apskatītais 4. seku pierādījums ilustrē Lebega mēra un integrāļa teorijas lietojumus klasiskajā matemātiskajā analīzē.

3.19. piezīme. 3.4. teorēma būs spēkā arī tad, ja nepieprasīt funkciju f_n $(n \in \mathbb{N})$ un f ierobežotību kopā E, jo no funkciju virknes (f_n) vienmērīgās ierobežotības kopā E un 2.12. teorēmas (- Risa teorēmas) izriet funkciju f_n $(n \in \mathbb{N})$ un f ierobežotība gandrīz visur kopā E. Tāpēc, aizvietojot funkcijas f_n $(n \in \mathbb{N})$ un f ar ekvivalentām ierobežotām mērojamām funkcijām kopā E attiecīgi $\widetilde{f}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ un $\widetilde{f}$ (kurām, acīmredzot, izpildās visi 3.4. teorēmas nosacījumi un līdz ar to vienādība (3.71)) un, ņemot vērā 3.13. piezīmes b) punktā apskatīto Lebega integrāļa vispārinājumu, var secināt, ka funkcijām f_n $(n \in \mathbb{N})$ un f ir spēkā vienādība (3.71):

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_E \widetilde{f}_n(x)dx = \int\limits_E \widetilde{f}(x)dx = \int\limits_E f(x)dx.$$

3.8. Integrējamības Rīmaņa nozīmē Lebega kritērijs

Lebega kritērijs funkcijas integrējamību Rīmaņa nozīmē raksturo iekšēji, t.i., neizmantojot sadalījuma jēdzienu, bet gan funkcijas pārtraukuma punktu kopu. Lai pierādītu Lebega kritēriju, vispirms ir jāiepazīstas ar funkcijas apakšējās un augšējās Bēra[7] funkcijas jēdzienu.

3.8.1. Funkcijas nepārtrauktības punktā Bēra definīcija

Apskatīsim patvaļīgu netukšu kopu $E \subset \mathbb{R}$.

3.12. definīcija. [**Funkcijas nepārtauktības punktā Košī[8] definīcija**] Funkciju $f : E \to \mathbb{R}$ sauc par **nepārtrauktu punktā** $x_0 \in E$, ja jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds $\delta > 0$, ka visiem $x \in E_\delta(x_0) = E \cap (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ ir patiesa nevienādība $\big|f(x) - f(x_0)\big| < \varepsilon$.

3.13. definīcija. [**Funkcijas nepārtauktības punktā Heines definīcija**] Funkciju $f : E \to \mathbb{R}$ sauc par **nepārtrauktu punktā** $x_0 \in E$, ja jebkurai kopas E punktu virknei (x_n), kas konverģē uz x_0, attiecīgo funkcijas vērtību virkne $\big(f(x_n)\big)$ konverģē uz $f(x_0)$.

Matemātiskās analīzes kursā pierāda, ka abas šīs definīcijas ir ekvivalentas (skat., piemēram, [21], [36]). Šajā apakšparagrāfā apskatīsim funkcijas nepārtauktības punktā Bēra definīciju un pierādīsim, ka tā ir ekvivalenta Košī un Heines definīcijai.

Pieņemsim, ka $x_0 \in E$. Katram $\delta > 0$ definēsim:

$$b_\delta(x_0) \overset{\text{def}}{=} \inf_{E_\delta(x_0)} f, \quad B_\delta(x_0) \overset{\text{def}}{=} \sup_{E_\delta(x_0)} f.$$

1° *$b_\delta(x_0)$ ir mainīgā $\delta > 0$ dilstoša funkcija, t.i., jebkuriem $\delta_1, \delta_2 > 0$, ka $\delta_1 \le \delta_2$, ir spēkā $b_{\delta_1}(x_0) \ge b_{\delta_2}(x_0)$.*

► Ja $\delta_1 \le \delta_2$, tad $E_{\delta_1}(x_0) \subset E_{\delta_2}(x_0)$, no kurienes izriet

$$f\big(E_{\delta_1}(x_0)\big) = f\big(E \cap (x_0 - \delta_1; x_0 + \delta_1)\big) \subset f\big(E \cap (x_0 - \delta_2; x_0 + \delta_2)\big) = f\big(E_{\delta_2}(x_0)\big).$$

Tātad

$$b_{\delta_1}(x_0) = \inf_{E_{\delta_1}(x_0)} f = \inf f\big(E_{\delta_1}(x_0)\big) \ge \inf f\big(E_{\delta_2}(x_0)\big) = \inf_{E_{\delta_2}(x_0)} f = b_{\delta_2}(x_0). \blacktriangleleft$$

2° *$B_\delta(x_0)$ ir mainīgā $\delta > 0$ augoša funkcija, t.i., jebkuriem $\delta_1, \delta_2 > 0$, ka $\delta_1 \le \delta_2$, ir spēkā $B_{\delta_1}(x_0) \le B_{\delta_2}(x_0)$.*

► Pierāda analoģiski kā iepriekšējo īpašību.◄

3° *Jebkuram $\delta > 0$ ir spēkā $b_\delta(x_0) \le f(x_0) \le B_\delta(x_0)$.*

[7] R. Bērs (*René-Louis Baire*, 1874-1935) - franču matemātiķis.
[8] O. Košī (*Augustin Louis Cauchy*, 1789-1857) - franču matemātiķis.

► Tā kā kopas infīms (suprēms) ir šīs kopas minorante (attiecīgi mažorante), bet $f(x_0) \in f\big(E_\delta(x_0)\big)$, tad

$$b_\delta(x_0) = \inf f\big(E_\delta(x_0)\big) \le f(x_0) \le \sup f\big(E_\delta(x_0)\big) = B_\delta(x_0). \blacktriangleleft$$

Patvaļīgam $x_0 \in E$ definēsim:

$$b(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\delta>0} b_\delta(x_0), \quad B(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\delta>0} B_\delta(x_0).$$

4° *Jebkuriem* $\delta_1, \delta_2 > 0$ *ir spēkā*

$$b_{\delta_1}(x_0) \le b(x_0) \le f(x_0) \le B(x_0) \le B_{\delta_2}(x_0). \tag{3.101}$$

► Secīgi pierādīsim četras nevienādības.

1. Tā kā $b(x_0)$ ir kopas $\big\{b_\delta(x_0) : \delta > 0\big\}$ suprēms, tad $b(x_0)$ ir kopas $\big\{b_\delta(x_0) : \delta > 0\big\}$ mažorante, t.i., $b_{\delta_1}(x_0) \le b(x_0)$ jebkuram $\delta_1 > 0$.

2. 3° īpašībā tika pierādīts, ka $b_\delta(x_0) \le f(x_0)$ jebkuram $\delta > 0$, t.i., $f(x_0)$ ir kopas $\big\{b_\delta(x_0) : \delta > 0\big\}$ mažorante. Savukārt $b(x_0)$, būdams kopas $\big\{b_\delta(x_0) : \delta > 0\big\}$ suprēms, ir šīs kopas vismazākā mažorante. Tāpēc $b(x_0) \le f(x_0)$.

3. 3° īpašībā tika pierādīts, ka $f(x_0) \le B_\delta(x_0)$ jebkuram $\delta > 0$, t.i., $f(x_0)$ ir kopas $\big\{B_\delta(x_0) : \delta > 0\big\}$ minorante. Savukārt $B(x_0)$, būdams kopas $\big\{B_\delta(x_0) : \delta > 0\big\}$ infīms, ir šīs kopas vislielākā minorante. Tāpēc $f(x_0) \le B(x_0)$.

4. Tā kā $B(x_0)$ ir kopas $\big\{B_\delta(x_0) : \delta > 0\big\}$ infīms, tad $B(x_0)$ ir kopas $\big\{B_\delta(x_0) : \delta > 0\big\}$ minorante, t.i., $B(x_0) \le B_{\delta_2}(x_0)$ jebkuram $\delta_2 > 0$.◄

3.14. definīcija. Apskatīsim funkciju $f : E \to \mathbb{R}$. Kopā E definētās funkcijas b un B, ka

$$\forall x \in E: \ b(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\delta>0} \inf_{E_\delta(x)} f \quad \text{un} \quad \forall x \in E: \ B(x) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\delta>0} \sup_{E_\delta(x)} f,$$

sauc par **funkcijas** f **attiecīgi apakšējo un augšējo Bēra funkciju**.

3.15. definīcija. Apskatīsim funkciju $f : E \to \mathbb{R}$. Lielumu $\omega(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} B(x_0) - b(x_0)$, kur $x_0 \in E$, sauc par **funkcijas** f **svārstību punktā** $x_0 \in E$. Kopā E definētu funkciju $\omega(x)$ sauc par **funkcijas** f **svārstību**.

3.20. piezīme. No 3.7. un 3.8. piemēriem, kuri tiks turpmāk apskatīti, izriet, ka neierobežotas funkcijas $f : E \to \mathbb{R}$ Bēra funkcijas b un B, kā arī funkcijas f svārstība ω, var pieņemt arī bezgalīgas vērtības, t.i., $b : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$, $B : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$ un $\omega : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$, kur $\widetilde{\mathbb{R}}$ ir paplašinātā reālo skaitļu kopa (skat. 6.1.2. apakšparagrāfu). Taču ir jāatzīmē, ņemot vērā (3.101), ka gadījumi: 1) $b(x_0) = B(x_0) = -\infty$, 2) $b(x_0) = B(x_0) = +\infty$, *nav* iespējami nevienā kopas E punktā x_0. Līdz ar to funkcijas $f : E \to \mathbb{R}$ svārstība $\omega(x_0) = B(x_0) - b(x_0)$ ir korekti definēta jebkurā kopas E punktā x_0.

3.7. piemērs. Apskatīsim kopā $E = \mathbb{R}$ definētu funkciju f, ka

$$\forall x \in E: \ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{ja} \quad x \ne 0, \\ 0, & \text{ja} \quad x = 0. \end{cases}$$

Tad $b(0) = -\infty$, $f(0) = 0$, $B(0) = +\infty$, $\omega(0) = B(0) - b(0) = +\infty - (-\infty) = +\infty$.

3.8. piemērs. Apskatīsim kopā $E = \mathbb{R}$ definētu funkciju f, ka

$$\forall x \in E: \ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{ja} \quad x > 0, \\ 0, & \text{ja} \quad x = 0, \\ -1, & \text{ja} \quad x < 0. \end{cases}$$

Tad $b(0) = -1$, $f(0) = 0$, $B(0) = +\infty$, $\omega(0) = B(0) - b(0) = +\infty - (-1) = +\infty$.

3.9. piemērs. Apskatīsim kopā $E = \mathbb{R}$ definētu funkciju sign, ka

$$\forall x \in E: \ \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ja} \quad x > 0, \\ 0, & \text{ja} \quad x = 0, \\ -1, & \text{ja} \quad x < 0. \end{cases}$$

Tad $b(0) = -1$, $\operatorname{sign}(0) = 0$, $B(0) = 1$, $\omega(0) = B(0) - b(0) = 1 - (-1) = 2$. Savukārt, $b(4) = \operatorname{sign}(4) = B(4) = 1$, $\omega(4) = B(4) - b(4) = 1 - 1 = 0$ (skat. nākamo teorēmu).

3.5. teorēma. *Funkcija $f : E \to \mathbb{R}$ ir nepārtraukta punktā $x_0 \in E$ tad un tikai tad, kad $b(x_0) = B(x_0)$, t.i., funkcijas f apakšējās un augšējās Bēra funkcijas vērtības punktā $x_0 \in E$ ir vienādas. Citiem vārdiem sakot, funkcija $f : E \to \mathbb{R}$ ir nepārtraukta punktā $x_0 \in E$ tad un tikai tad, kad $\omega(x_0) = 0$, t.i., funkcijas f svārstība punktā $x_0 \in E$ ir vienāda ar 0.*

► *Nepieciešamība.* Apskatīsim patvaļīgu $\varepsilon > 0$. Tā kā funkcija $f : E \to \mathbb{R}$ ir nepārtraukta punktā $x_0 \in E$, tad no Košī definīcijas seko, ka eksistē tāds $\delta > 0$, ka visiem $x \in E_\delta(x_0) = E \cap (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ ir patiesa nevienādība $\big|f(x) - f(x_0)\big| < \varepsilon$ jeb

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon. \tag{3.102}$$

No (3.102) seko, ka $f(x_0) - \varepsilon$ ir kopas $\big\{f(x) : x \in E_\delta(x_0)\big\}$ minorante. Taču $b_\delta(x_0)$, būdams kopas $\big\{f(x) : x \in E_\delta(x_0)\big\}$ infīms, ir šīs kopas vislielākā minorante, tāpēc

$$b_\delta(x_0) \geq f(x_0) - \varepsilon. \tag{3.103}$$

No (3.102) seko, ka $f(x_0) + \varepsilon$ ir kopas $\{f(x) : x \in E_\delta(x_0)\}$ mažorante. Taču $B_\delta(x_0)$, būdams kopas $\{f(x) : x \in E_\delta(x_0)\}$ suprēms, ir šīs kopas vismazākā mažorante, tāpēc

$$B_\delta(x_0) \leq f(x_0) + \varepsilon. \tag{3.104}$$

No (3.103) un (3.104), ņemot vērā 4° īpašību, atrodam

$$f(x_0) - \varepsilon \leq b_\delta(x_0) \leq b(x_0) \leq B(x_0) \leq B_\delta(x_0) \leq f(x_0) + \varepsilon,$$

no kurienes izriet

$$f(x_0) - \varepsilon \leq b(x_0) \leq B(x_0) \leq f(x_0) + \varepsilon.$$

Tā kā ε ir patvaļīgs pozitīvs skaitlis, tad pēdējās nevienādībās pārejot pie robežas, kad ε tiecas uz 0 no labās puses, iegūsim $f(x_0) \leq b(x_0) \leq B(x_0) \leq f(x_0)$ jeb $b(x_0) = B(x_0) = f(x_0)$.

Pietiekamība. Ja $b(x_0) = B(x_0)$, tad no 4° īpašības seko, ka $b(x_0) = B(x_0) = f(x_0)$ ir reāls skaitlis. Apskatīsim patvaļīgu $\varepsilon > 0$.

Tā kā $b(x_0) = \sup\limits_{\delta > 0} b_\delta(x_0)$, tad no suprēma īpašībām seko, ka eksistē tāds δ_1, ka

$$b_{\delta_1}(x_0) > b(x_0) - \varepsilon. \tag{3.105}$$

Tā kā $B(x_0) = \inf\limits_{\delta>0} B_\delta(x_0)$, tad no infīma īpašībām seko, ka eksistē tāds δ_2, ka

$$B_{\delta_2}(x_0) < B(x_0) - \varepsilon. \tag{3.106}$$

Pieņemsim, ka $\delta = \min\{\delta_1; \delta_2\}$. Tā kā $\delta \le \delta_1$ un $\delta \le \delta_2$, tad $E_\delta(x_0) \subset E_{\delta_1}(x_0)$ un $E_\delta(x_0) \subset E_{\delta_2}(x_0)$. Saskaņā ar definīciju

$$b_{\delta_1}(x_0) = \inf_{E_{\delta_1}(x_0)} f = \inf\big\{f(x) : x \in E_{\delta_1}(x_0)\big\}.$$

Kopas $\big\{f(x) : x \in E_{\delta_1}(x_0)\big\}$ infīms $b_{\delta_1}(x_0)$ ir šīs kopas minorante, t.i.,

$$\forall x \in E_{\delta_1}(x_0) : b_{\delta_1}(x_0) \le f(x).$$

Tā kā $E_\delta(x_0) \subset E_{\delta_1}(x_0)$, tad

$$\forall x \in E_\delta(x_0) : b_{\delta_1}(x_0) \le f(x). \tag{3.107}$$

Saskaņā ar definīciju

$$B_{\delta_2}(x_0) = \sup_{E_{\delta_2}(x_0)} f = \sup\big\{f(x) : x \in E_{\delta_2}(x_0)\big\}.$$

Kopas $\big\{f(x) : x \in E_{\delta_2}(x_0)\big\}$ suprēms $B_{\delta_2}(x_0)$ ir šīs kopas mažorante, t.i.,

$$\forall x \in E_{\delta_2}(x_0) : B_{\delta_2}(x_0) \ge f(x).$$

Tā kā $E_\delta(x_0) \subset E_{\delta_2}(x_0)$, tad

$$\forall x \in E_\delta(x_0) : B_{\delta_2}(x_0) \ge f(x). \tag{3.108}$$

No (3.105), (3.106), (3.107) un (3.108) seko, ka

$$\forall x \in E_\delta(x_0) : b(x_0) - \varepsilon < b_{\delta_1}(x_0) \le f(x) \le B_{\delta_2}(x_0) < B(x_0) + \varepsilon.$$

Tā kā $b(x_0) = f(x_0) = B(x_0)$, tad

$$\forall x \in E_\delta(x_0) : f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$

jeb

$$\forall x \in E_\delta(x_0) : \big|f(x) - f(x_0)\big| < \varepsilon.$$

Tādējādi jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē $\delta > 0$, ka visiem $x \in E_\delta(x_0)$ ir patiesa nevienādība $\big|f(x) - f(x_0)\big| < \varepsilon$. No funkcijas nepārtrauktības punktā Košī definīcijas izriet, ka funkcija f ir nepārtraukta punktā x_0. Teorēma ir pierādīta.◀

3.16. definīcija. [**Funkcijas nepārtauktības punktā Bēra definīcija**] Funkciju $f : E \to \mathbb{R}$ sauc par **nepārtrauktu punktā** $x_0 \in E$, ja $b(x_0) = B(x_0)$, t.i., funkcijas f apakšējās un augšējās Bēra funkcijas vērtības punktā $x_0 \in E$ ir vienādas.

No pierādītās teorēmas seko, ka *funkcijas nepārtauktības punktā Košī, Heines un Bēra definīcijas ir ekvivalentas*.

Apskatīsim vēl dažas noderīgas īpašības.

5° *Funkcija $\omega(x) = B(x) - b(x)$ ir nenegatīva kopā E.*

► No 4° īpašības izriet

$$\forall x \in E : b(x) \leq B(x).$$

Tāpēc

$$\forall x \in E : \omega(x) = B(x) - b(x) \geq 0. \blacktriangleleft$$

6° *Ja funkcija f ir ierobežota kopā E ar konstanti K, t.i., jebkuram $x \in E$ ir spēkā $\big|f(x)\big| \leq K$, tad funkcijas f Bēra funkcijas b un B arī ir ierobežotas funkcijas kopā E ar to pašu konstanti K.*

► Pieņemsim, ka x_0 ir patvaļīgs kopas E punkts. Fiksēsim kādu $\delta > 0$. Apskatīsim

$$b_\delta(x_0) = \inf_{E_\delta(x_0)} f = \inf\big\{f(x) : x \in E_\delta(x_0)\big\}.$$

Tā kā $E_\delta(x_0) \subset E$ un

$$\forall x \in E : -K \leq f(x) \leq K, \tag{3.109}$$

jo funkcija f ir ierobežota kopā E ar konstanti K, tad $-K \leq f(x)$ jebkuram $x \in E_\delta(x_0)$, t.i., $-K$ ir kopas $\big\{f(x) : x \in E_\delta(x_0)\big\}$ minorante. Savukārt $b_\delta(x_0)$, būdams šīs kopas infīms, ir vislielākā šīs kopas minorante, t.i.,

$$-K \leq b_\delta(x_0). \tag{3.110}$$

No 4° īpašības, ņemot vērā (3.109), atrodam

$$b_\delta(x_0) \leq b(x_0) \leq f(x_0) \leq K. \tag{3.111}$$

No (3.110) un (3.111) izriet, ka $-K \leq b(x_0) \leq K$. Tā kā x_0 ir patvaļīgs kopas E punkts, tad

$$\forall x \in E : -K \leq b(x) \leq K,$$

t.i., funkcijas f apakšējā Bēra funkcija b ir ierobežota funkcija kopā E ar konstanti K. Analoģiski pierāda, ka funkcijas f augšējā Bēra funkcija B arī ir ierobežota funkcija kopā E ar konstanti K.◄

7° *Ja funkcija f ir ierobežota kopā E ar konstanti K, tad*

$$\forall x \in E : 0 \leq \omega(x) \leq 2K. \tag{3.112}$$

► No 5° īpašības izriet

$$\forall x \in E : \omega(x) \geq 0. \tag{3.113}$$

Saskaņā ar iepriekšējā īpašībā pierādīto

$$\forall x \in E : -K \leq b(x); \tag{3.114}$$

$$\forall x \in E : B(x) \leq K. \tag{3.115}$$

No (3.115) atņemot (3.114), iegūsim

$$\forall x \in E : \omega(x) = B(x) - b(x) \leq 2K. \tag{3.116}$$

No (3.113) un (3.116) izriet (3.112).◄

3.10. piemērs. Apskatīsim kopā $E = \mathbb{R}$ definētu funkciju f, ka

$$\forall x \in \mathbb{R}: \ f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ja} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ -x^2, & \text{ja} \quad x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

Pieņemsim, ka x_0 ir fiksēts kopas E punkts. Tad

$$b(x_0) = \begin{cases} -x_0^2, & \text{ja} \quad x_0 \neq 0, \\ 0, & \text{ja} \quad x_0 = 0; \end{cases} \quad B(x_0) = \begin{cases} x_0^2, & \text{ja} \quad x_0 \neq 0, \\ 0, & \text{ja} \quad x_0 = 0; \end{cases}$$

$$\omega(x_0) = \begin{cases} 2x_0^2, & \text{ja} \quad x_0 \neq 0, \\ 0, & \text{ja} \quad x_0 = 0; \end{cases}$$

Tāpēc funkcija f ir pārtraukta jebkurā punktā $x_0 \neq 0$ un nepārtraukta punktā $x_0 = 0$.

3.8.2. Bēra funkciju mērojamība

Apskatīsim funkciju $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ un pieņemsim, ka tā ir ierobežota nogriezni $[a; b]$ ar konstanti K, t.i.,

$$\forall x \in [a; b] : \left| f(x) \right| \leq K. \tag{3.117}$$

Pieņemsim, ka $b : [a; b] \to \mathbb{R}$ un $B : [a; b] \to \mathbb{R}$ ir funkcijas f attiecīgi apakšējā un augšējā Bēra funkcija. Saskaņā ar iepriekšējā apakšparagrāfa 6° īpašību funkcijas b un B ir ierobežotas funkcijas nogriezni $[a; b]$ ar konstanti K.

Katram $n \in \mathbb{N}$ apskatīsim nogriežņa $[a; b]$ sasmalcinājumu

$$T_n = \left\{ a + \frac{k}{2^n}(b - a) \right\}_{k=0}^{2^n}$$

un intervālus:

$$\triangle_k^{(n)} = \left(a + \frac{k-1}{2^n}(b-a); a + \frac{k}{2^n}(b-a) \right) \quad (k = 1, 2, \ldots, 2^n),$$

$$\overline{\triangle}_k^{(n)} = \left[a + \frac{k-1}{2^n}(b-a); a + \frac{k}{2^n}(b-a) \right] \quad (k = 1, 2, \ldots, 2^n).$$

Tad

$$[a; b] = \left(\bigcup_{k=1}^{2^n} \triangle_k^{(n)} \right) \cup T_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} \overline{\triangle}_k^{(n)} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

pie tam intervālu garumi

$$\left| \triangle_k^{(n)} \right| = \left| \overline{\triangle}_k^{(n)} \right| = \frac{b-a}{2^n} \quad (k = 1, 2, \ldots, 2^n).$$

Katram $n \in \mathbb{N}$ definēsim funkcijas $\varphi_n, \psi_n : [a; b] \to \mathbb{R}$ šādi:

$$\forall x \in [a; b] : \ \varphi_n(x) = \begin{cases} \inf\limits_{\overline{\triangle}_k^{(n)}} f, & \text{ja} \quad x \in \triangle_k^{(n)} \text{ kādam } k \in \{1; 2; \ldots; 2^n\}, \\ 0, & \text{ja} \quad x \in T_n; \end{cases}$$

$$\forall x \in [a; b] : \ \psi_n(x) = \begin{cases} \sup\limits_{\overline{\triangle}_k^{(n)}} f, & \text{ja} \quad x \in \triangle_k^{(n)} \text{ kādam } k \in \{1; 2; \ldots; 2^n\}, \\ 0, & \text{ja} \quad x \in T_n. \end{cases}$$

1° *Ja funkcija* $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ *ir ierobežota, tad* $\big(\varphi_n(x)\big) \xrightarrow[\text{g.v.}]{[a;b]} b(x)$, $\big(\psi_n(x)\big) \xrightarrow[\text{g.v.}]{[a;b]} B(x)$.

▶ Pierādīsim, ka $T = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} T_n$ ir sanumurējama kopa. No vienas puses, $|T| \le \aleph_0$, jo T ir galīgu kopu T_n $(n \in \mathbb{N})$ sanumurējams apvienojums[9]. No otras puses, $|T| \ge \aleph_0$, jo T satur sanumurējamu apakškopu $\{a + \frac{b-a}{2^n} : n \in \mathbb{N}\}$. Tā kā $|T| \le \aleph_0$ un $|T| \ge \aleph_0$, tad no Kantora-Bernšteina[10] teorēmas[11] izriet, ka $|T| = \aleph_0$, t.i., T ir sanumurējama kopa. Tātad T ir nulles mēra kopa, t.i., $\mathrm{m}(T) = 0$.

Pierādīsim, ka

$$\forall x_0 \in [a;b] \setminus T : \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x_0) = b(x_0).$$

Tas arī nozīmēs, ka $\big(\varphi_n(x)\big) \xrightarrow[\text{g.v.}]{[a;b]} b(x)$, jo T ir nulles mēra kopa.

Pieņemsim, ka $x_0 \in [a;b] \setminus T$. Tad $x_0 \in [a;b]$ un $x_0 \notin T$. Tā kā $T = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} T_n$, tad $x_0 \notin T_n$ jebkuram $n \in \mathbb{N}$. Tātad $x_0 \in [a;b] \setminus T_n = \bigcup\limits_{k=1}^{2^n} \triangle_k^{(n)}$ jebkuram $n \in \mathbb{N}$. Tāpēc jebkuram $n \in \mathbb{N}$ eksistē $k \in \{1; 2; \ldots; 2^n\}$, ka $x_0 \in \triangle_k^{(n)}$. Tā kā $\triangle_k^{(n)}$ ir vaļējs intervāls, tad eksistē $\delta > 0$, ka

$$(x_0 - \delta; x_0 + \delta) \subset \triangle_k^{(n)}. \tag{3.118}$$

Atgādināsim, ka

$$\triangle_k^{(n)} \subset \overline{\triangle}_k^{(n)} \subset [a;b]. \tag{3.119}$$

Apzīmēsim $E = [a;b]$. Ņemot vērā (3.118) un (3.119), atrodam

$$E_\delta(x_0) = [a;b] \cap (x_0 - \delta; x_0 + \delta) = (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \subset \overline{\triangle}_k^{(n)},$$

no kurienes izriet $f\big(E_\delta(x_0)\big) \subset f\left(\overline{\triangle}_k^{(n)}\right)$. Tāpēc

$$b_\delta(x_0) = \inf_{E_\delta(x_0)} f = \inf f\big(E_\delta(x_0)\big) \ge \inf f\left(\overline{\triangle}_k^{(n)}\right) = \inf_{\overline{\triangle}_k^{(n)}} f = \varphi_n(x_0),$$

t.i.,

$$\varphi_n(x_0) \le b_\delta(x_0). \tag{3.120}$$

Saskaņā ar iepriekšējā paragrāfa 4° īpašību

$$b_\delta(x_0) \le b(x_0). \tag{3.121}$$

No (3.120) un (3.121), ņemot vērā, ka n ir patvaļīgs naturāls skaitlis, iegūsim

$$\forall n \in \mathbb{N} : \varphi_n(x_0) \le b(x_0). \tag{3.122}$$

Fiksēsim $\varepsilon > 0$. Tā kā $b(x_0) = \sup\limits_{\delta>0} b_\delta(x_0)$, tad eksistē $\delta > 0$, ka

$$b_\delta(x_0) > b(x_0) - \varepsilon. \tag{3.123}$$

[9] Ar $|T|$ tiek apzīmēts kopas T apjoms, bet ar $\aleph_0$ - sanumurējamas kopas apjoms.

[10] F. Bernšteins (*Felix Bernstein*, 1878-1956) - vācu matemātiķis.

[11] *Kantora-Bernšteina teorēma.* Ja kopas A apjoms nepārsniedz kopas B apjomu, un kopas B apjoms nepārsniedz kopas A apjomu, tad kopu A un B apjomi ir vienādi.

Atradīsim $n_0 \in \mathbb{N}$, ka

$$\frac{b-a}{2^{n_0}} < \delta. \tag{3.124}$$

Ja $n \geq n_0$, tad saskaņā ar iepriekš pierādīto eksistē $k \in \{1; 2; \ldots; 2^n\}$, ka $x_0 \in \triangle_k^{(n)}$.

Pierādīsim, ka

$$\overline{\triangle}_k^{(n)} \subset E_\delta(x_0). \tag{3.125}$$

Tiešām, ja $y \in \overline{\triangle}_k^{(n)}$, tad, ņemot vērā (3.124), iegūsim

$$|y - x_0| < \left|\overline{\triangle}_k^{(n)}\right| \leq \frac{b-a}{2^n} \leq \frac{b-a}{2^{n_0}} < \delta,$$

no kurienes seko, ka $y \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) = E_\delta(x_0)$. Iekļaušanās (3.125) ir pierādīta.

No (3.125) seko $f\left(\overline{\triangle}_k^{(n)}\right) \subset f\big(E_\delta(x_0)\big)$, tāpēc

$$\varphi_n(x_0) = \inf_{\overline{\triangle}_k^{(n)}} f = \inf f\left(\overline{\triangle}_k^{(n)}\right) \geq \inf f\big(E_\delta(x_0)\big) = \inf_{E_\delta(x_0)} f = b_\delta(x_0),$$

t.i.,

$$\varphi_n(x_0) \geq b_\delta(x_0). \tag{3.126}$$

No (3.126), ņemot vērā (3.123), atrodam $\varphi_n(x_0) + \varepsilon \geq b_\delta(x_0) + \varepsilon > b(x_0)$ jeb

$$b(x_0) - \varphi_n(x_0) < \varepsilon. \tag{3.127}$$

Savukārt no (3.122) izriet

$$b(x_0) - \varphi_n(x_0) = \big|b(x_0) - \varphi_n(x_0)\big|. \tag{3.128}$$

No (3.127) un (3.128) seko

$$\big|b(x_0) - \varphi_n(x_0)\big| < \varepsilon. \tag{3.129}$$

Tādējādi jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē $n_0 \in \mathbb{N}$, ka visiem numuriem $n \geq n_0$, ir spēkā (3.129), t.i., $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x_0) = b(x_0)$.

Analoģiski pierāda, ka $\big(\psi_n(x)\big) \xrightarrow[\text{g.v.}]{[a;b]} B(x)$.◀

2° *Ja funkcija $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ ir ierobežota, tad funkcijas φ_n, $\psi_n : [a; b] \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ ir mērojamas nogrieznī $[a; b]$.*

▶ Funkcijas φ_n un ψ_n ir kāpņveida funkcijas, jo to vērtību kopas satur ne vairāk kā $2^n + 1$ elementus: funkcija φ_n pieņem vienu vērtību 0 un ne vairāk kā 2^n dažādas vērtības $\inf\limits_{\overline{\triangle}_k^{(n)}} f$ $(k = 1, 2, \ldots, 2^n)$; funkcija ψ_n pieņem vienu vērtību 0 un ne vairāk kā 2^n dažādas vērtības $\sup\limits_{\overline{\triangle}_k^{(n)}} f$ $(k = 1, 2, \ldots, 2^n)$. Šo vērtību pirmtēli ir mērojamas kopas: $\varphi^{-1}(0) = T_n$ ir mērojama kopa kā nulles mēra kopa, bet $\varphi^{-1}\left(\inf\limits_{\overline{\triangle}_k^{(n)}} f\right)$ ir mērojama kopa kā savstarpēji nešķeļošos ierobežotu vaļēju intervālu, kuri ir mērojamas kopas, galīgs apvienojums. Analoģiski pierāda, ka funkcijas ψ_n vērtību pirmtēli ir mērojamas kopas. Saskaņā ar mērojamu funkciju 6° īpašību funkcijas φ_n, ψ_n $(n \in \mathbb{N})$ ir mērojamas nogrieznī $[a; b]$.◀

3° *Ierobežotas funkcijas $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ Bēra funkcijas $b, B : [a;b] \to \mathbb{R}$ ir mērojamas nogrieznī $[a;b]$.*

► No 1° un 2° īpašības seko, ka nogrieznī $[a;b]$ mērojamu funkciju virknes $\big(\varphi_n(x)\big)$ un $\big(\psi_n(x)\big)$ konverģē gandrīz visur nogrieznī $[a;b]$ uz šajā nogrieznī definētām funkcijām attiecīgi $b(x)$ un $B(x)$. No 2.8. teorēmas izriet, ka funkcijas $b(x)$ un $B(x)$ ir mērojamas nogrieznī $[a;b]$.◄

4° *Ja funkcija f ir ierobežota kopā $[a;b]$ ar konstanti $K > 0$, tad gan funkciju virkne (φ_n), gan funkciju virkne (ψ_n), ir vienmērīgi ierobežota kopā $[a;b]$ ar to pašu konstanti $K > 0$.*

► Pierādīsim, ka funkciju virkne (φ_n) ir vienmērīgi ierobežota kopā $[a;b]$ ar konstanti $K > 0$. Apskatīsim patvaļīgu $n \in \mathbb{N}$.

a) Pieņemsim, ka $x_0 \in [a;b] \setminus T$. Tā kā funkcija f ir ierobežota kopā $[a;b]$ ar konstanti $K > 0$, tad

$$\forall x \in [a;b] : -K \le f(x) \le K. \tag{3.130}$$

No (3.101) un (3.122) izriet

$$f(x_0) \ge b(x_0) \ge \varphi_n(x_0). \tag{3.131}$$

Tā kā $\overline{\triangle}_k^{(n)} \subset [a;b]$, tad $f\left(\overline{\triangle}_k^{(n)}\right) \subset f\big([a;b]\big)$, no kurienes seko

$$\varphi_n(x_0) = \inf_{\overline{\triangle}_k^{(n)}} f = \inf f\left(\overline{\triangle}_k^{(n)}\right) \ge \inf f\big([a;b]\big) = \inf_{[a;b]} f. \tag{3.132}$$

No (3.130) izriet, ka $-K$ ir kopas $f\big([a;b]\big)$ minorante. Tā kā $\inf\limits_{[a;b]} f$ ir vislielākā šīs kopas minorante, tad

$$\inf_{[a;b]} f \ge -K. \tag{3.133}$$

No (3.130), (3.131), (3.132) un (3.133) izriet $-K \le \varphi_n(x_0) \le K$.

b) Ja $x_0 \in T$, tad $-K < \varphi_n(x_0) = 0 < K$.

No a) un b) seko

$$\forall x_0 \in [a;b]\ \forall n \in \mathbb{N} : -K \le \varphi_n(x_0) \le K,$$

t.i., funkciju virkne (φ_n) ir vienmērīgi ierobežota kopā $[a;b]$ ar konstanti $K > 0$. Analoģiski pierāda, ka funkciju virkne (ψ_n) arī ir vienmērīgi ierobežota kopā $[a;b]$ ar konstanti $K > 0$.◄

5° *Funkcijas φ_n, ψ_n $(n \in \mathbb{N})$ ir integrējamas Rīmaņa nozīmē nogrieznī $[a;b]$.*

► Apskatīsim patvaļīgu $n \in \mathbb{N}$. No funkcijas φ_n definīcijas izriet, ka tā ir ierobežota nogrieznī $[a;b]$, pie tam visu tās pārtraukuma punktu nogrieznī $[a;b]$ kopa ir galīgas kopas T_n apakškopa, t.i., ierobežotas nogrieznī $[a;b]$ funkcijas φ_n visu pārtraukuma punktu šajā nogrieznī kopa ir galīga. Šīs nodaļas 3.1. paragrāfā tika atzīmēts, ka ierobežota nogrieznī funkcija, kuras visu pārtraukuma punktu šajā nogrieznī kopa ir galīga, ir integrējama Rīmaņa nozīmē funkcija apskatāmajā nogrieznī. Tātad funkcija φ_n $(n \in \mathbb{N})$ ir integrējama Rīmaņa nozīmē nogrieznī $[a;b]$. Analoģiski pamato, ka funkcija ψ_n $(n \in \mathbb{N})$ arī ir integrējama Rīmaņa nozīmē nogrieznī $[a;b]$.◄

3.8.3. Lebega teorēma par funkcijas integrējamību Rīmaņa nozīmē

3.6. teorēma. *Nogriezni $[a;b]$ ierobežota funkcija f ir integrējama Rīmaņa nozīmē šajā nogriezni tad un tikai tad, kad tā ir nepārtraukta gandrīz visur nogriezni $[a;b]$, t.i., funkcijas f pārtraukuma punktu kopas Lebega mērs ir vienāds ar* 0.

► No iepriekšējā apakšparagrāfa 5° īpašības izriet, ka funkcijas φ_n $(n \in \mathbb{N})$ ir integrējamas Rīmaņa nozīmē nogriezni $[a;b]$. Saskaņā ar 3.1. teorēmu funkcijas φ_n $(n \in \mathbb{N})$ ir integrējamas arī Lebega nozīmē kopā $[a;b]$, pie tam

$$\int\limits_{[a;b]} \varphi_n(x)dx = \int\limits_a^b \varphi_n(x)dx \ (n \in \mathbb{N}). \tag{3.134}$$

Tā kā Rīmaņa integrālim piemīt galīgās aditivitātes īpašība, tad

$$\int\limits_a^b \varphi_n(x)dx = \sum_{k=1}^{2^n} \int\limits_{a+\frac{k-1}{2^n}(b-a)}^{a+\frac{k}{2^n}(b-a)} \varphi_n(x)dx = \sum_{k=1}^{2^n} \int\limits_{a+\frac{k-1}{2^n}(b-a)}^{a+\frac{k}{2^n}(b-a)} \inf_{\overline{\triangle}_k^{(n)}} f dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{2^n} \inf_{\overline{\triangle}_k^{(n)}} f \int\limits_{a+\frac{k-1}{2^n}(b-a)}^{a+\frac{k}{2^n}(b-a)} dx = \sum_{k=1}^{2^n} \inf_{\overline{\triangle}_k^{(n)}} f \cdot \left|\overline{\triangle}_k^{(n)}\right| = \underline{s}(T_n) \ (n \in \mathbb{N})$$

jeb

$$\int\limits_a^b \varphi_n(x)dx = \underline{s}(T_n) \ (n \in \mathbb{N}), \tag{3.135}$$

kur $\underline{s}(T_n)$ ir funkcijas f apakšējā Darbū-Rīmaņa summa, kas atbilst nogriežņa $[a;b]$ sasmalcinājumam T_n.

No (3.134) un (3.135) izriet

$$\int\limits_{[a;b]} \varphi_n(x)dx = \underline{s}(T_n) \ (n \in \mathbb{N}). \tag{3.136}$$

Analoģiski pierāda, ka

$$\int\limits_{[a;b]} \psi_n(x)dx = \overline{s}(T_n) \ (n \in \mathbb{N}), \tag{3.137}$$

kur $\overline{s}(T_n)$ ir funkcijas f augšējā Darbū-Rīmaņa summa, kas atbilst nogriežņa $[a;b]$ sasmalcinājumam T_n.

No 3.8.2. apakšparagrāfa 1°, 2° un 4° īpašības izriet, ka vienmērīgi ierobežota mērojamu funkciju virkne (φ_n) konverģē gandrīz visur kopā $[a;b]$ uz ierobežotu šajā kopā funkciju $b(x)$. Pielietojot 1. sekas no 3.4. teorēmas par robežpāreju zem Lebega integrāļa zīmes, atrodam

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{[a;b]} \varphi_n(x)dx = \int\limits_{[a;b]} b(x)dx. \tag{3.138}$$

Analoģiski pierāda, ka

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{[a;b]} \psi_n(x)dx = \int\limits_{[a;b]} B(x)dx. \tag{3.139}$$

No (3.136), (3.137), (3.138) un (3.139) seko

$$\lim_{n\to\infty} \big[\overline{s}(T_n) - \underline{s}(T_n)\big] = \int\limits_{[a;b]} \big[B(x) - b(x)\big]dx. \tag{3.140}$$

No (3.140), ņemot vērā 3.1. paragrāfā formulēto integrējamības Rīmaņa nozīmē 4° kritēriju, izriet, ka funkcija f ir integrējama Rīmaņa nozīmē nogriezni $[a;b]$ tad un tikai tad, kad

$$\int\limits_{[a;b]} \big[B(x) - b(x)\big]dx = 0. \tag{3.141}$$

Saskaņā ar 3.8.1. apakšparagrāfa 5° un 6° īpašību funkcija $B(x) - b(x)$ ir nenegatīva un ierobežota nogriezni $[a;b]$. Savukārt no 3.8.2. apakšparagrāfa 3° īpašības izriet, ka funkcija $B(x)-b(x)$ ir mērojama nogriezni $[a;b]$ kā divu mērojamu šajā nogriezni funkciju $B(x)$ un $b(x)$ starpība. No Lebega integrāļa 17° īpašības seko, ka $B(x)-b(x) = 0$ gandrīz visur nogriezni $[a;b]$, t.i., $B(x) = b(x)$ gandrīz visur nogriezni $[a;b]$. No funkcijas nepārtrauktības punktā Bēra definīcijas izriet, ka funkcija f ir nepārtraukta gandrīz visur nogriezni $[a;b]$, t.i., funkcijas f pārtraukuma punktu kopas Lebega mērs ir vienāds ar 0. Teorēma ir pierādīta.◀

3.21. piezīme. No pēdējās teorēmas pierādījuma izriet šādi integrējamības Rīmaņa nozīmē kritēriji (turpinām 3.1. paragrāfā iesākto numerāciju).

7° *Ierobežota funkcija $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ ir integrējama Rīmaņa nozīmē nogriezni $[a;b]$ tad un tikai tad, kad $b(x) = B(x)$ gandrīz visur nogriezni $[a;b]$, t.i., funkcijas f apakšējā un augšējā Bēra funkcijas ir vienādas gandrīz visur nogriezni $[a;b]$.*

8° *Ierobežota funkcija $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ ir integrējama Rīmaņa nozīmē nogriezni $[a;b]$ tad un tikai tad, kad $\omega(x) = 0$ gandrīz visur nogriezni $[a;b]$, t.i., funkcijas f svārstība ir vienāda ar nulli gandrīz katrā nogriežņa $[a;b]$ punktā.*

3.22. piezīme. Izmantojot pierādīto teorēmu, viegli pierādīt, ka 3.1. paragrāfā minētās funkciju klases (nepārtrauktu nogriezni funkciju klase, monotonu nogriezni funkciju klase, nogriezni ierobežotu funkciju, kurām apskatāmajā nogriezni ir galīgs skaits pārtraukuma punktu, klase) ir nogriezni integrējamu Rīmaņa nozīmē funkciju klases apakšklases.

- Nepārtrauktas nogriezni funkcijas visu pārtraukuma punktu šajā nogriezni kopa ir vienāda ar tukšo kopu. Tā kā tukšā kopa ir nulles mēra kopa, tad *jebkura nepārtraukta nogriezni funkcija ir integrējama Rīmaņa nozīmē funkcija dotajā nogriezni.*
- Var pierādīt (skat., piemēram, [21, 79.-81. lpp.], [36, 95.-97. lpp.]), ka monotonas nogriezni funkcijas visu pārtraukuma punktu š ajā nogriezni kopa ir ne vairāk kā sanumurējama kopa. Tā kā jebkura ne vairāk kā sanumurējama lineāra kopa ir nulles mēra kopa, tad *jebkura monotona nogriezni funkcija ir integrējama Rīmaņa nozīmē funkcija dotajā nogriezni.*

- Tā kā jebkura galīga lineāra kopa ir nulles mēra kopa, tad *jebkura nogriezni ierobežota funkcija, kurai apskatāmajā nogriezni ir galīgs skaits pārtraukuma punktu, ir integrējama Rīmaņa nozīmē funkcija dotajā nogriezni.*
- Tā kā jebkura mērojama Žordāna nozīmē kopa E ir mērojama Lebega nozīmē kopa, pie tam $\mathrm{m}(E) = \mathrm{mes}(E)$, tad *jebkura nogriezni ierobežota funkcija, kuras visu pārtraukuma punktu šajā nogriezni kopas Žordāna mērs ir vienāds ar nulli, ir integrējama Rīmaņa nozīmē funkcija dotajā nogriezni.*

Iepriekš teiktais ilustrē Lebega mēra un integrāļa teorijas izmantošanu klasiskajā matemātiskajā analīzē. Atzīmēsim, ka šīm četrām klasēm piederošo funkciju integrējamību Rīmaņa nozīmē var pierādīt (skat., piemēram, [9, 45.-51. lpp.]), neizmantojot integrējamības Rīmaņa nozīmē kritēriju (3.6. teorēmu), bet izmantojot tikai klasiskās matemātiskās analīzes metodes un faktus.

3.23. piezīme. Eksistē nogriezni integrējamas Rīmaņa nozīmē funkcijas ar nesanumurējamu pārtraukuma punktu kopu. Tiešām, apskatīsim Kantora kopas $\mathcal{P}$ raksturfunkciju φ, ka

$$\forall x \in [0;1]: \ \varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{ja} \quad x \in \mathcal{P}, \\ 0, & \text{ja} \quad x \in [0;1] \setminus \mathcal{P}. \end{cases}$$

Funkcija φ ir ierobežota nogriezni $[0;1]$, tās pārtraukuma punktu kopa ir vienāda ar Kantora kopu, kura ir nulles mēra kopa, tāpēc funkcija $\varphi : [0;1] \to \mathbb{R}$ ir integrējama Rīmaņa nozīmē nogriezni $[0;1]$, pie tam tās pārtraukuma punktu kopa ir nesanumurējama kopa (precīzāk, kontinuāla kopa).

3.24. piezīme. Funkciju integrējamību Rīmaņa nozīmē var definēt ne tikai nogriezni $[a;b]$, bet arī patvaļīgā mērojamā Žordāna nozīmē kopā Ω, izmantojot 3.2. un 3.3. paragrāfā izklāstīto shēmu:

1. apskata mērojamu Žordāna nozīmē kopu Ω un ierobežotu šajā kopā funkciju f;
2. pieņem 3.7., 3.8. un 3.9. definīcijas, uzskatot, ka $E = \Omega$, bet sadalījuma T šūnas E_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ ir mērojamas Žordāna nozīmē kopas;
3. pierāda 3.2. paragrāfā aplūkoto īpašību 1°, 2° un 3° analogus;
4. definē $\int\limits_{\Omega} f(x)dx$ - funkcijas f Rīmaņa integrāli kopā Ω - kā attiecīgā šķēluma vienīgo atdalītājskaitli.

Var pierādīt, ka funkcijas f Rīmaņa integrālim kopā Ω ir spēkā

- īpašības, kuras ir analoģiskas Lebega integrāļa 1°-9° īpašībām (skat. 3.6. paragrāfu),
- galīgās aditivitātes īpašība un tās sekas, kuras ir analoģiskas Lebega integrāļa 11°, 13° un 14° īpašībai (skat. 3.6. paragrāfu),
- 3.14. piezīmē teiktais, ja nogriežņa $[a;b]$ vietā ņemt mērojamu Žordāna nozīmē kopu Ω.

Var pierādīt šādu 3.6. teorēmas vispārinājumu [7, 2. daļa, 26.-27. lpp.].

3.7. teorēma. *Pieņemsim, ka Ω ir slēgta mērojama Žordāna nozīmē kopa, bet funkcija f ir ierobežota kopā Ω. Funkcija f ir integrējama Rīmaņa nozīmē kopā Ω tad un tikai tad, kad tā ir nepārtraukta gandrīz visur kopā Ω, t.i., visu funkcijas f pārtraukuma punktu kopā Ω kopas Lebega mērs ir vienāds ar nulli.*

Ir spēkā šāds 3.1. teorēmas vispārinājums [7, 2. daļa, 347. lpp.].

3.8. teorēma. *Pieņemsim, ka Ω ir mērojama Žordāna nozīmē kopa, bet funkcija f ir ierobežota kopā Ω. Ja funkcija f ir integrējama Rīmaņa nozīmē kopā Ω, tad funkcija f ir integrējama arī Lebega nozīmē kopā Ω, pie tam funkcijas f Rīmaņa integrālis kopā Ω ir vienāds ar funkcijas f Lebega integrāli kopā Ω.*

3.9. Primitīvās funkcijas atrašana ierobežota atvasinājuma gadījumā

Pieņemsim, ka F ir nogrieznī $[a;b]$ definēta funkcija, kurai katrā šī nogriežņa punktā x eksistē atvasinājums $F'(x)$; uzskata, ka nogriežņa galapunktos a un b funkcijai F eksistē vienpusējie atvasinājumi attiecīgi $F'_+(a)$ un $F'_-(b)$. Jautājums: *kā atrast funkciju F, ja ir zināms tās atvasinājums F', t.i., kā atrast funkcijas F' primitīvo funkciju F?*

Matemātiskās analīzes kursā pierāda šādu apgalvojumu [34]: ja nogrieznī $[a;b]$ integrējama Rīmaņa nozīmē funkcija f ir funkcijas F atvasinājums šajā nogrieznī, t.i.,

$$\forall x \in [a;b] : F'(x) = f(x),$$

tad

$$\forall x \in [a;b] : F(x) = F(a) + \int\limits_a^x f(t)dt$$

jeb

$$\forall x \in [a;b] : F(x) = F(a) + \int\limits_a^x F'(t)dt. \tag{3.142}$$

Šajā gadījumā Rīmaņa integrālis ir tas instruments, ar kura palīdzību tiek atrasta funkcija F, ja ir zināms tās atvasinājums f. Tā kā funkcija f ir integrējama Rīmaņa nozīmē nogrieznī $[a;b]$, tad f ir ierobežota funkcija šajā nogrieznī. Taču eksistē funkcijas, kuru atvasinājums ir ierobežota nogrieznī $[a;b]$ funkcija, kas nav integrējama Rīmaņa nozīmē funkcija šajā nogrieznī (skat. 12. uzdevumu šīs nodaļas beigās). Līdz ar to šādām funkcijām Rīmaņa integrāļa jēdziens ir par šauru, lai sniegtu atbildi uz iepriekš uzdoto jautājumu. Lebega integrālis, kurš ir Rīmaņa integrāļa vispārinājums, ļauj atrast funkcijas F' primitīvo funkciju F gadījumā, ja F' ir ierobežota funkcija dotajā nogrieznī.

3.9. teorēma. *Ja funkcijai F eksistē ierobežots atvasinājums F' nogrieznī $[a;b]$, tad funkcija F' ir integrējama Lebega nozīmē kopā $[a;b]$, pie tam ir spēkā* ***vispārinātā Ņūtona-Leibnica formula***

$$\forall x \in [a;b] : F(x) = F(a) + \int\limits_{[a;x]} F'(t)dt. \tag{3.143}$$

▶ Tā kā funkcijai F eksistē atvasinājums nogrieznī $[a;b]$, tad funkcija F ir nepārtraukta šajā nogrieznī. Turpināsim funkciju F plašākā nogrieznī $[a;b+1] \supset [a;b]$, uzskatot, ka

$$\forall x \in (b;b+1] : F(x) = F(b) + (x-b)F'_-(b).$$

Acīmredzot, funkcija F ir nepārtraukta nogriezni $[a;b+1]$ un tās atvasinājums ir ierobežots šajā nogriezni.

Apskatīsim nogriezni $[a;b]$ definētu funkciju virkni (f_n), kur

$$\forall x \in [a;b] : f_n(x) = n\left[F\left(x+\frac{1}{n}\right) - F(x)\right] \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{3.144}$$

Tā kā funkcijai F eksistē atvasinājums nogriezni $[a;b]$, tad

$$\forall x \in [a;b] : F'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x). \tag{3.145}$$

Acīmredzot, funkcijas f_n $(n = 1, 2, \ldots)$ ir nepārtrauktas un līdz ar to arī mērojamas nogriezni $[a;b]$. No 2.8. teorēmas, ņemot vērā (3.145), izriet, ka funkcija F' arī ir mērojama nogriezni $[a;b]$. Ņemot vērā, ka funkcija F' ir ierobežota nogriezni $[a;b]$, secinām, ka funkcija F' ir integrējama Lebega nozīmē kopā $[a;b]$. Teorēmas pirmais apgalvojums ir pierādīts.

Pierādīsim teorēmas otro apgalvojumu, t.i., pierādīsim formulu (3.143). Formulā (3.144) starpībai $F\left(x+\frac{1}{n}\right) - F(x)$, kur $x \in [a;b]$ un $n \in \mathbb{N}$, pielietojot Lagranža teorēmu par galīgiem pieaugumiem, iegūsim

$$f_n(x) = n \cdot F'\left(x+\frac{\theta}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = F'\left(x+\frac{\theta}{n}\right),$$

kur $\theta \in (0;1)$ ir atkarīgs gan no $x \in [a;b]$, gan no $n \in \mathbb{N}$. Tā kā funkcija F' ir ierobežota kopā $[a;b+1]$, tad no pēdējām formulām seko, ka funkciju virkne (f_n) ir vienmērīgi ierobežota kopā $[a;b]$. No teorēmas par robežpāreju zem Lebega integrāļa zīmes, ņemot vērā (3.145), iegūsim

$$\int\limits_{[a;b]} F'(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{[a;b]} f_n(x)dx. \tag{3.146}$$

Jebkuram $n \in \mathbb{N}$ funkcijas $f_n(x)$, $F\left(x+\frac{1}{n}\right)$ un $F(x)$ ir nepārtrauktas nogriezni $[a;b]$ un līdz ar to arī integrējamas Rīmaņa nozīmē šajā nogriezni. Tāpēc, izmantojot teorēmu par mainīgā aizvietošanu Rīmaņa integrālī un Rīmaņa integrāļa galīgās aditivitātes īpašību, atrodam

$$\int\limits_{[a;b]} f_n(x)dx = \int\limits_a^b f_n(x)dx = n\int\limits_a^b F\left(x+\frac{1}{n}\right)dx - n\int\limits_a^b F(x)dx =$$

$$= n\int\limits_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} F(x)dx - n\int\limits_a^b F(x)dx = n\int\limits_b^{b+\frac{1}{n}} F(x)dx - n\int\limits_a^{a+\frac{1}{n}} F(x)dx.$$

Pielietojot integrāļiem $\int\limits_b^{b+\frac{1}{n}} F(x)dx$ un $\int\limits_a^{a+\frac{1}{n}} F(x)dx$ teorēmu par vidējo vērtību, iegūsim

$$\int\limits_{[a;b]} f_n(x)dx = F\left(b+\frac{\theta'}{n}\right) - F\left(a+\frac{\theta''}{n}\right),$$

kur $0 < \theta' < 1$ un $0 < \theta'' < 1$. Tā kā funkcija F ir nepārtraukta punktos a un b, tad, ņemot vērā (3.146), iegūsim

$$\int\limits_{[a;b]} F'(x)dx = \lim_{n\to\infty}\left[F\left(b+\frac{\theta'}{n}\right) - F\left(a+\frac{\theta''}{n}\right)\right] = F(b) - F(a)$$

jeb

$$\int\limits_{[a;b]} F'(x)dx = F(b) - F(a),$$

t.i., formula (3.143) ir patiesa, ja $x = b$. Tā kā analoģiskus spriedumus var veikt attiecībā pret jebkuru nogriezni $[a; x]$, kur $a < x < b$, tad formula (3.143) ir patiesa jebkuram $x \in [a; b]$.◀

3.25. piezīme. Ja kopa E ir vienāda ar nogriezni $[a; b]$, tad Lebega integrāli kopā E bieži vien apzīmē tāpat kā Rīmaņa integrāli nogriezni $[a; b]$, t.i.,

$$\int\limits_{[a;b]} f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Iepriekš teiktais ļauj formulas (3.143) vietā rakstīt formulu (3.142).

3.10. Noslēguma piezīmes par galīga mēra kopā ierobežotu funkciju Lebega integrāli

• Integrējamības Lebega nozīmē kritērija - 3.3. teorēmas - nepieciešamību, ka *jebkura integrējama Lebega nozīmē funkcija f galīga mēra kopā E ir mērojama funkcija kopā E*, pierāda pēc shēmas, kura ir līdzīga 3.6. teorēmas pierādījumam (skat., piemēram, [16], [29]). Veiksim šī pierādījuma konspektīvu izklāstu. Pieņemsim, ka f ir integrējama Lebega nozīmē funkcija galīga mēra kopā E.

1. Vispirms, ņemot vērā funkcijas f integrējamību Lebega nozīmē kopā E, konstruē tādu kopas E sadalījumu virkni $T_n = \left(E_{k_n}^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ $(k_n = 1, 2, \ldots, t_n;\ n \in \mathbb{N})$, ka
   (a) sadalījums T_n ir sadalījuma T_{n-1} $(n = 2, 3, \ldots)$ turpinājums;
   (b) jebkuram $n \in \mathbb{N}$ ir spēkā
   $$\overline{S}(T_n) - \underline{S}(T_n) < \frac{1}{n}, \tag{3.147}$$
   kur $\underline{S}(T_n)$ un $\overline{S}(T_n)$ ir kopas E sadalījumam T_n $(n \in \mathbb{N})$ atbilstošā attiecīgi apakšējā un augšējā Darbū-Lebega summa.
2. Katram $n \in \mathbb{N}$ kopā E definē funkcijas φ_n un ψ_n pēc likuma:
   $$\varphi_n(x) \overset{\text{def}}{=} \inf_{E_{k_n}^{(n)}} f \quad \text{un} \quad \psi_n(x) \overset{\text{def}}{=} \sup_{E_{k_n}^{(n)}} f, \quad \text{ja } x \in E_{k_n}^{(n)}.$$

Tā kā kopas $E_{k_n}^{(n)}$ $(k_n = 1, 2, \ldots, t_n;\ n \in \mathbb{N})$ ir mērojamas, bet φ_n un ψ_n $(n \in \mathbb{N})$ ir kāpņveida funkcijas, tad funkcijas φ_n un ψ_n $(n \in \mathbb{N})$ ir mērojamas kopā E. Pierāda, ka

(a) jebkuram $n \in \mathbb{N}$ un patvaļīgam $x \in E$ ir spēkā $\varphi_n(x) \le f(x) \le \psi_n(x)$;

(b) jebkuram $x \in E$ izpildās

$$\varphi_1(x) \le \varphi_2(x) \le \cdots \le \varphi_n(x) \le \cdots \quad \text{un} \quad \psi_1(x) \ge \psi_2(x) \ge \cdots \ge \psi_n(x) \ge \cdots;$$

(c) jebkuram $x \in E$ eksistē galīgas robežas $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x)$ un $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(x)$; līdz ar to kopā E var definēt funkcijas φ un ψ:

$$\varphi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) \quad \text{un} \quad \psi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \psi_n(x);$$

(d) jebkuram $x \in E$ ir spēkā

$$\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x); \tag{3.148}$$

(e) funkcijas φ un ψ ir mērojamas kopā E;

(f) funkciju virknes (φ_n) un (ψ_n) ir vienmērīgi ierobežotas kopā E.

3. Izmantojot 2. sekas no 3.4. teorēmas, secina, ka

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E \big[\psi_n(x) - \varphi_n(x)\big]\,dx = \int\limits_E \big[\psi(x) - \varphi(x)\big]\,dx. \tag{3.149}$$

Pierāda, ka

$$\int\limits_E \big[\psi_n(x) - \varphi_n(x)\big]\,dx = \overline{S}(T_n) - \underline{S}(T_n). \tag{3.150}$$

No (3.147), (3.149) un (3.150) izriet

$$\int\limits_E \big[\psi(x) - \varphi(x)\big]\,dx = 0. \tag{3.151}$$

No (3.151), ņemot vērā ierobežotu funkciju Lebega integrāļa 17° īpašību un nevienādības (3.148), izriet, ka $\varphi(x) = f(x) = \psi(x)$ gandrīz visiem $x \in E$. Tātad funkcijas f un φ ir ekvivalentas kopā E. Tā kā funkcija φ ir mērojama kopā E, tad no 2.3. teorēmas seko, ka funkcija f arī ir mērojama kopā E.

• Šajā nodaļā izmantoto pieeju galīga mēra kopā ierobežotu funkciju Lebega integrāļa definēšanai sauc par *Lebega shēmu*. Apskatīsim ekvivalentu pieeju šādu funkciju Lebega integrāļa definēšanai (skat., piemēram, [11], [17]), izmantojot *Daniela*[12] *shēmu*, saskaņā ar kuru Lebega integrālis galīga mēra kopā vispirms tiek definēts kāpņveida funkcijām dotajā kopā, kuras pieņem tikai galīgu skaitu vērtību, bet tad - patvaļīgām ierobežotām mērojamām funkcijām apskatāmajā kopā.

[12] P. Daniels (*Percy John Daniel*, 1889-1946) - angļu matemātiķis.

1. Pieņemsim, ka $f : E \to \mathbb{R}$ ir mērojama kāpņveida funkcija ar vērtību kopu $f(E) = \{a_1; a_2; \ldots; a_n\}$. No mērojamu funkciju 6° īpašības izriet, ka kopas $E_k = f^{-1}(a_k)$ ir mērojamas katram $k = 1, 2, \ldots, n$. **Funkcijas f Lebega integrāli kopā E** definē ar vienādību
$$\int\limits_E f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \mathrm{m}(E_k)$$
un uzskata, ka **funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā E**.

2. Pieņemsim, ka $f : E \to \mathbb{R}$ ir <u>ierobežota</u> mērojama funkcija[13] galīga mēra kopā E. Saskaņā ar 2.15. teorēmu eksistē kopā E mērojamu kāpņveida funkciju, katra no kurām pieņem tikai galīgu skaitu vērtību, virkne (f_n), ka $(f_n) \overset{E}{\rightrightarrows} f$. Pierāda šādus apgalvojumus:

   (a) ja (f_n) ir patvaļīga virkne, kas apmierina 2.15. teorēmā minētos nosacījumus, tad eksistē galīga robeža $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x)dx$;

   (b) ja (f_n) un (g_n) ir patvaļīgas virknes, kas apmierina 2.15. teorēmā minētos nosacījumus, tad $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E g_n(x)dx$.

   Funkciju f sauc par **integrējamu Lebega nozīmē kopā E**, ja eksistē kopā E mērojamu kāpņveida funkciju, katra no kurām pieņem tikai galīgu skaitu vērtību, virkne (f_n), ka $(f_n) \overset{E}{\rightrightarrows} f$, bet **funkcijas f Lebega integrāli kopā E** definē ar vienādību
$$\int\limits_E f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x)dx.$$
   No (a) un (b) izriet, ka šī definīcija ir korekta. Var pierādīt, ka šī integrējamības Lebega nozīmē definīcija ir ekvivalenta 3.10. definīcijai.

3.11. Uzdevumi

1. Vai funkcija f ir integrējama Rīmaņa nozīmē nogrieznī $[0; 1]$? Vai funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā $[0; 1]$? Aprēķināt funkcijas f integrāli (Rīmaņa vai Lebega) kopā $[0; 1]$.

   (a) $$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ja} \quad x \in [0; 1] \cap \mathbb{Q}, \\ -x, & \text{ja} \quad x \in [0; 1] \cap \mathbb{I}, \end{cases}$$
   kur $\mathbb{Q}$ ir visu racionālo skaitļu kopa, bet $\mathbb{I}$ ir visu iracionālo skaitļu kopa.

   (b) $$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ja } x \in \mathcal{P}, \\ \frac{1}{2^n}, & \text{ja } x \text{ pieder kādam Kantora kopas } \mathcal{P} \\ & \text{blakusintervālam ar garumu } \frac{1}{3^n}. \end{cases}$$

   (c) $$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{ja} \quad x \in [0; 1] \cap \mathbb{Q}, \\ \cos x, & \text{ja} \quad x \in [0; 1] \cap \mathbb{I}. \end{cases}$$

[13] Mērojamas funkcijas jēdzienu Daniela shēmā definē kā kāpņveida funkciju virknes robežu (vai vienmērīgo robežu); detalizētāk skat. 2.22. piezīmi.

(d) $$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{ja} \quad x \in [0;1] \cap \mathbb{I}, \\ 1, & \text{ja} \quad x \in [0;1] \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(e) $$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ja} \quad x \in \mathcal{P}, \\ x^3, & \text{ja} \quad x \in [0;1] \setminus \mathcal{P}. \end{cases}$$

(f) $$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ja} \quad x \in \left(\frac{1}{3};1\right] \cap \mathbb{I}, \\ x^3, & \text{ja} \quad x \in \left[0;\frac{1}{3}\right) \cap \mathbb{I}, \\ 0, & \text{ja} \quad x \in [0;1] \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(g) $$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{ja} \quad x \in [0;1] \cap \mathbb{Q}, \\ \sin^2 x, & \text{ja} \quad x \in [0;1] \cap \mathbb{I}. \end{cases}$$

(h) $$f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & \text{ja} \quad x \in \left[0;\frac{1}{2}\right) \cap \complement\mathcal{P}, \\ \cos \pi x, & \text{ja} \quad x \in \left[\frac{1}{2};1\right] \cap \complement\mathcal{P}, \\ x^2, & \text{ja} \quad x \in P, \end{cases}$$

kur $\complement\mathcal{P} = [0;1] \setminus \mathcal{P}$ ir Kantora kopas $\mathcal{P}$ papildkopa līdz nogrieznim $[0;1]$.

(i) Kantora kopas $\mathcal{P}$ punktos funkcijas f vērtība ir vienāda ar 10, bet funkcijas f grafiks Kantora kopas patvaļīgā blakusintervālā ir augšējā pusriņķa līnija, kuras diametrs ir vienāds ar attiecīgā blakusintervāla garumu.

(j) $$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ja } x \in \mathcal{P}, \\ \frac{1}{3^n}, & \text{ja } x \text{ pieder kādam Kantora kopas } \mathcal{P} \\ & \text{blakusintervālam ar garumu } \frac{1}{3^n}. \end{cases}$$

(k) $$f(x) = \begin{cases} 10x+1, & \text{ja} \quad x \in \left[0;\frac{1}{6}\right) \cap \complement\mathcal{P}, \\ 10x-1, & \text{ja} \quad x \in \left[\frac{1}{6};1\right] \cap \complement\mathcal{P}, \\ 10^x, & \text{ja} \quad x \in \mathcal{P}. \end{cases}$$

(l) $$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{ja} \quad x \in [0;1] \cap \mathbb{I}, \\ 2x-1, & \text{ja} \quad x \in [0;1] \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(m) $$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ja} \quad x \in \mathcal{P}, \\ \sin \pi x, & \text{ja} \quad x \in [0;1] \setminus \mathcal{P}. \end{cases}$$

(n) $$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ja} \quad x \in [0;1] \cap \mathbb{I}, \\ \frac{(-1)^p}{q}, & \text{ja} \quad x = \frac{p}{q} \in [0;1] \cap \mathbb{Q}, \end{cases}$$

kur $\frac{p}{q}$ $(p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N})$ ir nesaīsināma daļa.

(o) Kantora kopas punktos funkcijas f vērtība ir vienāda ar 0, Kantora kopas blakusintervālu $(a_n;b_n)$ viduspunktos funkcijas f vērtība ir vienāda ar 1, bet uz nogriežņiem $\left[a_n;\frac{a_n+b_n}{2}\right]$ un $\left[\frac{a_n+b_n}{2};b_n\right]$ funkcija f ir lineāra, kur Kantora kopas blakusintervāli ir sanumurēti šādi:

$$(a_1;b_1) = \left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right),\ (a_2;b_2) = \left(\frac{1}{9};\frac{2}{9}\right),$$

$$(a_3;b_3) = \left(\frac{7}{9};\frac{8}{9}\right),\ (a_4;b_4) = \left(\frac{1}{27};\frac{2}{27}\right),\ \ldots\ .$$

(p) Kantora kopas punktos funkcijas f vērtība ir vienāda ar 0, Kantora kopas blakusintervālu $(a_n; b_n)$ viduspunktos funkcijas f vērtība ir vienāda ar $\frac{1}{10^n}$, bet uz nogriežņiem $\left[a_n; \frac{a_n+b_n}{2}\right]$ un $\left[\frac{a_n+b_n}{2}; b_n\right]$ funkcija f ir lineāra, kur Kantora kopas blakusintervāli $(a_n; b_n)$ ir sanumurēti tāpat kā iepriekšējā uzdevumā.

(q) Kantora kopas punktos funkcijas f vērtība ir vienāda ar 0, Kantora kopas blakusintervālos, kuri ir sanumurēti tāpat kā iepriekš, funkcijas f vērtība ir vienāda c_n, kur

i. virkne (c_n) konverģē uz skaitli 0;

ii. virkne (c_n) konverģē uz skaitli $c \neq 0$;

iii. virkne (c_n) ir diverģenta un ierobežota.

2. Pieņemsim, ka E ir galīga mēra kopa, $\widetilde{E}$ ir kopas E mērojama apakškopa, $\chi_{\widetilde{E}}$ ir kopas $\widetilde{E}$ raksturfunkcija kopā E. Pierādīt, ka

$$\int\limits_E \chi_{\widetilde{E}}(x)dx = \mathrm{m}(\widetilde{E}).$$

3. Pieņemsim, ka

$$\int\limits_E f(x)dx = 0,$$

pie tam $\big|f(x)\big| = 5$ jebkuram $x \in E$. Pierādīt, ka $\mathrm{m}\big(E[f > 0]\big) = \mathrm{m}\big(E[f < 0]\big)$.

4. Pieņemsim, ka funkcija f ir nenegatīva kopā E un

$$\int\limits_E f(x)dx = \mathrm{m}(E).$$

Pierādīt, ka $f(x) = 1$ gandrīz visiem $x \in E$.

5. Pierādīt, ka ir spēkā šādi Lebega integrāļa 5° un 6° īpašību vispārinājumi:

(a) ja funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē kopā E un katram $x \in E$ ir spēkā nevienādība $f(x) \geq 0$, pie tam $\mathrm{m}\big(E[f > 0]\big) > 0$, tad

$$\int\limits_E f(x)dx > 0.$$

(b) ja funkcijas f un g ir integrējamas Lebega nozīmē kopā E un katram $x \in E$ ir spēkā nevienādība $f(x) \leq g(x)$, pie tam $\mathrm{m}\big(E[f < g]\big) > 0$, tad

$$\int\limits_E f(x)dx < \int\limits_E g(x)dx.$$

6. Pierādīt Lebega integrāļa 7′° īpašību.

7. Vai nogriežņa $[a; b]$ mērojamas apakškopas E raksturfunkcija χ_E ir integrējama Rīmaņa nozīmē funkcija nogrieznī $[a; b]$, ja

(a) E ir nekur neblīva kopa,

(b) E ir nekur neblīva kopa, pie tam $\mathrm{m}(E) = 0$,

(c) E ir slēgta kopa, pie tam $\mathrm{m}(E) = 0$,

(d) $\mathrm{m}(E) = 0$,

(e) $\mathrm{m}(\overline{E}) = 0$, kur $\overline{E}$ ir kopas E slēgums?

8. Pierādīt, ka, ja ierobežota nogriezni $[a; b]$ funkcija f ir integrējama Rīmaņa nozīmē katrā nogriezni $[\alpha; \beta]$, kur $a < \alpha < \beta < b$, tad funkcija f ir integrējama Rīmaņa nozīmē nogriezni $[a; b]$. Konstruēt funkciju f, kas nav integrējama Rīmaņa nozīmē nogriezni $[a; b]$, taču ir integrējama Rīmaņa nozīmē katrā nogriezni $[\alpha; \beta]$, kur $a < \alpha < \beta < b$.

9. Pieņemsim, ka f ir ierobežota mērojama funkcija galīga mēra kopā E,

$$\inf_E f = y_0 < y_1 < \cdots < y_{k-1} < y_k < \cdots < y_n = \sup_E f,$$

bet $\lambda = \max\limits_{1 \le k \le n} (y_k - y_{k-1})$ ir nogriežņa $\left[\inf\limits_E f; \sup\limits_E f\right]$ sasmalcinājuma $\widetilde{T} = \{y_k\}_{k=0}^n$ solis. Apskatīsim kopas E sadalījumu $T = \left\{E_k\right\}_{k=1}^n$, kur

$$E_1 = E[y_0 \le f \le y_1], \quad E_k = E[y_{k-1} < f \le y_k] \ \ (k = 2, 3, \ldots, n),$$

un patvaļīgi izvēlētus punktus $\xi_k \in E_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ - **sadalījuma T starppunktus**. Summu $\sigma(T; \xi) = \sum\limits_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \mathrm{m}(E_k)$ sauc par **funkcijas f integrālo Lebega summu, kas atbilst kopas E sadalījumam $T = \left\{E_k\right\}_{k=1}^n$ un starppunktu sistēmai $\xi = \{\xi_k\}_{k=1}^n$**. Pierādīt:

(a) eksistē skaitlis $\mathfrak{I} \in \mathbb{R}$, ka jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē $\delta > 0$, ka visiem nogriežņa $\left[\inf\limits_E f; \sup\limits_E f\right]$ sasmalcinājumiem $\widetilde{T}$ ar soli λ, ka $\lambda < \delta$, un patvaļīgai starppunktu $\xi_k \in E_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ izvēlei attiecīgajā kopas E sadalījumā T, ir patiesa nevienādība $\left|\sigma(T; \xi) - \mathfrak{I}\right| < \varepsilon$;

(b) $\mathfrak{I} = \int\limits_E f(x)dx$, kur $\int\limits_E f(x)dx$ ir funkcijas f Lebega integrālis kopā E;

(c) ir spēkā vienādības

$$\lim_{\lambda \to 0} \underline{S}(T) = \lim_{\lambda \to 0} \overline{S}(T) = \int\limits_E f(x)dx,$$

kur $\underline{S}(T)$ un $\overline{S}(T)$ ir funkcijas f attiecīgi apakšējā un augšējā Darbū-Lebega summa, kas atbilst kopas E sadalījumam T.

10. Apskatīsim kopā $E = [a; b]$, kur $a, b \in \mathbb{R}$ un $a < b$, definētu funkciju virkni (f_n), ka

$$\forall x \in [a; b]: \ f_n(x) = \begin{cases} n^{\frac{2}{3}} \left(1 - \frac{x-a}{b-a} \cdot n\right), & \text{ja} \quad x \in \left[a; a + \frac{b-a}{n}\right], \\ 0, & \text{ja} \quad x \in \left(a + \frac{b-a}{n}; b\right], \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Pierādīt:

(a) f_n $(n \in \mathbb{N})$ ir ierobežotas mērojamas funkcijas kopā E;

(b) $(f_n) \overset{E}{\rightrightarrows} \mathbb{O}$, kur $\mathbb{O}$ ir nullfunkcija kopā E;
(*norādījums:* pierādījumā izmantot konverģences pēc mēra definīciju);

(c) funkciju virkne (f_n) nav gandrīz visur kopā E vienmērīgi ierobežota ne ar vienu konstanti $K > 0$;

(d) izpildās vienādība (3.71), t.i., $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x)dx = \int\limits_E f(x)dx$.

Par doto virkni (f_n) skat. 3.17. un 5.7. piezīmes, kā arī 5.1. zīmējumu.

11. Pieņemsim, ka
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & \text{ja} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{ja} \quad x = 0. \end{cases}$$
Pierādīt, ka funkcija f' nav integrējama Rīmaņa nozīmē nogriezni $[-1; 1]$.

12. Pieņemsim, ka F ir perfekta nekur neblīva ierobežota galīga <u>pozitīva</u> mēra kopa, $a = \inf F$, $b = \sup F$. Tad
$$G = [a; b] \setminus F = \bigcup_n (a_n; b_n)$$
ir netukša vaļēja kopa, kur $(a_n; b_n)$ ir kopas G veidotājintervāli (indekss n pieņem sanumurējamu apjomu vērtību). Apskatīsim nogriezni $[a; b]$ definētu funkciju
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ja} \quad x \in F, \\ (x - a_n)^2 (b_n - x)^2 \sin \frac{1}{(b_n - a_n)(x - a_n)(x - b_n)}, & \text{ja} \quad x \in (a_n; b_n). \end{cases}$$
Pierādīt, ka funkcijai f nogriezni $[a; b]$ eksistē ierobežots atvasinājums f', kurš ir pārtraukts kopas F punktos un līdz ar to nav integrējams Rīmaņa nozīmē nogriezni $[a; b]$.

13. Apskatīsim kopā $E = [0; 1]$ ierobežotu mērojamu funkciju virkni (f_n), ka
$$\forall x \in E: \ f_n(x) = \begin{cases} \min\left(n; \frac{1}{x}\right), & \text{ja} \quad 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{ja} \quad x = 0, \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

(a) Pierādīt, ka $(f_n) \xrightarrow{\mathrm{E}} f$, kur
$$\forall x \in E: \ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{ja} \quad 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{ja} \quad x = 0. \end{cases}$$

(b) Vai $(f_n) \overset{\mathrm{E}}{\rightrightarrows} f$?

14. Pierādīt, ka, ja funkcija f ir integrējama Rīmaņa nozīmē nogriezni $[a; b]$ un visu tās pārtraukuma punktu šajā nogriezni kopa ir mērojama Žordāna nozīmē, tad $\mathrm{mes}(E) = 0$.

15. Konstruēt funkciju f, kura ir integrējama Rīmaņa nozīmē nogriezni $[a; b]$, taču visu tās pārtraukuma punktu šajā nogriezni kopa nav mērojama Žordāna nozīmē.

16. Pierādīt 148. lappusē formulētos apgalvojumus (a) un (b).

17. Pieņemsim, ka (f_n) ir ierobežotu mērojamu kopā E funkciju virkne, pie tam ir spēkā vienādība $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x)dx = 0$. Vai ir patiess apgalvojums, ka $(f_n) \xrightarrow[\text{g.v.}]{E} \mathbb{O}$, kur $\mathbb{O}$ ir nullfunkcija kopā E? *Norādījums:* apskatīt virkni (f_n) no 2.4. piemēra.

18. Pieņemsim, ka f ir ierobežota mērojama funkcija nogrieznī $[a;b]$. Pierādīt, ka, ja $\int\limits_{[a;c]} f(x)dx = 0$ katram $c \in [a;b]$, tad nogrieznī $[a;b]$ funkcija f ir ekvivalenta nullfunkcijai šajā nogrieznī.

4. nodaļa

SUMMĒJAMAS FUNKCIJAS

Iepriekšējā nodaļā tika apskatīta galīga mēra kopā ierobežotu mērojamu funkciju Lebega integrāļa teorija. Šajā nodaļā Lebega integrāļa jēdziens tiks vispārināts mērojamām funkcijām (ierobežotām vai neierobežotām), kuras ir definētas mērojamās kopās ar galīgu vai bezgalīgu mēru, tiks apskatītas šāda integrāļa īpašības un tā saistība ar neīstajiem integrāļiem nekompaktās kopās.

4.1. Patstāvīgas zīmes funkciju summējamība

4.1.1. Nenegatīvas funkcijas griezumi un to īpašības

Funkcijas griezuma jēdziens tiks izmantots, lai definētu galīga mēra kopā E nenegatīvas mērojamas funkcijas f Lebega integrāli.

4.1. definīcija. Pieņemsim, ka $t > 0$. Par **nenegatīvas funkcijas f griezumu augstumā** t sauc funkciju $[f]_t : E \to \mathbb{R}$, ka

$$\forall x \in E : [f]_t(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} f(x), & \text{ja} \quad f(x) \le t, \\ t, & \text{ja} \quad f(x) > t, \end{cases} \tag{4.1a}$$

jeb

$$\forall x \in E : [f]_t(x) \stackrel{\text{def}}{=} \min\bigl\{f(x); t\bigr\}; \tag{4.1b}$$

(skat. 4.1. zīmējumu).

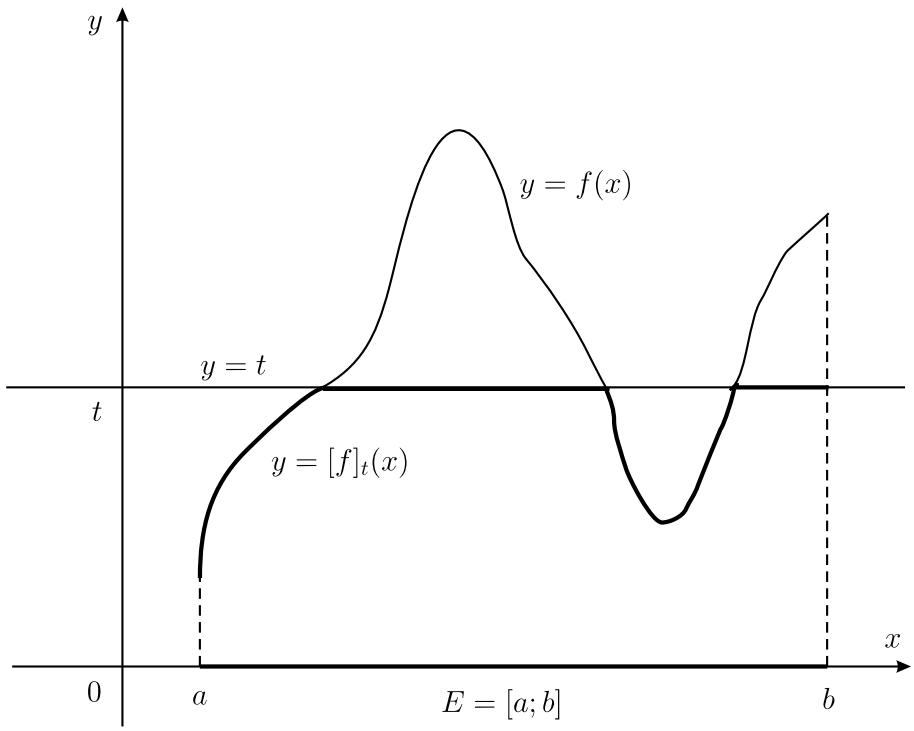
Ja izmantot funkcijas f Lebega kopas, tad (4.1a) vai (4.1b) var uzrakstīt šādi:

$$\forall x \in E : [f]_t(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} f(x), & \text{ja} \quad x \in E[f \le t], \\ t, & \text{ja} \quad x \in E[f > t]. \end{cases} \tag{4.2}$$

Atzīmēsim dažas griezumu īpašības.

1° *Kopā E nenegatīvas funkcijas f griezums $[f]_t$ augstumā $t > 0$ ir ierobežota nenegatīva funkcija kopā E, jo*

$$\forall x \in E : 0 \le [f]_t(x) \le t.$$



4.1. zīmējums. Kopā $E = [a; b]$ nenegatīvas funkcijas f griezums $[f]_t$ augstumā $t > 0$.

2° *Kopā E nenegatīvas funkcijas f griezums $[f]_t$ augstumā $t > 0$ nepārsniedz funkciju f kopā E, t.i.,*

$$\forall x \in E : [f]_t(x) \leq f(x).$$

3° *Kopā E nenegatīvas funkcijas f griezums $[f]_t$ augstumā $t > 0$ ir griezuma augstuma t augoša funkcija, t.i., ja $0 < t_1 \leq t_2$, tad*

$$\forall x \in E : 0 \leq [f]_{t_1}(x) \leq [f]_{t_2}(x).$$

4° *Ja f ir ierobežota nenegatīva funkcija kopā E, t.i., eksistē $K > 0$, ka $0 \leq f(x) \leq K$ jebkuram $x \in E$, tad $[f]_t = f$ jebkuram $t \geq K$.*

5° *Ja f ir nenegatīva mērojama funkcija kopā E, tad funkcijas f griezums $[f]_t$ jebkurā augstumā $t > 0$ arī ir mērojama funkcija kopā E.*

► Pierādīsim pēdējo īpašību. Jebkuram $a \in \mathbb{R}$ atrodam:

$$E\big[[f]_t \geq a\big] = \begin{cases} E[f \geq a], & \text{ja} \quad a \leq t, \\ \emptyset, & \text{ja} \quad a > t. \end{cases}$$

Tā kā f ir mērojama funkcija kopā E, tad saskaņā ar definīciju kopa E ir mērojama un funkcijas f Lebega kopa $E[f \geq a]$ ir mērojama jebkuram $a \in \mathbb{R}$. Tukšā kopa $\emptyset$ arī ir mērojama. Tātad funkcijas f griezuma $[f]_t$ $(t > 0)$ Lebega kopa $E\big[[f]_t \geq a\big]$ ir mērojama jebkuram $a \in \mathbb{R}$, t.i., funkcijas f griezums $[f]_t$ $(t > 0)$ ir mērojama funkcija.◄

Iesakām lasītājam patstāvīgi pierādīt pirmās četras griezumu īpašības.

4.1.2. Nenegatīvu funkciju summējamība

Vispirms formulēsim divas lemmas, kuras iesakām lasītajam patstāvīgi pierādīt (skat. 1. un 2. uzdevumu nodaļas beigās, kā arī [30, 14.-15.,70.-72. lpp.]).

1. lemma. *Apskatīsim augošu virkni (a_n), kuras locekļi ir vai nu nenegatīvi skaitļi, vai arī $+\infty$.*

1. *Kopai $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ eksistē suprēms $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$, pie tam*
   - $0 \le \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n < +\infty$, *ja virknei eksistē vismaz viena galīga mažorante (šajā gadījumā visi virknes (a_n) locekļi ir nenegatīvi skaitļi);*
   - $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = +\infty$, *ja vismaz viens virknes (a_n) loceklis ir vienāds ar $+\infty$, vai arī visi virknes (a_n) locekļi ir nenegatīvi skaitļi un virkne (a_n) ir neierobežota no augšas.*
2. *Virknei (a_n) eksistē robeža, kad $n \to \infty$, pie tam $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$.*

2. lemma. *Pieņemsim, ka φ ir nenegatīva augoša funkcija neierobežotā no augšas kopā $E \subset \mathbb{R}$.*

1. *Funkcijai φ eksistē robeža $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi(t)$, pie tam*
   - $0 \le \lim\limits_{t\to+\infty} \varphi(t) < +\infty$, *ja funkcija φ ir ierobežota no augšas kopā E;*
   - $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi(t) = +\infty$, *ja funkcija φ nav ierobežota no augšas kopā E.*
2. *Ir spēkā vienādība $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi(t) = \sup\limits_{t\in E} \varphi(t)$.*

Nenegatīvu mērojamu funkciju Lebega integrālis vispirms tiks definēts galīga mēra kopās (*1. solis*), bet tad - bezgalīga mēra kopās (*2. solis*).

<u>*1. solis.*</u> $\mathrm{m}(E) < +\infty$.

Ja f ir nenegatīva mērojama funkcija kopā E, tad saskaņā ar griezumu 1° un 5° īpašību funkcijas f griezums $[f]_t$ $(t > 0)$ ir ierobežota mērojama funkcija kopā E. Tāpēc $[f]_t$ $(t > 0)$ ir integrējama Lebega nozīmē funkcija šajā kopā 3.10. definīcijas nozīmē. Apskatīsim mainīgā $t > 0$ funkciju

$$\mathfrak{I}_t(f) = \int\limits_E [f]_t(x)dx.$$

Ja $0 < t_1 \le t_2$, tad saskaņā ar griezumu 3° īpašību

$$\forall x \in E : 0 \le [f]_{t_1}(x) \le [f]_{t_2}(x).$$

No ierobežotu funkciju Lebega integrāļa 5° un 6° īpašības izriet $0 \le \mathfrak{I}_{t_1}(f) \le \mathfrak{I}_{t_2}(f)$. Tātad $\mathfrak{I}_t(f)$ ir nenegatīva augoša funkcija intervālā $(0; +\infty)$. Saskaņā ar 2. lemmu eksistē robeža $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathfrak{I}_t(f)$, kura ir vai nu nenegatīvs skaitlis, vai arī $+\infty$, pie tam

$$\lim_{t\to+\infty} \mathfrak{I}_t(f) = \sup_{t\ge0} \mathfrak{I}_t(f) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{I}_n(f) = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{I}_n(f).$$

Šo robežu arī sauc par funkcijas f Lebega integrāli galīga mēra kopā E.

3. lemma. *Pieņemsim, ka f ir nenegatīva mērojama funkcija galīga mēra kopā E. Ja E_1 ir patvaļīga kopas E mērojama apakškopa, tad*

$$\int\limits_{E_1} f(x)dx \leq \int\limits_{E} f(x)dx.$$

► Apskatīsim galīga mēra kopā E nenegatīvu mērojamu funkciju f. Saskaņā ar griezumu 1° un 5° īpašību $[f]_t$ ir kopā E ierobežota nenegatīva mērojama funkcija jebkuram $t > 0$. Tāpēc funkcija $[f]_t$ ir integrējama Lebega nozīmē kopā E (3.10. definīcijas nozīmē) jebkuram $t > 0$. No ierobežotu funkciju Lebega integrāļa 11° īpašības izriet, ka $[f]_t$ ir integrējama Lebega nozīmē funkcija jebkurā kopas E mērojamā apakškopā E_1, pie tam

$$\int\limits_{E_1} [f]_t(x)dx \leq \int\limits_{E} [f]_t(x)dx.$$

Tā kā funkcija $[f]_t$ ir nenegatīva kopā E (tātad arī kopas E apakškopā E_1), tad integrāļiem, kuri atrodas pēdējās nevienādības abās pusēs un kuri ir atkarīgi no parametra $t > 0$, eksistē robežas (- galīgas vai $+\infty$), kad $t \to +\infty$. Pārejot pēdējā nevienādībā pie robežas, kad $t \to +\infty$, atrodam

$$\lim_{t\to+\infty} \int\limits_{E_1} [f]_t(x)dx \leq \lim_{t\to+\infty} \int\limits_{E} [f]_t(x)dx \quad \text{jeb} \quad \int\limits_{E_1} f(x)dx \leq \int\limits_{E} f(x)dx. \blacktriangleleft$$

<u>*2. solis.*</u> $\mathrm{m}(E) = +\infty$.

Ja f ir nenegatīva mērojama funkcija kopā E, tad, ņemot vērā 1. soli, ir definēti integrāļi

$$\int\limits_{e_n} f(x)dx \quad (n \in \mathbb{N})$$

galīga mēra kopās $e_n = E \cap [-n; n]$ $(n \in \mathbb{N})$, pie tam šie integrāļi ir vai nu nenegatīvi skaitļi, vai arī $+\infty$. Atzīmēsim, ka kopu virkne $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ ir augoša, t.i., $e_n \subset e_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$, pie tam $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} e_n$. No 3. lemmas izriet, ka

$$\left(\int\limits_{e_n} f(x)dx \right)_{n=1}^{\infty}$$

ir augoša virkne, kuras locekļi ir vai nu nenegatīvi skaitļi, vai arī $+\infty$. Saskaņā ar 1. lemmu šai virknei eksistē robeža, kad $n \to \infty$, kura ir vai nu nenegatīvs skaitlis, vai arī $+\infty$, pie tam

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{e_n} f(x)dx = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{e_n} f(x)dx.$$

Šo robežu arī sauc par funkcijas f Lebega integrāli bezgalīga mēra kopā E. Pamatojumu šādai Lebega integrāļa definīcijai sniedz ierobežotu funkciju Lebega integrāļa 19° īpašība.

Sniegsim attiecīgo definīciju.

4.2. definīcija. Apskatīsim kopā E nenegatīvu mērojamu funkciju f.

1. Pieņemsim, ka $\mathrm{m}(E) < +\infty$. Par **funkcijas f Lebega integrāli kopā** E sauc robežu $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathfrak{I}_t(f)$, kur
$$\mathfrak{I}_t(f) = \int\limits_E [f]_t(x)dx.$$
Lebega integrāli kopā E apzīmē ar $\int\limits_E f(x)dx$, t.i.,
$$\int\limits_E f(x)dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{t\to+\infty} \mathfrak{I}_t(f) = \lim_{t\to+\infty} \int\limits_E [f]_t(x)dx.$$
2. Pieņemsim, ka $\mathrm{m}(E) = +\infty$. Apskatīsim kopas $e_n = E \cap [-n; n]$ $(n \in \mathbb{N})$. Par **funkcijas f Lebega integrāli kopā** E sauc robežu $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{e_n} f(x)dx$. Lebega integrāli kopā E apzīmē ar $\int\limits_E f(x)dx$, t.i.,
$$\int\limits_E f(x)dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \int\limits_{e_n} f(x)dx.$$

Ja $\int\limits_E f(x)dx < +\infty$, tad f sauc par **summējamu funkciju kopā** E (vai **integrējamu Lebega nozīmē funkciju kopā** E).

4.1. piezīme. Pieņemsim, ka f ir nenegatīva ierobežota mērojama funkcija galīga mēra kopā E. Tad no griezumu 4° īpašības izriet, ka eksistē tāds skaitlis $K > 0$, ka $[f]_t = f$ visiem $t \geq K$. Tāpēc
$$\lim_{t\to+\infty} \mathfrak{I}_t(f) = \lim_{t\to+\infty} \int\limits_E [f]_t(x)dx = \lim_{t\to+\infty} \int\limits_E f(x)dx = \int\limits_E f(x)dx,$$
kur $\int\limits_E f(x)dx$ ir galīga mēra kopā E ierobežotas mērojamas funkcijas f Lebega integrālis šajā kopā 3.10. definīcijas nozīmē. Tātad *jebkura galīga mēra kopā E ierobežota nenegatīva mērojama funkcija f ir summējama funkcija šajā kopā, pie tam funkcijas f Lebega integrālis iepriekšējās nodaļas 3.10. definīcijas nozīmē ir vienāds ar funkcijas f Lebega integrāli šīs nodaļas 4.2. definīcijas nozīmē*. Tāpēc viena un tā paša apzīmējuma $\int\limits_E f(x)dx$ izmantošana, lai apzīmētu funkcijas f Lebega integrāli gan vienas, gan otras definīcijas nozīmē, ir korekta.

4.1. piemērs. *Jebkura nulles mēra kopā E nenegatīva funkcija f ir summējama funkcija šajā kopā, pie tam*
$$\int\limits_E f(x)dx = 0.$$

► Saskaņā ar griezumu 1° īpašību funkcijas f griezums $[f]_t$ $(t > 0)$ ir ierobežota funkcija kopā E. Tā kā E ir nulles mēra kopa, tad saskaņā ar 3.4. piezīmi
$$\mathfrak{I}_t(f) = \int\limits_E [f]_t(x)dx = 0 \quad (t > 0).$$

Tāpēc

$$\int\limits_E f(x)dx = \lim_{t\to+\infty} \mathfrak{I}_t(f) = 0.$$

Tātad f ir summējama funkcija kopā E, pie tam tās Lebega integrālis šajā kopā ir vienāds ar nulli.◀

4.2. piemērs. *Nullfunkcijas $\mathbb{O}$ Lebega integrālis jebkurā mērojamā kopā E ir vienāds ar nulli, t.i.,*

$$\int\limits_E \mathbb{O}(x)dx = 0.$$

Tāpēc nullfunkcija $\mathbb{O}$ ir summējama funkcija jebkurā mērojamā kopā E.

▶ Apskatīsim divus gadījumus.

1. Pieņemsim, ka $\mathrm{m}(E) < +\infty$. No griezumu 2° īpašības izriet, ka jebkurš nullfunkcijas kopā E griezums šajā kopā ir vienāds ar pašu nullfunkciju, t.i., jebkuram $t > 0$ un patvaļīgam $x \in E$ ir spēkā $[\mathbb{O}]_t(x) = 0$. Tāpēc, ņemot vērā 3.6. piezīmi, iegūsim

$$\mathfrak{I}_t(\mathbb{O}) = \int\limits_E [\mathbb{O}]_t(x)dx = 0 \quad (t > 0).$$

Tātad

$$\int\limits_E \mathbb{O}(x)dx = \lim_{t\to\infty} \mathfrak{I}_t(\mathbb{O}) = \lim_{t\to\infty} 0 = 0$$

(skat. arī 4.1. piezīmi).

2. Pieņemsim, ka $\mathrm{m}(E) = +\infty$. Apskatīsim galīga mēra kopas

$$e_n = E \cap [-n; n] \ (n \in \mathbb{N}).$$

Ņemot vērā iepriekš pierādīto, iegūsim

$$\int\limits_E \mathbb{O}(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{e_n} \mathbb{O}(x)dx = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Tādējādi nullfunkcijas Lebega integrālis jebkurā mērojamā kopā E ir vienāds ar nulli, no kurienes izriet, ka nullfunkcija ir summējama funkcija jebkurā mērojamā kopā E.◀

4.3. piemērs. *Pieņemsim, ka c ir nenegatīvs skaitlis, bet E ir mērojama kopa. Ja f ir c-konstanta funkcija kopā E, t.i., $f(x) = c$ jebkuram $x \in E$, tad*

$$\int\limits_E f(x)dx = c \cdot \mathrm{m}(E) \quad \textit{jeb} \int\limits_E c\, dx = c \cdot \mathrm{m}(E). \tag{4.3}$$

Kopā E pozitīva konstanta funkcija f ir summējama kopā E tad un tikai tad, kad E ir galīga mēra kopa.

▶ Saskaņā ar mērojamu funkciju 1° īpašību mērojamā kopā konstanta funkcija ir mērojama funkcija dotajā kopā. Tāpēc integrālis vienādības (4.3) kreisajā pusē ir definēts. Pierādīsim vienādību (4.3). Ja $\mathrm{m}(E) < +\infty$, tad vienādības (4.3) patiesums izriet no 3.5. piezīmes. Pieņemsim, ka $\mathrm{m}(E) = +\infty$.

- Ja $c = 0$, tad $f = \mathbb{O}$ ir nullfunkcija kopā E. No 4.3. piemēra seko, ka $\int\limits_E f(x)dx = 0$. Tāpēc vienādība (4.3) ir patiesa, ja uzskatīt, ka $0 \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot 0 = 0$ (skat. 6.1.2. apakšparagrāfu).
- Pieņemsim, ka $c > 0$. Apskatīsim galīga mēra kopas $e_n = E \cap [-n; n]$ $(n \in \mathbb{N})$. Tā kā kopu virkne $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ ir augoša, t.i., $e_n \subset e_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$, pie tam $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} e_n = E$, tad no Lebega mēra pusnepārtauktības no apakšas izriet $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{m}(e_n) = \mathrm{m}(E)$. No integrāļa definīcijas, ņemot vērā pēdējo vienādību, 3.5. piezīmi un skaitlisku virkņu robežu īpašības, iegūsim

$$\int\limits_E f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{e_n} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} c \cdot \mathrm{m}(e_n) = c \lim_{n\to\infty} \mathrm{m}(e_n) = c \cdot \mathrm{m}(E).$$

Vienādība (4.3) ir pierādīta. No šīs vienādības izriet, ka kopā E pozitīva konstanta funkcija f ir summējama kopā E tad un tikai tad, kad E ir galīga mēra kopa.◀

4.1.3. Nepozitīvu funkciju summējamība

Pieņemsim, ka f ir nepozitīva funkcija kopā E, t.i., $f(x) \leq 0$ jebkuram $x \in E$. Tad tās pretējā funkcija $-f = |f|$ ir nenegatīva funkcija kopā E.

4.3. definīcija. Pieņemsim, ka f ir nepozitīva mērojama funkcija kopā E. Par **funkcijas f Lebega integrāli kopā** E sauc funkcijas f pretējās funkcijas $-f = |f|$ Lebega integrāli kopā E, ņemtu ar pretēju zīmi. Funkcijas f Lebega integrāli apzīmē ar $\int\limits_E f(x)dx$, t.i.,

$$\int\limits_E f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} -\int\limits_E \big|f(x)\big|dx. \tag{4.4}$$

Ja $\int\limits_E f(x)dx > -\infty$, tad funkciju f sauc par **summējamu funkciju kopā** E (vai **integrējamu Lebega nozīmē funkciju kopā** E).

4.2. piezīme. Sniegsim dažus ar šo definīciju saistītus komentārus.

- Jebkurai nepozitīvai mērojamai funkcijai f kopā E eksistē Lebega integrālis kopā E, kurš ir vai nu nepozitīvs skaitlis, vai arī $-\infty$. Taču ne katra šāda funkcija f ir summējama kopa E, jo funkcija f ir summējama kopā E tad un tikai tad, kad tās Lebega integrālis kopā E ir nepozitīvs skaitlis.
- No 4.3. definīcijas, ņemot vērā 4.8. piezīmi, var secināt, ka *jebkura ierobežota nepozitīva mērojama funkcija galīga mēra kopā E ir summējama funkcija šajā kopā, pie tam funkcijas f Lebega integrālis kopā E iepriekšējās nodaļas 3.10. definīcijas nozīmē ir vienāds ar funkcijas f Lebega integrāli 4.3. definīcijas nozīmē*. Tāpēc viena un tā paša apzīmējuma $\int\limits_E f(x)dx$ izmantošana, lai apzīmētu funkcijas f Lebega integrāli gan vienas, gan otras definīcijas nozīmē, ir korekta.

- Nākamajā paragrāfā tiks aplūkotas nenegatīvu summējamu funkciju īpašības. Izmantojot vienādību (4.4), viegli var iegūt attiecīgās nepozitīvu summējamu funkciju īpašības. Tāpēc, aplūkojot patstāvīgas zīmes funkciju summējamības teoriju, aprobežosimies ar nenegatīvām funkcijām.

4.4. piemērs. *Jebkura nulles mēra kopā E nepozitīva funkcija f ir summējama funkcija šajā kopā, pie tam*

$$\int\limits_E f(x)dx = 0.$$

► Ņemot vērā 4.1. piemēru un vienādību (4.4), iegūsim

$$\int\limits_E f(x)dx = -\int\limits_E \big|f(x)\big|dx = -0 = 0.$$

Tādējādi nepozitīvas mērojamas funkcijas f Lebega integrālis nulles mēra kopā E ir vienāds ar nulli, no kurienes izriet, ka nulles mēra kopā E nepozitīva mērojama funkcija f ir summējama funkcija kopā E.◄

4.2. Nenegatīvu summējamu funkciju īpašības

4.2.1. Nenegatīvu summējamu funkciju linearitāte

1° *Ja f un g ir nenegatīvas mērojamas funkcijas kopā E, tad*

$$\int\limits_E \big(f(x)+g(x)\big)dx = \int\limits_E f(x)dx + \int\limits_E g(x)dx. \tag{4.5}$$

Ja f un g ir nenegatīvas summējamas funkcijas kopā E, tad šo funkciju summa $f+g$ arī ir summējama funkcija kopā E.

► a) Pieņemsim, $\mathrm{m}(E) < +\infty$. Apskatīsim kopā E nenegatīvas mērojamas funkcijas f un g. Tad šo funkciju summa $f+g$ arī ir nenegatīva mērojama funkcija kopā E. Saskaņā ar griezumu 1° un 5° īpašību $[f]_t$, $[g]_t$ un $[f+g]_t$ ir ierobežotas nenegatīvas mērojamas funkcijas kopā E jebkuram $t > 0$. Tāpēc funkcijas $[f]_t$, $[g]_t$ un $[f+g]_t$ ir integrējamas Lebega nozīmē kopā E (3.10. definīcijas nozīmē) jebkuram $t > 0$, pie tam šo funkciju Lebega integrāļiem kopā E, kuri ir atkarīgi no parametra $t > 0$, eksistē robežas (- galīgas vai $+\infty$), kad $t \to +\infty$.

Pierādīsim, ka katram $t > 0$ un jebkuram $x \in E$ ir spēkā

$$[f]_t(x) + [g]_t(x) \le f(x) + g(x). \tag{4.6}$$

Fiksēsim $t > 0$. No griezumu 1° īpašības izriet, ka jebkuram $x \in E$ ir spēkā $[f]_t(x) \le f(x)$ un $[g]_t(x) \le g(x)$. Saskaitot šīs vienādības, iegūsim, ka jebkuram $x \in E$ ir spēkā (4.6).

Pierādīsim, ka jebkuram $x \in E$ ir izpildās

$$[f+g]_t(x) \le [f]_t(x) + [g]_t(x). \tag{4.7}$$

Apskatīsim patvaļīgu $x \in E$.

Pieņemsim, ka $x \in E[f \le t] \cap E[g \le t]$, t.i., $x \in E[f \le t]$ un $x \in E[g \le t]$, t.i., $f(x) \le t$ un $g(x) \le t$, no kurienes, ņemot vērā griezuma definīciju, iegūsim $[f]_t(x) = f(x)$ un $[g]_t(x) = g(x)$. Izmantojot griezumu 1° īpašību, atrodam

$$[f+g]_t(x) \le (f+g)(x) = f(x) + g(x) = [f]_t(x) + [g]_t(x).$$

Tātad nevienādība (4.7) izpildās.

Pieņemsim, ka $x \notin E[f \le t] \cap E[g \le t]$. Tātad $x \in E[f > t] \cup E[g > t]$, t.i., $x \in E[f > t]$ vai $x \in E[g > t]$, t.i., $f(x) > t$ vai $g(x) > t$. Noteiktības labad pieņemsim, ka $f(x) > t$. Tad $f(x) + g(x) > t$, jo $g(x) \ge 0$. Tāpēc no griezuma definīcijas seko, ka

$$[f+g]_t(x) = t = [f]_t(x) \le [f]_t(x) + [g]_t(x),$$

jo $[g]_t(x) \ge 0$. Tātad arī šajā gadījumā nevienādība (4.7) izpildās.

No (4.7), ņemot vērā ierobežotas mērojamas funkcijas Lebega integrāļa 6° un 1° īpašību, iegūsim

$$\int\limits_E [f+g]_t(x)dx \le \int\limits_E \big([f]_t(x) + [g]_t(x)\big)dx = \int\limits_E [f]_t(x)dx + \int\limits_E [g]_t(x)dx$$

jeb

$$\int\limits_E [f+g]_t(x)dx \le \int\limits_E [f]_t(x)dx + \int\limits_E [g]_t(x)dx,$$

no kurienes, izmantojot teorēmu par robežpāreju nevienādībās un summas robežas īpašību, atrodam

$$\lim_{t\to+\infty} \int\limits_E [f+g]_t(x)dx \le \lim_{t\to+\infty} \int\limits_E [f]_t(x)dx + \lim_{t\to+\infty} \int\limits_E [g]_t(x)dx$$

jeb

$$\int\limits_E \big(f(x) + g(x)\big)dx \le \int\limits_E f(x)dx + \int\limits_E g(x)dx. \tag{4.8}$$

No (4.6), ņemot vērā ierobežotas mērojamas funkcijas Lebega integrāļa 1° un 6° īpašību, iegūsim

$$\int\limits_E [f]_t(x)dx + \int\limits_E [g]_t(x)dx = \int\limits_E \big([f]_t(x) + [g]_t(x)\big)dx \le \int\limits_E \big(f(x) + g(x)\big)(x)dx$$

jeb

$$\int\limits_E [f]_t(x)dx + \int\limits_E [g]_t(x)dx \le \int\limits_E \big(f(x) + g(x)\big)dx,$$

no kurienes, izmantojot teorēmu par robežpāreju nevienādībās un summas robežas īpašību, atrodam

$$\lim_{t\to+\infty} \int\limits_E [f]_t(x)dx + \lim_{t\to+\infty} \int\limits_E [g]_t(x)dx \le \int\limits_E \big(f(x) + g(x)\big)dx$$

jeb

$$\int\limits_E f(x)dx + \int\limits_E g(x)dx \le \int\limits_E \big(f(x) + g(x)\big)dx. \tag{4.9}$$

No (4.8) un (4.9) izriet (4.5). Tādējādi vienādība (4.5) ir pierādīta gadījumā, kad E ir galīga mēra kopa.

b) Pieņemsim, ka $\mathrm{m}(E) = +\infty$. Apskatīsim kopā E nenegatīvas mērojamas funkcijas f un g. Tā kā $e_n = E \cap [-n; n]$ $(n \in \mathbb{N})$ ir galīga mēra kopas, tad no a) punktā pierādītā izriet

$$\int\limits_{e_n} \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int\limits_{e_n} f(x)dx + \int\limits_{e_n} g(x)dx \ (n \in \mathbb{N}).$$

Pārejot šajās vienādībās pie robežas, kad $n \to \infty$, un ņemot vērā 4.2. definīciju, iegūsim (4.5). Tātad vienādība (4.5) ir spēkā arī tad, ja E ir bezgalīga mēra kopa.

c) Ja f un g ir summējamas funkcijas kopā E, t.i.,

$$\int\limits_E f(x)dx < +\infty, \quad \int\limits_E g(x)dx < +\infty,$$

tad no (4.5) izriet, ka

$$\int\limits_E \big(f(x) + g(x)\big)dx < +\infty,$$

t.i., $f + g$ arī ir summējama funkcija kopā E.◀

2° *Ja f ir nenegatīva mērojama funkcija kopā E, tad jebkuram $\lambda \in \mathbb{R}$ ir spēkā*

$$\int\limits_E \lambda f(x)dx = \lambda \int\limits_E f(x)dx. \tag{4.10}$$

Ja f ir nenegatīva summējama funkcija kopā E un $\lambda \in \mathbb{R}$, tad λf arī ir summējama funkcija kopā E.

▶ a) Pieņemsim, ka $\mathrm{m}(E) < +\infty$. Apskatīsim kopā E nenegatīvu mērojamu funkciju f. Tad λf, kur $\lambda \in \mathbb{R}$, arī ir mērojama funkcija kopā E.

Tagad apskatīsim trīs gadījumus, kad $\lambda = 0$, $\lambda > 0$ un $\lambda < 0$.

a$_1$) Pieņemsim, ka $\lambda = 0$. Tad $\lambda f(x) = 0$ jebkuram $x \in E$, t.i., funkcija λf ir vienāda ar nullfunkciju $\mathbb{O}$ kopā E. Tāpēc, ņemot vērā 4.2. piemēru, iegūsim

$$\int\limits_E \lambda f(x)dx = \int\limits_E \mathbb{O}(x)dx = 0. \tag{4.11}$$

No otras puses, kopā E nenegatīvas mērojamas funkcijas f Lebega integrālis ir vai nu nenegatīvs skaitlis, vai arī $+\infty$. Tāpēc

$$\lambda \int\limits_E f(x)dx = 0, \tag{4.12}$$

ja uzskatīt, ka $0 \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot 0 = 0$, gadījumā, kad $\lambda = 0$ (skat. 6.1.2. apakšparagrāfu). No (4.11) un (4.12) izriet (4.10).

a$_2$) Pieņemsim, ka $\lambda > 0$. Saskaņā ar griezumu 1° un 5° īpašību $[\lambda f]_t$ ir ierobežota nenegatīva mērojama funkcija kopā E jebkuram $t > 0$. Tāpēc funkcija $[\lambda f]_t$ ir integrējama Lebega nozīmē kopā E (3.10. definīcijas nozīmē) jebkuram $t > 0$, pie tam funkcijas $[\lambda f]_t$

Lebega integrālim kopā E, kurš ir atkarīgs no parametra $t > 0$, eksistē robeža (- galīga vai $+\infty$), kad $t \to +\infty$.

Pierādīsim, ka

$$[\lambda f]_t(x) = \lambda [f]_{\frac{t}{\lambda}}(x) \ (x \in E). \tag{4.13}$$

Atrodam:

$$[\lambda f]_t(x) = \begin{cases} \lambda f(x), & \text{ja} \quad x \in E[\lambda f \le t] = E\left[f \le \frac{t}{\lambda}\right], \\ t, & \text{ja} \quad x \in E[\lambda f > t] = E\left[f > \frac{t}{\lambda}\right]; \end{cases} \tag{4.14}$$

$$[f]_{\frac{t}{\lambda}}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ja} \quad x \in E\left[f \le \frac{t}{\lambda}\right], \\ \frac{t}{\lambda}, & \text{ja} \quad x \in E\left[f > \frac{t}{\lambda}\right]. \end{cases} \tag{4.15}$$

Sareizinot (4.15) abas puses ar λ, iegūsim

$$\lambda [f]_{\frac{t}{\lambda}}(x) = \begin{cases} \lambda f(x), & \text{ja} \quad x \in E\left[f \le \frac{t}{\lambda}\right], \\ t, & \text{ja} \quad x \in E\left[f > \frac{t}{\lambda}\right]. \end{cases} \tag{4.16}$$

No (4.14) un (4.16) izriet (4.13).

No (4.13), ņemot vērā ierobežotu funkciju Lebega integrāļa 2° īpašību, atrodam

$$\int\limits_E [\lambda f]_t(x)dx = \lambda \int\limits_E [f]_{\frac{t}{\lambda}}(x)dx. \tag{4.17}$$

Vienādībā (4.17) pārejot pie robežas, kad $t \to +\infty$, un ievērojot, ka $t \to +\infty$ tad un tikai tad, kad $\frac{t}{\lambda} \to +\infty$, jo $\lambda > 0$, iegūsim

$$\lim_{t\to+\infty} \int\limits_E [\lambda f]_t(x)dx = \lambda \lim_{t\to+\infty} \int\limits_E [f]_{\frac{t}{\lambda}}(x)dx \quad \text{un} \quad \int\limits_E \lambda f(x)dx = \lambda \int\limits_E f(x)dx,$$

t.i., vienādība (4.10) ir patiesa, ja $\lambda > 0$.

a$_3$) Pieņemsim, ka $\lambda < 0$. Tā kā $\big|\lambda f(x)\big| = |\lambda|\big|f(x)\big| \ge 0$ visiem $x \in E$ un $\big|f(x)\big| = f(x)$ visiem $x \in E$, jo f ir kopā E nenegatīva funkcija, tad saskaņā ar a$_2$) punktā pierādīto

$$\int\limits_E \big|\lambda f(x)\big|dx = \int\limits_E |\lambda|\big|f(x)\big|dx = |\lambda| \int\limits_E \big|f(x)\big|dx = |\lambda| \int\limits_E f(x)dx$$

jeb

$$\int\limits_E \big|\lambda f(x)\big|dx = |\lambda| \int\limits_E f(x)dx. \tag{4.18}$$

Tā kā $\lambda < 0$ un $f(x) \ge 0$ visiem $x \in E$, tad $\lambda f(x) \le 0$ visiem $x \in E$, t.i., λf ir nepozitīva funkcija. Ņemot vērā nepozitīvas funkcijas Lebega integrāļa definīciju un (4.18), atrodam

$$\int\limits_E \lambda f(x)dx = -\int\limits_E \big|\lambda f(x)\big|dx = -|\lambda| \int\limits_E f(x)dx = \lambda \int\limits_E f(x)dx,$$

t.i., vienādība (4.10) ir patiesa, ja $\lambda < 0$.

b) Pieņemsim, ka $\mathrm{m}(E) = +\infty$. Apskatīsim kopā E nenegatīvu mērojamu funkciju f. Tā kā $e_n = E \cap [-n; n]$ $(n \in \mathbb{N})$ ir galīga mēra kopas, tad no a) punktā pierādītā izriet, ka jebkuram $\lambda \in \mathbb{R}$ ir spēkā

$$\int\limits_{e_n} \lambda f(x)dx = \lambda \int\limits_{e_n} f(x)dx \ (n \in \mathbb{N}).$$

Pārejot šajās vienādībās pie robežas, kad $n \to \infty$, un ņemot vērā 4.2. un 4.3. definīciju, iegūsim (4.10). Tātad vienādība (4.10) ir spēkā arī tad, ja E ir bezgalīga mēra kopa.

c) Ja f ir nenegatīva summējama funkcija kopā E, t.i., $0 \le \int\limits_E f(x)dx < +\infty$, bet $\lambda \in \mathbb{R}$, tad no vienādības (4.10) izriet

$$\int\limits_E \lambda f(x)dx \begin{cases} \in [0; +\infty), & \text{ja} \quad \lambda > 0, \\ = 0, & \text{ja} \quad \lambda = 0, \\ \in (-\infty; 0], & \text{ja} \quad \lambda < 0, \end{cases}$$

t.i., λf arī ir summējama funkcija kopā E.◀

3° *Ja f un g ir nenegatīvas mērojamas funkcijas kopā E, tad jebkuriem $\lambda, \mu \ge 0$ ir spēkā*

$$\int\limits_E \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)dx = \lambda \int\limits_E f(x)dx + \mu \int\limits_E g(x)dx. \tag{4.19}$$

Ja f un g ir nenegatīvas summējamas funkcijas kopā E, tad jebkura šo funkciju lineārā kombinācija $\lambda f + \mu g$, kur $\lambda, \mu \ge 0$, arī ir summējama funkcija kopā E.

▶ Īpašības patiesums seko no šī paragrāfa 1° un 2° īpašības.◀

4° **Nenegatīvu summējamu funkciju linearitāte.** *Ja $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ir nenegatīvas mērojamas funkcijas kopā E, tad jebkuriem $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \ge 0$ ir spēkā*

$$\int\limits_E \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j(x) \right) dx = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \int\limits_E f_j(x)dx. \tag{4.20}$$

Ja $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ir nenegatīvas summējamas funkcijas kopā E, tad jebkura šo funkciju lineārā kombinācija $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n$, kur $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \ge 0$, arī ir summējama funkcija kopā E.

▶ Īpašības patiesumu pierāda ar matemātiskās indukcijas metodi, izmantojot šī paragrāfa 3° īpašību.◀

4.3. piezīme. Nosacījumus $\lambda, \mu \ge 0$ un $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \ge 0$ šī paragrāfa attiecīgi 3° un 4° īpašībā var nomainīt ar attiecīgi nosacījumiem, ka vienādību (4.19) un (4.20) labajām pusēm ir jēga, ņemot vērā aritmētisko darbību paplašinātajā reālo skaitļu kopā $\widetilde{\mathbb{R}}$ definīcijas (skat. 6.1.2. apakšparagrāfu).

4.2.2. Nevienādību integrēšana

5° 1. *Ja f un g ir nenegatīvas mērojamas funkcijas kopā E, pie tam jebkuram $x \in E$ ir spēkā $f(x) \leq g(x)$, tad*

$$\int\limits_E f(x)dx \leq \int\limits_E g(x)dx. \tag{4.21}$$

Ja funkcija g ir summējama kopā E, tad arī funkcija f ir summējama kopā E. Ja funkcija f nav summējama kopā E, tad arī funkcija g nav summējama kopā E.

2. *Ja g ir nenegatīva mērojama funkcija kopā E, tad*

$$\int\limits_E g(x)dx \geq 0. \tag{4.22}$$

▶ 1. Pieņemsim, ka f un g ir kopā E nenegatīvas mērojamas funkcijas, pie tam jebkuram $x \in E$ ir spēkā $f(x) \leq g(x)$. Pierādīsim nevienādību (4.21).

a) Pieņemsim, ka $\mathrm{m}(E) < +\infty$. Saskaņā ar griezumu 1° un 5° īpašību $[f]_t$ un $[g]_t$ ir kopā E ierobežotas nenegatīvas mērojamas funkcijas jebkuram $t > 0$. Tāpēc funkcijas $[f]_t$ un $[g]_t$ ir integrējamas Lebega nozīmē kopā E (3.10. definīcijas nozīmē) jebkuram $t > 0$, pie tam šo funkciju Lebega integrāļiem kopā E, kuri ir atkarīgi no parametra $t > 0$, eksistē robežas (- galīgas vai $+\infty$), kad $t \to +\infty$.

Pierādīsim, ka katram $t > 0$ un jebkuram $x \in E$ ir spēkā nevienādība

$$[f]_t(x) \leq [g]_t(x). \tag{4.23}$$

Fiksēsim $t > 0$ un $x \in E$. Apskatīsim trīs iespējamos gadījumus.

Pieņemsim, ka $g(x) \leq t$. Tad $[g]_t(x) = g(x)$. Tā kā $f(x) \leq g(x)$, tad $f(x) \leq t$. Tāpēc $[f]_t(x) = f(x)$. Tātad

$$[f]_t(x) = f(x) \leq g(x) = [g]_t(x).$$

Pieņemsim, ka $f(x) \leq t < g(x)$. Tad $[f]_t(x) = f(x)$ un $[g]_t(x) = t$. Tātad

$$[f]_t(x) = f(x) \leq t = [g]_t(x).$$

Pieņemsim, ka $t < f(x) \leq g(x)$. Tad $[f]_t(x) = t$ un $[g]_t(x) = t$. Tātad

$$[f]_t(x) = t = [g]_t(x).$$

Nevienādība (4.23) ir pierādīta.

No (4.23), ņemot vērā ierobežotu funkciju Lebega integrāļa 6° īpašību, iegūsim

$$\int\limits_E [f]_t(x)dx \leq \int\limits_E [g]_t(x)dx.$$

Pārejot šajā nevienādībā pie robežas, kad $t \to +\infty$, un ņemot vērā 4.2. definīciju, atrodam

$$\lim_{t\to+\infty} \int\limits_E [f]_t(x)dx \leq \lim_{t\to+\infty} \int\limits_E [g]_t(x)dx$$

jeb

$$\int\limits_E f(x)dx \le \int\limits_E g(x)dx,$$

t.i., nevienādība (4.21) ir patiesa, ja E ir galīga mēra kopa.

b) Pieņemsim, ka $\mathrm{m}(E) = +\infty$. Apskatīsim kopā E nenegatīvas mērojamas funkcijas f un g, ka jebkuram $x \in E$ ir spēkā $f(x) \le g(x)$. Tā kā $e_n = E \cap [-n; n]$ $(n \in \mathbb{N})$ ir galīga mēra kopas, tad no a) punktā pierādītā izriet

$$\int\limits_{e_n} f(x)dx \le \int\limits_{e_n} g(x)dx \ (n \in \mathbb{N}).$$

Pārejot šajās nevienādībās pie robežas, kad $n \to \infty$, iegūsim (4.21). Tātad vienādība (4.21) ir spēkā arī tad, ja E ir bezgalīga mēra kopa.

c) Ja g ir summējama funkcija kopā E, t.i., $\int\limits_E g(x)dx < +\infty$, tad no (4.21) seko, ka $\int\limits_E f(x)dx < +\infty$, t.i., f arī ir summējama funkcija kopā E. Savukārt, ja f nav summējama funkcija kopā E, t.i., $\int\limits_E f(x)dx = +\infty$, tad no (4.21) seko, ka $\int\limits_E g(x)dx = +\infty$, t.i., g arī nav summējama funkcija kopā E.

2. Pieņemsim, ka g ir nenegatīva mērojama funkcija kopā E. Ja $f = \mathbb{O}$ ir nullfunkcija kopā E, tad no 1. punktā pierādītā, ņemot vērā 4.2. piemēru, seko

$$0 = \int\limits_E f(x)dx \le \int\limits_E g(x)dx,$$

t.i., izpildās (4.22). ◄

4.4. piezīme. 5° īpašības 2. apgalvojumu var pierādīt, neizmantojot šīs īpašības 1. apgalvojumu, bet izmantojot 4.2. definīciju un 5° īpašību no 3.6.2. apakšparagrāfa. Iesakām lasītājam patstāvīgi to pierādīt.

6° *Pieņemsim, ka f ir nenegatīva mērojama funkcija kopā E.*

1. *Ja E_1 ir patvaļīga kopas E mērojama apakškopa, tad*

$$\int\limits_{E_1} f(x)dx \le \int\limits_E f(x)dx. \tag{4.24}$$

2. *Ja funkcija f ir summējama kopā E, tad f ir summējama funkcija arī jebkurā kopas E mērojamā apakškopā E_1, pie tam ir patiesa nevienādība (4.24).*
3. *Ja funkcija f nav summējama kādā kopas E mērojamā apakškopā E_1, tad funkcija f nav summējama arī kopā E.*

► 1. Apskatīsim kopā E nenegatīvu mērojamu funkciju f un patvaļīgu kopas E mērojamu apakškopu E_1. Ja E ir galīga mēra kopa, tad nevienādības (4.24) patiesums tika pierādīts 4.1.2. apakšparagrāfa 3. lemmā. Pieņemsim, ka $\mathrm{m}(E) = +\infty$. Tā kā

$e_n = E \cap [-n; n]$ un $e_{1n} = E_1 \cap [-n; n]$, kur $n \in \mathbb{N}$, ir galīga mēra kopas, pie tam $e_{1n} \subset e_n$ $(n \in \mathbb{N})$, tad no 4.1.2. apakšparagrāfa 3. lemmā pierādītā izriet

$$\int\limits_{e_{1n}} f(x)dx \leq \int\limits_{e_n} f(x)dx \ (n \in \mathbb{N}).$$

Pārejot šajās nevienādībās pie robežas, kad $n \to \infty$, un ņemot vērā 4.2. definīciju, iegūsim (4.24). Tātad vienādība (4.24) ir spēkā arī tad, ja E ir bezgalīga mēra kopa.

2. Ja funkcija f ir summējama kopā E, t.i., $\int\limits_E f(x)dx < +\infty$, bet E_1 ir patvaļīga kopas E mērojama apakškopa, tad no (4.24) seko, ka $\int\limits_{E_1} f(x)dx < +\infty$, t.i., f ir summējama funkcija apakškopā E_1.

3. Ja funkcija f nav summējama kādā kopas E mērojamā apakškopā E_1, t.i., $\int\limits_{E_1} f(x)dx = +\infty$, tad no (4.24) seko, ka $\int\limits_E f(x)dx = +\infty$, t.i., funkcija f nav summējama kopā E.◀

7° *Ja f ir nenegatīva mērojama funkcija kopā E, tad jebkuram $a > 0$ ir patiesa* ***Čebišova nevienādība***

$$\mathrm{m}\big(E[f \geq a]\big) \leq \frac{1}{a} \int\limits_E f(x)dx. \tag{4.25}$$

▶ Tā kā f ir mērojama funkcija kopā E, tad $E[f \geq a]$ ir kopas E mērojama apakškopa jebkuram $a > 0$. No šī paragrāfa 6° īpašības seko

$$\int\limits_{E[f \geq a]} f(x)dx \leq \int\limits_E f(x)dx. \tag{4.26}$$

Apskatīsim konstantu kopā E funkciju φ, ka $\varphi(x) = a$ jebkuram $x \in E$. Tad $f(x) \geq \varphi(x) = a$ jebkuram $x \in E[f \geq a]$. Tāpēc no šī paragrāfa 5° īpašības izriet

$$\int\limits_{E[f \geq a]} f(x)dx \geq \int\limits_{E[f \geq a]} adx. \tag{4.27}$$

No 4.3. piemēra seko

$$\int\limits_{E[f \geq a]} adx = a \cdot \mathrm{m}\big(E[f \geq a]\big). \tag{4.28}$$

No (4.26), (4.27) un (4.28), ņemot vērā, ka $a > 0$, izriet (4.25).◀

4.2.3. Nenegatīvu summējamu funkciju sanumurējamā aditivitāte

Formulēsim divas lemmas, kuras iesakām lasītājam patstāvīgi pierādīt (skat. 3. un 4. uzdevumu nodaļas beigās).

4. lemma. *Ja a_{nm} $(n, m \in \mathbb{N})$ ir nenegatīvi skaitļi vai $+\infty$, tad ir patiesas vienādības:*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{m \in \mathbb{N}} a_{nm} \right) = \sup_{m \in \mathbb{N}} \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} a_{nm} \right) = \sup_{n, m \in \mathbb{N}} a_{nm}.$$

5. lemma. *Pieņemsim, ka a_{nm} $(n, m \in \mathbb{N})$ ir nenegatīvi skaitļi vai $+\infty$. Ja virkne $(a_{nm})_{m=1}^{\infty}$ ir augoša jebkuram fiksētam $n \in \mathbb{N}$, bet virkne $(a_{nm})_{n=1}^{\infty}$ ir augoša jebkuram fiksētam $m \in \mathbb{N}$, tad ir patiesas vienādības:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty} a_{nm}\right) = \lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} a_{nm}\right) = \sup_{n,m\in\mathbb{N}} a_{nm}.$$

Tagad pierādīsim divas lemmas, kurām ir arī patstāvīga nozīme. Vispirms formulēsim problēmu, kas noved pie nākamās lemmas.

Pieņemsim, ka f ir nenegatīva mērojama funkcija kopā E. Ja E *ir galīga mēra kopa*, tad 4.1.2. apakšparagrāfa 1. solī funkcijas f Lebega integrālis kopā E tika definēts šādi:

$$\int\limits_E f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\int\limits_E [f]_t(x)dx. \tag{4.29}$$

Savukārt, ja E *ir bezgalīga mēra kopa*, tad 4.1.2. apakšparagrāfa 2. solī funkcijas f Lebega integrālis kopā E tika definēts kā šāda robeža:

$$\int\limits_E f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{e_n} f(x)dx, \tag{4.30}$$

kur

$$e_n = E \cap [-n; n] \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{4.31}$$

ir galīga mēra kopas, bet

$$\int\limits_{e_n} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\int\limits_{e_n} [f]_t(x)dx \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{4.32}$$

Mēģināsim rast atbildi uz jautājumu: *vai vienādība* (4.30) *paliks spēkā, ja E ir galīga mēra kopa, bet integrālis šīs vienādības kreisajā pusē tiek aprēķināts saskaņā ar formulu* (4.29)*?* Pozitīvu atbildi uz iepriekš uzstādīto jautājumu sniedz nākamā lemma.

6. lemma. *Pieņemsim, ka f ir nenegatīva mērojama funkcija* ***galīga*** *mēra kopā E. Tad ir patiesa vienādība* (4.30)*, kuras abās pusēs atrodošos integrāļus aprēķina pēc attiecīgi formulām* (4.29) *un* (4.32)*, t.i.,*

$$\lim_{t\to+\infty}\int\limits_E [f]_t(x)dx = \lim_{n\to\infty}\lim_{t\to+\infty}\int\limits_{e_n} [f]_t(x)dx.$$

► Apskatīsim kopas (4.31). Tad $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ ir galīga mēra kopu augoša virkne, t.i., $e_n \subset e_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$, pie tam $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} e_n = E$.

Tā kā $e_n \subset E$ $(n \in \mathbb{N})$, pie tam E ir galīga mēra kopa, tad no 4.1.2. apakšparagrāfa 3. lemmas seko

$$\int\limits_{e_n} f(x)dx \le \int\limits_E f(x)dx \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{4.33}$$

Tā kā $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ ir mērojamu kopu augoša virkne, tad no šī paragrāfa 6° īpašības izriet, ka virkne

$$\left(\int\limits_{e_n} f(x)dx\right)_{n=1}^{\infty} \tag{4.34}$$

ir augoša, tāpēc tai eksistē robeža, kad $n \to \infty$, pie tam, ņemot vērā (4.33), ir spēkā nevienādība

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{e_n} f(x)dx \le \int\limits_{E} f(x)dx. \tag{4.35}$$

No griezumu 2° īpašības izriet, ka $[f]_t(x) \le f(x)$ $(t > 0)$ jebkuram $x \in e_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Tāpēc no šī paragrāfa 5° īpašības seko

$$\int\limits_{e_n} [f]_t(x)dx \le \int\limits_{e_n} f(x)dx \quad (t > 0;\ n \in \mathbb{N}). \tag{4.36}$$

Tā kā $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ ir mērojamu kopu augoša virkne, tad no ierobežotu funkciju Lebega integrāļa 11° īpašības izriet, ka virkne

$$\left(\int\limits_{e_n} [f]_t(x)dx\right)_{n=1}^{\infty} \tag{4.37}$$

ir augoša un tāpēc tai eksistē robeža, kad $n \to \infty$. Iepriekš jau tika atzīmēts, ka virknei (4.34) arī eksistē robeža, kad $n \to \infty$. No (4.36) iegūsim

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{e_n} [f]_t(x)dx \le \lim_{n\to\infty} \int\limits_{e_n} f(x)dx \quad (t > 0). \tag{4.38}$$

Saskaņā ar ierobežotu funkciju Lebega integrāļa 19° īpašību

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{e_n} [f]_t(x)dx = \int\limits_{E} [f]_t(x)dx \quad (t > 0). \tag{4.39}$$

No (4.38) un (4.39) seko

$$\int\limits_{E} [f]_t(x)dx \le \lim_{n\to\infty} \int\limits_{e_n} f(x)dx \quad (t > 0),$$

no kurienes iegūsim

$$\lim_{t\to+\infty} \int\limits_{E} [f]_t(x)dx \le \lim_{n\to\infty} \int\limits_{e_n} f(x)dx$$

jeb

$$\int\limits_{E} f(x)dx \le \lim_{n\to\infty} \int\limits_{e_n} f(x)dx. \tag{4.40}$$

No (4.35) un (4.40) izriet (4.30).◀

7. lemma. *Ja f ir nenegatīva mērojama funkcija patvaļīga mēra kopā E, tad ir patiesa vienādība (4.30), kur kopas e_n ($n \in \mathbb{N}$) ir definētas saskaņā ar formulām (4.31).*

► Tiešām, ja E ir galīga mēra kopa, tad šī vienādība ir spēkā saskaņā ar 6. lemmu, savukārt, ja E ir bezgalīga mēra kopa, tad šī vienādība izsaka funkcijas f Lebega integrāļa kopā E 4.2. definīciju.◄

Tagad pierādīsim nenegatīvu summējamu funkciju sanumurējamās aditivitātes īpašību.

8° **Nenegatīvu summējamu funkciju sanumurējamā aditivitāte.** *Pieņemsim, ka mērojama kopa E ir ne vairāk kā sanumurējams savstarpēji nešķeļošos mērojamu apakškopu $E_k \subset E$ apvienojums, bet f ir nenegatīva mērojama funkcija kopā E.*

1. *Ir patiesa vienādība*
$$\int\limits_E f(x)dx = \sum_k \int\limits_{E_k} f(x)dx. \tag{4.41}$$
2. *Ja funkcija f ir summējama kopā E, tad f ir summējama funkcija katrā kopā E_k, pie tam ir patiesa vienādība (4.41).*

► 1. Pieņemsim, ka mērojama kopa E ir ne vairāk kā sanumurējams savstarpēji nešķeļošos mērojamu apakškopu $E_k \subset E$ apvienojums, bet f ir nenegatīva mērojama funkcija kopā E. Pierādīsim vienādību (4.41).

a) Pieņemsim, ka $\mathrm{m}(E) < +\infty$. Saskaņā ar griezumu 1° un 5° īpašību $[f]_t$ ir kopā E ierobežota nenegatīva mērojama funkcija jebkuram $t > 0$. Tāpēc funkcija $[f]_t$ ir integrējama Lebega nozīmē kopā E (3.10. definīcijas nozīmē) jebkuram $t > 0$, pie tam šīs funkcijas Lebega integrālim kopā E, kurš ir atkarīgs no parametra $t > 0$, eksistē robeža (- galīga vai $+\infty$), kad $t \to +\infty$.

a$_1$) Apskatīsim gadījumu, kad *indekss k pieņem galīgu skaitu vērtību* $1, 2, \ldots, n$. No ierobežotu funkciju Lebega integrāļa sanumurējamās aditivitātes seko, ka jebkuram $t > 0$ ir spēkā
$$\int\limits_E [f]_t(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{E_k} [f]_t(x)dx.$$
Pārejot šajā vienādībā pie robežas, kad $t \to +\infty$, iegūsim
$$\lim_{t\to+\infty} \int\limits_E [f]_t(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \lim_{t\to+\infty} \int\limits_{E_k} [f]_t(x)dx \quad \text{jeb} \quad \int\limits_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{E_k} f(x)dx,$$
t.i., vienādība (4.41) ir patiesa, ja indekss k pieņem galīgu skaitu vērtību $1, 2, \ldots, n$.

a$_2$) Apskatīsim gadījumu, kad *indekss k pieņem sanumurējamu apjomu vērtību* $1, 2, \ldots$.

No ierobežotu funkciju Lebega integrāļa sanumurējamās aditivitātes seko, ka jebkuram $t > 0$ ir spēkā
$$\int\limits_E [f]_t(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} [f]_t(x)dx. \tag{4.42}$$
Saskaņā ar griezumu 1° īpašību jebkuram $x \in E$ un katram $t > 0$ ir spēkā $[f]_t(x) \geq 0$. Tāpēc no ierobežotu funkciju Lebega integrāļa 5° īpašības izriet, ka visiem $k = 1, 2, \ldots$ un katram $t > 0$ izpildās
$$\int\limits_{E_k} [f]_t(x)dx \geq 0.$$

Tātad $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} [f]_t(x)dx$ ir rinda ar nenegatīviem locekļiem. Tāpēc jebkura šīs rindas parciālsumma nepārsniedz tās summu, t.i.,

$$\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{E_k} [f]_t(x)dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} [f]_t(x)dx \ (n \in \mathbb{N}). \tag{4.43}$$

No (4.42) un (4.43) iegūsim

$$\int\limits_{E} [f]_t(x)dx \geq \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{E_k} [f]_t(x)dx \ (n \in \mathbb{N}).$$

Pārejot šajās nevienādībās pie robežas, kad $t \to +\infty$, atrodam

$$\lim_{t\to+\infty} \int\limits_{E} [f]_t(x)dx \geq \sum_{k=1}^{n} \lim_{t\to+\infty} \int\limits_{E_k} [f]_t(x)dx \ (n \in \mathbb{N})$$

jeb

$$\int\limits_{E} f(x)dx \geq \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{E_k} f(x)dx \ (n \in \mathbb{N}). \tag{4.44}$$

Ja $\int\limits_{E} f(x)dx < +\infty$, tad no (4.44) seko, ka rindas $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f(x)dx$ ar nenegatīviem locekļiem jebkura parciālsumma ir ierobežota no augšas ar skaitli $\int\limits_{E} f(x)dx$, tāpēc dotā rinda konvergē, pie tam tās summa nepārsniedz šo skaitli, t.i.,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f(x)dx \leq \int\limits_{E} f(x)dx. \tag{4.45}$$

Acīmredzot, pēdējā nevienādība ir patiesa arī tad, ja $\int\limits_{E} f(x)dx = +\infty$, jo jebkuras rindas ar nenegatīviem locekļiem summa nepārsniedz $+\infty$.

Saskaņā ar griezumu 2° īpašību jebkuram $x \in E_k$ (k ir fiksēts indekss) un katram $t > 0$ ir spēkā $[f]_t(x) \leq f(x)$, no kurienes, ņemot vērā šī paragrāfa 5° īpašību, iegūsim

$$\int\limits_{E_k} [f]_t(x)dx \leq \int\limits_{E_k} f(x)dx \ (k \in \mathbb{N}).$$

No pēdējām nevienādībām, ņemot vērā rindu ar nenegatīviem locekļiem īpašību (skat. 6.4. paragrāfa beigas), atrodam

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} [f]_t(x)dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f(x)dx. \tag{4.46}$$

No ierobežotu funkciju Lebega integrāļa sanumurējamās aditivitātes izriet

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} [f]_t(x)dx = \int\limits_{E} [f]_t(x)dx. \tag{4.47}$$

No (4.46) un (4.47) seko

$$\int\limits_E [f]_t(x)dx \le \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f(x)dx. \tag{4.48}$$

Pārejot nevienādībā (4.48) pie robežas, kad $t \to +\infty$, iegūsim

$$\lim_{t\to+\infty} \int\limits_E [f]_t(x)dx \le \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f(x)dx$$

jeb

$$\int\limits_E f(x)dx \le \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f(x)dx. \tag{4.49}$$

No (4.45) un (4.49) izriet (4.41).

b) Pieņemsim, ka $\mathrm{m}(E) = +\infty$. Tā kā $e_n = E \cap [-n; n]$ un $e_{nk} = E_k \cap [-n; n]$, kur $n \in \mathbb{N}$, ir galīga mēra kopas, pie tam katram $n \in \mathbb{N}$ kopa e_n ir vienāda ar ne vairāk kā sanumurējamu tās savstarpēji nešķeļošos mērojamu apakškopu e_{nk} apvienojumu, tad no a) punktā pierādītā izriet

$$\int\limits_{e_n} f(x)dx = \sum_k \int\limits_{e_{nk}} f(x)dx \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{4.50}$$

No 7. lemmas izriet, ka jebkuram indeksam k ir spēkā vienādība

$$\int\limits_{E_k} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{e_{nk}} f(x)dx. \tag{4.51}$$

Vienādībā (4.50) pārejot pie robežas, kad $n \to \infty$, un izmantojot 4.2. definīciju, iegūsim

$$\int\limits_E f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_k \int\limits_{e_{nk}} f(x)dx. \tag{4.52}$$

Apskatīsim gadījumu, kad *indekss k pieņem galīgu skaitu vērtību* $1, 2, \ldots, m$. No (4.52), izmantojot (4.51), iegūsim

$$\int\limits_E f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{e_{nk}} f(x)dx = \sum_{k=1}^{m} \lim_{n\to\infty} \int\limits_{e_{nk}} f(x)dx = \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{E_k} f(x)dx,$$

t.i., apskatāmajā gadījumā vienādība (4.41) ir spēkā.

Pieņemsim, ka *indekss k pieņem sanumurējamu apjomu vērtību* $1, 2, \ldots$. Tad vienādība (4.52) iegūs veidu

$$\int\limits_E f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{e_{nk}} f(x)dx$$

jeb

$$\int\limits_E f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} a_{nm}, \tag{4.53}$$

kur

$$a_{nm} = \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{e_{nk}} f(x)dx \quad (n, m \in \mathbb{N}). \tag{4.54}$$

Viegli redzēt, ka a_{nm} $(n, m \in \mathbb{N})$ apmierina visus 5. lemmas nosacījumus (pārliecinieties!). Tāpēc no (4.53), ņemot vērā (4.54) un (4.51), iegūsim

$$\int\limits_E f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} a_{nm} = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} a_{nm} = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{e_{nk}} f(x)dx =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \lim_{n\to\infty} \int\limits_{e_{nk}} f(x)dx = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{E_k} f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f(x)dx,$$

t.i., izpildās vienādība (4.41). Tātad vienādība (4.41) ir spēkā arī tad, ja E ir bezgalīga mēra kopa.

2. Ja f ir summējama funkcija kopā E, tad no šī paragrāfa 6° īpašības seko, ka f ir summējama funkcija katrā kopā E_k. Vienādības (4.41) patiesums seko no 1. punktā pierādītā, ja ņemt vērā, ka funkcija f, būdama summējama kopā E, ir mērojama funkcija kopā E un jebkurā kopas E mērojamā apakškopā.◀

4.2.4. Sekas no nenegatīvu summējamu funkciju sanumurējamās aditivitātes

9° *Pieņemsim, ka mērojama kopa E ir ne vairāk kā sanumurējams savstarpēji nešķeļošos mērojamu apakškopu $E_k \subset E$ apvienojums, bet f ir nenegatīva funkcija kopā E.*

1. *Ja funkcija f ir mērojama katrā kopā E_k, tad funkcija f ir mērojama kopā E, pie tam ir patiesa vienādība*

$$\int\limits_E f(x)dx = \sum_k \int\limits_{E_k} f(x)dx. \tag{4.55}$$

2. *Ja indekss k pieņem sanumurējamu apjomu vērtību $1, 2, \ldots$ un funkcija f ir summējama katrā kopā E_k, pie tam*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f(x)dx < +\infty, \tag{4.56}$$

tad f ir summējama funkcija kopā E, pie tam ir patiesa vienādība

$$\int\limits_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f(x)dx. \tag{4.57}$$

3. *Ja indekss k pieņem galīgu skaitu vērtību $1, 2, \ldots, n$ un funkcija f ir summējama katrā kopā E_k, tad f ir summējama funkcija kopā E, pie tam ir patiesa vienādība*

$$\int\limits_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{E_k} f(x)dx. \tag{4.58}$$

▶ 1. Ja funkcija f ir mērojama katrā kopā E_k, tad no mērojamu funkciju 4° īpašības izriet, ka funkcija f ir mērojama kopā E. Vienādības (4.55) patiesums seko no šī paragrāfa 8° īpašības.

2. Pieņemsim, ka indekss k pieņem sanumurējamu apjomu vērtību $1, 2, \ldots$, bet f ir summējama funkcija katrā kopā E_k. Tad f ir mērojama funkcija katrā no šīm kopām. No 1. punktā pierādītā secinām, ka f ir mērojama funkcija kopā E. Tāpēc saskaņā ar šī paragrāfa 8° īpašību ir spēkā vienādība (4.57). Ja ir spēkā (4.56), tad no (4.57) seko, ka $\int\limits_E f(x)dx < +\infty$, t.i., f - summējama funkcija kopā E.

3. Pieņemsim, ka indekss k pieņem galīgu skaitu vērtību $1, 2, \ldots, n$, bet f ir summējama funkcija katrā kopā E_k, t.i., $\int\limits_{E_k} f(x)dx < +\infty$ jebkuram k. Tāpēc

$$\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{E_k} f(x)dx < +\infty. \tag{4.59}$$

Tā kā f ir summējama funkcija katrā kopā E_k, tad f ir mērojama funkcija katrā no šīm kopām. No 1. punktā pierādītā secinām, ka f ir mērojama funkcija kopā E. Tāpēc saskaņā ar šī paragrāfa 8° īpašību ir spēkā vienādība

$$\int\limits_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{E_k} f(x)dx,$$

no kurienes, ņemot vērā (4.59), iegūsim, ka $\int\limits_E f(x)dx < +\infty$, t.i., f ir summējama funkcija kopā E.◀

10° *1. Pieņemsim, ka f un g ir nenegatīvas mērojamas funkcijas kopā E, pie tam gandrīz visiem $x \in E$ ir spēkā $f(x) \leq g(x)$. Tad*

$$\int\limits_E f(x)dx \leq \int\limits_E g(x)dx. \tag{4.60}$$

Ja funkcija g ir summējama kopā E, tad arī funkcija f ir summējama kopā E. Ja funkcija f nav summējama kopā E, tad arī funkcija g nav summējama kopā E.

2. Pieņemsim, ka kopā E nenegatīvas mērojamas funkcijas f un g ir ekvivalentas funkcijas kopā E. Tad

$$\int\limits_E f(x)dx = \int\limits_E g(x)dx. \tag{4.61}$$

Funkcija f ir summējama kopā E tad un tikai tad, kad funkcija g ir summējama kopā E.

▶ 1. Tā kā $f(x) \leq g(x)$ gandrīz visiem $x \in E$, tad kopas $E_1 = E[f > g]$ Lebega mērs ir vienāds ar 0. Tā kā f un g ir nenegatīvas funkcijas nulles mēra kopā E_1, tad no 4.1. piemēra izriet

$$\int\limits_{E_1} f(x)dx = \int\limits_{E_1} g(x)dx = 0. \tag{4.62}$$

Kopa $E \setminus E_1$ ir mērojama kā divu mērojamu kopu starpība, jo kopa E ir mērojama saskaņā ar doto, bet E_1 ir mērojama kopa kā nulles mēra kopa. No mērojamu funkciju 3° īpašības izriet, ka f un g ir mērojamas funkcijas kopā $E \setminus E_1$. Tā kā $f(x) \leq g(x)$ jebkuram $x \in E \setminus E_1$, tad no šī paragrāfa 5° īpašības izriet

$$\int\limits_{E \setminus E_1} f(x)dx \leq \int\limits_{E \setminus E_1} g(x)dx. \tag{4.63}$$

Tā kā $E = E_1 \cup (E \setminus E_1)$ un $E_1 \cap (E \setminus E_1) = \emptyset$, tad no nenegatīvu summējamu funkciju sanumurējamās aditivitātes, ņemot vērā (4.62) un (4.63), seko

$$\int\limits_E f(x)dx = \int\limits_{E_1} f(x)dx + \int\limits_{E \setminus E_1} f(x)dx \leq \int\limits_{E_1} g(x)dx + \int\limits_{E \setminus E_1} g(x)dx = \int\limits_E g(x)dx,$$

t.i., izpildās (4.60). Ja g ir summējama funkcija kopā E, t.i., $\int\limits_E g(x)dx < +\infty$, tad no (4.60) seko, ka $\int\limits_E f(x)dx < +\infty$, t.i., f arī ir summējama funkcija kopā E. Savukārt, ja f nav summējama funkcija kopā E, t.i., $\int\limits_E f(x)dx = +\infty$, tad no (4.21) seko, ka $\int\limits_E g(x)dx = +\infty$, t.i., g arī nav summējama funkcija kopā E.

2. Ja funkcijas f un g ir ekvivalentas kopā E, tad, acīmredzot, $f(x) \leq g(x)$ gandrīz visiem $x \in E$ un $f(x) \geq g(x)$ gandrīz visiem $x \in E$. No 1. punktā pierādītā izriet

$$\int\limits_E f(x)dx \leq \int\limits_E g(x)dx \quad \text{un} \quad \int\limits_E f(x)dx \geq \int\limits_E g(x)dx,$$

t.i., izpildās (4.61). No (4.61) izriet, ka f ir summējama funkcija kopā E tad un tikai tad, kad g ir summējama funkcija kopā E.◀

4.5. piezīme. Pēdējās īpašības 1. apgalvojums vispārina šī paragrāfa 5° īpašību.

11° *Ja nenegatīva funkcija f ir vienāda ar nulli gandrīz visur mērojamā kopā E, tad f ir mērojama funkcija kopā E un*

$$\int\limits_E f(x)dx = 0, \tag{4.64}$$

līdz ar to funkcija f ir summējama kopā E.

▶ Pieņemsim, ka nenegatīva funkcija f ir vienāda ar nulli gandrīz visur mērojamā kopā E, t.i., funkcijas f un $\mathbb{O}$ ir ekvivalentas kopā E, kur $\mathbb{O}$ ir nullfunkcija kopā E. Atzīmēsim, ka nullfunkcija $\mathbb{O}$ kopā E ir mērojama funkcija dotajā kopā saskaņā ar mērojamu funkciju 1° īpašību, jo $\mathbb{O}$ ir konstanta funkcija. Tāpēc no 2.3. teorēmas izriet, ka f arī ir mērojama funkcija kopā E. No šī paragrāfa 10° īpašības, ņemot vērā 4.2. piemēru, iegūsim

$$\int\limits_E f(x)dx = \int\limits_E \mathbb{O}(x)dx = 0,$$

t.i., izpildās (4.64). No (4.64) seko, ka f ir summējama funkcija kopā E.◀

12° *Ja f ir nenegatīva mērojama funkcija kopā E un*

$$\int\limits_E f(x)dx = 0,$$

tad funkcija f ir vienāda ar nulli gandrīz visur kopā E.

► a) Pieņemsim, ka $\mathrm{m}(E) < +\infty$. Tā kā f ir nenegatīva mērojama funkcija kopā E, tad $E = E[f = 0] \cup E[f > 0]$, pie tam $E[f = 0]$ un $E[f > 0]$ ir kopas E mērojamas apakškopas. Pierādīsim, ka $\mathrm{m}\big(E[f > 0]\big) = 0$. No Lebega kopu 1° īpašības (skat. 2.1. paragrāfu) izriet

$$E[f > 0] = \bigcup_{k=1}^{\infty} E\left[f \geq \frac{1}{k}\right],$$

no kurienes, ņemot vērā Lebega mēra sanumurējamo pusaditivitāti, seko

$$\mathrm{m}\big(E[f > 0]\big) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}\left(E\left[f \geq \frac{1}{k}\right]\right). \tag{4.65}$$

Izmantojot Čebišova nevienādību, atrodam

$$\mathrm{m}\left(E\left[f \geq \frac{1}{k}\right]\right) \leq k \int\limits_E f(x)dx = k \cdot 0 = 0 \ \ (k \in \mathbb{N}),$$

no kurienes, ņemot vērā Lebega mēra nenegativitāti, izriet

$$\mathrm{m}\left(E\left[f \geq \frac{1}{k}\right]\right) = 0 \ \ (k \in \mathbb{N}), \tag{4.66}$$

No (4.65) un (4.66) atrodam, ka $\mathrm{m}\big(E[f > 0]\big) \leq 0$. Tā kā Lebega mērs ir nenegatīvs, tad $\mathrm{m}\big(E[f > 0]\big) = 0$, t.i., funkcija f ir vienāda ar nulli gandrīz visur kopā E.

b) Pieņemsim, ka $\mathrm{m}(E) = +\infty$ un nenegatīvas mērojamas kopā E funkcijas f Lebega integrālis šajā kopā ir vienāds ar nulli. Pierādīsim, ka $\mathrm{m}\big(E[f > 0]\big) = 0$. Apskatīsim mērojamas kopas $I_1 = (-1; 1)$ un $I_k = (-k; -k+1] \cup [k-1; k)$, kur $k = 2, 3, \ldots$. Tad $E_k = E \cap I_k$ $(k \in \mathbb{N})$ ir galīga mēra kopas, pie tam

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \text{ un } E_k \cap E_m = \emptyset \ (k \neq m;\ k, m \in \mathbb{N}).$$

Acīmredzot,

$$E[f > 0] = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k[f > 0], \tag{4.67}$$

$$E_k[f > 0] \cap E_m[f > 0] = \emptyset \ (k \neq m;\ k, m \in \mathbb{N}). \tag{4.68}$$

No (4.67) un (4.68), ņemot vērā Lebega mēra sanumurējamo aditivitāti, iegūsim

$$\mathrm{m}\big(E[f > 0]\big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}\big(E_k[f > 0]\big). \tag{4.69}$$

Tā kā $\int\limits_E f(x)dx = 0$, tad no šī paragrāfa 6° īpašības izriet

$$\int\limits_{E_k} f(x)dx = 0 \ (k \in \mathbb{N}),$$

no kurienes saskaņā ar a) punktā pierādīto seko

$$\mathrm{m}\big(E_k[f > 0]\big) = 0 \ \ (k \in \mathbb{N}). \tag{4.70}$$

No (4.69) un (4.70) izriet, ka $\mathrm{m}\big(E[f > 0]\big) = 0$, t.i., funkcija f ir vienāda ar nulli gandrīz visur kopā E.◀

13° *Pieņemsim, ka f ir nenegatīva mērojama funkcija kopā E. Funkcija f ir vienāda ar nulli gandrīz visur kopā E tad un tikai tad, kad*

$$\int\limits_E f(x)dx = 0.$$

▶ Īpašības patiesums izriet no šī paragrāfa 11° un 12° īpašības.◀

4.2.5. Vēlreiz par nenegatīvas funkcijas Lebega integrāļa definīciju

Izrādās, ka 6. lemmā pierādītā vienādība (4.30) būs spēkā arī tad, ja virknes $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, kur $e_n = E \cap [-n; n]$ $(n \in \mathbb{N})$, vietā ņemt jebkuru citu galīga mēra kopu augošu virkni $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, ka $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} a_n = E$, kur E ir patvaļīga mēra kopa. Pamatojumu tam sniedz nākamā lemma.

8. lemma. *Pieņemsim, ka $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ un $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ ir divas galīga mēra kopu augošas virknes, ka $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} a_n = E$ un $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} b_n = E$. Ja f ir nenegatīva mērojama funkcija kopā E, tad*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{a_n} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{b_n} f(x)dx. \tag{4.71}$$

▶ Pieņemsim, ka $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ un $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ ir galīga mēra kopu augošas virknes, ka $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} a_n = E$ un $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} b_n = E$. No 1.5. paragrāfā pierādītās 1. lemmas izriet, ka $a_1' = a_1,\ a_2' = a_2 \backslash a_1,\ a_3' = a_3 \setminus a_2,\ \ldots$ ir galīga mēra kopas, pie tam

$$a_n' \cap a_m' = \emptyset \ \ (n, m \in \mathbb{N}); \tag{4.72a}$$

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} a_n'; \tag{4.72b}$$

$$a_n = \bigcup_{j=1}^{n} a_j' \ \ (n \in \mathbb{N}). \tag{4.72c}$$

Fiksēsim patvaļīgu indeksu $m \in \mathbb{N}$. Tad $b_m \cap a_1'$, $b_m \cap a_2'$, $b_m \cap a_3'$, ... arī ir galīga mēra kopas, pie tam no (4.72a) izriet, ka šīs kopas savstarpēji nešķeļas, bet no (4.72b) seko

$$b_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} (b_m \cap a_n') \,. \tag{4.73}$$

No šī paragrāfa 8° īpašības, ņemot vērā (4.73), iegūsim

$$\int\limits_{b_m} f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{b_m \cap a_n'} f(x)dx. \tag{4.74}$$

Tā kā $b_m \cap a_n' \subset a_n'$ $(n \in \mathbb{N})$, tad no šī paragrāfa 6° īpašības izriet

$$\int\limits_{b_m \cap a_n'} f(x)dx \leq \int\limits_{a_n'} f(x)dx \quad (n \in \mathbb{N}), \tag{4.75}$$

kur nevienādības abās pusēs atrodošies integrāļi ir vai nu nenegatīvi skaitļi, vai arī $+\infty$. No (4.75), ņemot vērā rindu ar nenegatīviem locekļiem, kuru vidū var būt arī $+\infty$, īpašību (skat. 6.4. paragrāfu), iegūsim

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{b_m \cap a_n'} f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{a_n'} f(x)dx. \tag{4.76}$$

Saskaņā ar rindas summas definīciju

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{a_n'} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{a_j'} f(x)dx. \tag{4.77}$$

No šī paragrāfa 8° īpašības, ņemot vērā (4.72a) un (4.72c), iegūsim

$$\int\limits_{a_n} f(x)dx = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{a_j'} f(x)dx \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{4.78}$$

No (4.74), (4.76), (4.77) un (4.78) atrodam:

$$\int\limits_{b_m} f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{b_m \cap a_n'} f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{a_n'} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{a_j'} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{a_n} f(x)dx.$$

Tātad jebkuram $m \in \mathbb{N}$ ir spēkā

$$\int\limits_{b_m} f(x)dx \leq \lim_{n\to\infty} \int\limits_{a_n} f(x)dx,$$

no kurienes seko

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{b_m} f(x)dx \leq \lim_{n\to\infty} \int\limits_{a_n} f(x)dx. \tag{4.79}$$

Tā kā galīga mēra kopu augošās virknes $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ un $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ ir līdzvērtīgas, tad ir patiesa nevienādība

$$\lim_{m\to\infty}\int\limits_{b_m} f(x)dx \geq \lim_{n\to\infty}\int\limits_{a_n} f(x)dx. \tag{4.80}$$

No (4.79) un (4.80) izriet (4.71).◀

14° *Ja f ir nenegatīva mērojama funkcija patvaļīga mēra kopā E, pie tam $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, kur $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ir kopas E galīga mēra apakškopu augoša virkne, tad ir patiesa vienādība*

$$\int\limits_E f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{a_n} f(x)dx. \tag{4.81}$$

▶ No 7. lemmas seko, ka apgalvojums ir patiess kopas E galīga mēra apakškopu augošai virknei $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, kur kopas e_n $(n \in \mathbb{N})$ ir definētas saskaņā ar formulām (4.31). Atzīmēsim, ka šai kopu virknei ir spēkā vienādība $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} e_n$. Taču tad saskaņā ar 8. lemmu apgalvojums ir patiess jebkurai kopas E galīga mēra apakškopu augošai virknei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, ka $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.◀

4.6. piezīme. Pēdējā īpašība vispārina ierobežotu funkciju Lebega integrāļa 19° īpašību.

4.4. definīcija. Apskatīsim kopā E nenegatīvu mērojamu funkciju f.

1. Pieņemsim, ka $\mathrm{m}(E) < +\infty$. Par **funkcijas f Lebega integrāli kopā E** sauc robežu $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathfrak{I}_t(f)$, kur

$$\mathfrak{I}_t(f) = \int\limits_E [f]_t(x)dx.$$

Lebega integrāli kopā E apzīmē ar $\int\limits_E f(x)dx$, t.i.,

$$\int\limits_E f(x)dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{t\to+\infty} \mathfrak{I}_t(f) = \lim_{t\to+\infty}\int\limits_E [f]_t(x)dx.$$

2. Pieņemsim, ka $\mathrm{m}(E) = +\infty$. Apskatīsim patvaļīgu galīga mēra kopu augošu virkni $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, ka $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} a_n = E$. Par **funkcijas f Lebega integrāli kopā E** sauc robežu $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{a_n} f(x)dx$. Lebega integrāli kopā E apzīmē ar $\int\limits_E f(x)dx$, t.i.,

$$\int\limits_E f(x)dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty}\int\limits_{a_n} f(x)dx.$$

Ja $\int\limits_E f(x)dx < +\infty$, tad f sauc par **summējamu funkciju kopā E** (vai **integrējamu Lebega nozīmē funkciju kopā E**).

4.7. piezīme. No 8. lemmas seko, ka šī definīcija ir korekta tajā nozīmē, ka tā nav atkarīga no kopu virknes $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ izvēles. Bez tam, ņemot vērā 8. lemmu, var secināt, ka *kopā E nenegatīvas mērojamas funkcijas f Lebega integrāļa šajā kopā definīcijas 4.2. un 4.4. ir ekvivalentas*.

4.2.6. Nenegatīvu summējamu funkciju integrāļa absolūtā nepārtrauktība

Nākamā definīcija (skat. 4.5. definīciju), kā arī nenegatīvu summējamu funkciju integrāļa absolūtās nepārtrauktības īpašība (skat. 15° īpašību šī apakšparagrāfa turpinājumā), tiks būtiski izmantotas Lebega teorēmas par robežpāreju zem summējamu funkciju Lebega integrāļa zīmes (skat. 4.6. teorēmu) pierādījumā.

4.5. definīcija. Pieņemsim, ka f ir nenegatīva mērojama funkcija kopā E. Par **funkcijas f Lebega integrāli kopā** E sauc lielumu $\sup\limits_{e} \int\limits_{e} f(x)dx$, kur e ir patvaļīga kopas E galīga mēra apakškopa, kurā funkcija f ir ierobežota. Funkcijas f Lebega integrāli kopā E apzīmē ar $\int\limits_{E} f(x)dx$, t.i.,

$$\int\limits_{E} f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{e} \int\limits_{e} f(x)dx.$$

Ja $\int\limits_{E} f(x)dx < +\infty$, tad f sauc par **summējamu funkciju kopā** E (vai **integrējamu Lebega nozīmē funkciju kopā** E).

4.8. piezīme.

- Atzīmēsim, ka eksistē vismaz viena 4.5. definīcijā minētā kopa e. Tiešām, ja e ir kopas E netukša galīga apakškopa, tad e, acīmredzot, ir galīga mēra kopa, jo tā ir nulles mēra kopa, pie tam funkcija f ir ierobežota šajā kopā e.
- Ja e ir patvaļīga kopas E galīga mēra apakškopa, kurā funkcija f ir ierobežota, tad funkcijai f eksistē Lebega integrālis kopā e 3.10. definīcijas nozīmē, pie tam šis integrālis ir nenegatīvs skaitlis.
- Ņemot vērā iepriekš teikto, var secināt, ka *jebkurai 4.5. definīcijā minētajai funkcijai f eksistē Lebega integrālis kopā E* kā netukšas nenegatīvu skaitļu kopas

$$\Upsilon = \left\{ \int\limits_{e} f(x)dx : e \subset E,\ \mathrm{m}(e) < +\infty,\ f \text{ ir ierobežota kopā } e \right\}$$

suprēms paplašinātajā reālo skaitļu kopā $\widetilde{\mathbb{R}}$, pie tam šis Lebega integrālis ir vai nu nenegatīvs skaitlis, vai arī $+\infty$, t.i.,

$$0 \leq \int\limits_{E} f(x)dx \leq +\infty.$$

Taču no funkcijas f Lebega integrāļa eksistences kopā E vēl neseko šīs funkcijas summējamība kopā E, jo saskaņā ar definīciju funkcija f ir summējama kopā E tad un tikai tad, kad funkcijas f Lebega integrālis kopā E ir nenegatīvs skaitlis.

- Pieņemsim, ka f ir ierobežota nenegatīva mērojama funkcija galīga mēra kopā E. Tad
$$\int\limits_E f(x)dx \in \Upsilon.$$
Tā kā jebkurai kopas E netukšai mērojamai apakškopai e ir galīgs mērs, funkcija f ir ierobežota kopā e, tad, ņemot vērā ierobežotu funkciju Lebega integrāļa 6° īpašību, iegūsim
$$\int\limits_e f(x)dx \in \Upsilon \text{ un } \int\limits_e f(x)dx \leq \int\limits_E f(x)dx.$$
Tātad
$$\int\limits_E f(x)dx = \max \Upsilon = \max_e \int\limits_e f(x)dx,$$
no kurienes izriet
$$\int\limits_E f(x)dx = \sup \Upsilon = \sup_e \int\limits_e f(x)dx,$$
kur $\int\limits_E f(x)dx$ ir funkcijas f Lebega integrālis 3.10. definīcijas nozīmē. Tādējādi, *ja f ir ierobežota nenegatīva mērojama funkcija galīga mēra kopā E, tad funkcija f ir summējama, pie tam funkcijas f Lebega integrāļi 3.10. un 4.5. definīciju nozīmē sakrīt. Līdz ar to viena un tā paša apzīmējuma $\int\limits_E f(x)dx$ izmantošana, lai apzīmētu funkcijas f Lebega integrāli gan vienas, gan otras definīcijas nozīmē, ir korekta.*

Nākamā teorēma izsaka 4.2. un 4.5. definīciju ekvivalenci.

4.1. teorēma. *Apskatīsim nenegatīvu mērojamu funkciju f kopā E.*

1. *Funkcijas f Lebega integrālis kopā E 4.5. definīcijas nozīmē ir vienāds ar funkcijas f Lebega integrālis kopā E 4.2. definīcijas nozīmē.*
2. *Funkcija f ir summējama 4.5. definīcijas nozīmē tad un tikai tad, kad funkcija f ir summējama 4.2. definīcijas nozīmē.*

▶ Pieņemsim, ka f ir nenegatīva mērojama funkcija kopā E.

1. Pierādīsim, ka
$$\int\limits_E f(x)dx = \sup \Upsilon, \tag{4.82}$$
kur
$$\Upsilon = \left\{ \int\limits_e f(x)dx : e \subset E,\ \mathrm{m}(e) < +\infty,\ f \text{ ir ierobežota kopā } e \right\},$$
bet vienādības (4.82) kreisajā pusē atrodas funkcijas f Lebega integrālis kopā E 4.2. definīcijas nozīmē.

a) Apskatīsim patvaļīgu kopas E galīga mēra apakškopu e, kurā funkcija f ir ierobežota. Tad, ņemot vērā šī paragrāfa 6° īpašību, iegūsim

$$\Upsilon \ni \int\limits_e f(x)dx \leq \int\limits_E f(x)dx.$$

Tātad $\int\limits_E f(x)dx$ ir kopas Υ mažorante.

b) Pieņemsim, ka β ir patvaļīga kopas Υ mažorante, t.i., jebkurai kopas E galīga mēra apakškopai e, kurā funkcija f ir ierobežota, ir spēkā

$$\int\limits_e f(x)dx \leq \beta. \tag{4.83}$$

Kopas E galīga mēra apakškopas $a_n = \big(E[f \leq n]\big) \cap [-n; n]$ $(n \in \mathbb{N})$ veido augošu virkni, pie tam jebkuram $n \in \mathbb{N}$ funkcija f ir ierobežota kopā a_n. Pierādīsim, ka

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{4.84}$$

Acīmredzot, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} a_n \subset E$. Atliek pierādīt, ka $E \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Pieņemsim, ka $x \in E$. Tad eksistē n', ka $f(x) \leq n'$, un eksistē n'', ka $x \in [-n''; n'']$. Apskatīsim $n_0 = \max\{n'; n''\}$. Tad $x \in \big(E[f \leq n_0]\big) \cap [-n_0; n_0] = a_{n_0}$. Tā kā $a_{n_0} \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, tad $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Vienādība (4.84) ir pierādīta. No šī paragrāfa 14° īpašības izriet

$$\int\limits_E f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{a_n} f(x)dx. \tag{4.85}$$

No (4.83) seko

$$\int\limits_{a_n} f(x)dx \leq \beta. \tag{4.86}$$

No (4.85) un (4.86), ņemot vērā teorēmu par robežpāreju nevienādībās, atrodam

$$\int\limits_E f(x)dx \leq \beta.$$

Tātad $\int\limits_E f(x)dx$ ir vismazākā kopas Υ mažorante.

No a) un b) izriet vienādības (4.82) patiesums.

2. Teorēmas otrā apgalvojuma patiesums izriet no teorēmas pirmā apgalvojuma.◀

15° Nenegatīvu summējamu funkciju integrāļa absolūtā nepārtrauktība. *Ja f ir nenegatīva summējama funkcija kopā E, tad jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds $\delta > 0$, ka jebkurai kopas E mērojamai apakškopai E_1, ka $\mathrm{m}(E_1) < \delta$, ir spēkā nevienādība*

$$\int\limits_{E_1} f(x)dx < \varepsilon. \tag{4.87}$$

► Apskatīsim patvaļīgu $\varepsilon > 0$. Tā kā $\int\limits_E f(x)dx < +\infty$ (jo f ir summējama funkcija kopā E) un $\int\limits_E f(x)dx = \sup \Upsilon$, kur

$$\Upsilon = \left\{ \int\limits_e f(x)dx : e \subset E,\ \mathrm{m}(e) < +\infty,\ f \text{ ir ierobežota kopā } e \right\},$$

tad eksistē kopas E galīga mēra apakškopa e, kurā funkcija f ir ierobežota, ka

$$\int\limits_e f(x)dx > \int\limits_E f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.88}$$

Tā kā $E = e \cup (E \setminus e)$ un $e \cap (E \setminus e) = \emptyset$, tad no šī paragrāfa 8° īpašības seko

$$\int\limits_E f(x)dx = \int\limits_e f(x)dx + \int\limits_{E\setminus e} f(x)dx. \tag{4.89}$$

No (4.88) un (4.89) izriet

$$\int\limits_{E\setminus e} f(x)dx = \int\limits_E f(x)dx - \int\limits_e f(x)dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

jeb

$$\int\limits_{E\setminus e} f(x)dx < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.90}$$

Tā kā funkcija f ir ierobežota kopā e, tad eksistē tāds $M > 0$, ka $0 \le f(x) < M$ jebkuram $x \in e$. Pieņemsim, ka $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$. Apskatīsim patvaļīgu kopas E mērojamu apakškopu E_1, ka $\mathrm{m}(E_1) < \delta$. Apskatīsim kopas $E_1' = E_1 \cap e$ un $E_1'' = E_1 \cap (E \setminus e)$. Tad $E_1 = E_1' \cup E_1''$ un $E_1' \cap E_1'' = \emptyset$. No ierobežotu funkciju Lebega integrāļa 7° īpašības izriet

$$\int\limits_{E_1'} f(x)dx \le M \cdot \mathrm{m}(E_1') \le M \cdot \mathrm{m}(E_1) < \frac{\varepsilon}{2}$$

jeb

$$\int\limits_{E_1'} f(x)dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.91}$$

Tā kā $E_1'' \subset E \setminus e$, tad no šī paragrāfa 6° īpašības seko

$$\int\limits_{E_1''} f(x)dx \le \int\limits_{E\setminus e} f(x)dx \tag{4.92}$$

No (4.90) un (4.92) atrodam

$$\int\limits_{E_1''} f(x)dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.93}$$

No (4.91) un (4.93), ņemot vērā šī paragrāfa 8° īpašību, iegūsim

$$\int\limits_{E_1} f(x)dx = \int\limits_{E_1'} f(x)dx + \int\limits_{E_1''} f(x)dx < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

t.i., izpildās (4.87).◀

4.3. Summējamas funkcijas jēdziens

Pieņemsim, ka funkcija f ir mērojama kopā E, pie tam funkcija f pieņem dažādu zīmju vērtības kopā E. Apskatīsim kopas

$$E_1 = E[f \geq 0], \quad E_2 = E[f < 0].$$

Tad

$$E_1 \neq \emptyset, \quad E_2 \neq \emptyset,$$
$$E = E_1 \cup E_2, \quad E_1 \cap E_2 = \emptyset,$$

pie tam f ir nenegatīva mērojama funkcija kopā E_1 un negatīva mērojama funkcija kopā E_2. Tāpēc saskaņā ar 4.2. (vai 4.5.) un 4.3. definīciju ir definēti integrāļi attiecīgi

$$\mathfrak{I}_1 = \int\limits_{E_1} f(x)dx \quad \text{un} \quad \mathfrak{I}_2 = \int\limits_{E_2} f(x)dx,$$

pie tam

$$0 \leq \mathfrak{I}_1 \leq +\infty, \quad -\infty \leq \mathfrak{I}_2 \leq 0.$$

4.6. definīcija. Pieņemsim, ka funkcija f ir mērojama kopā E. Ja vismaz viens no integrāļiem $\mathfrak{I}_1$ vai $\mathfrak{I}_2$ ir galīgs, tad šo integrāļu galīgu vai bezgalīgu summu $\mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2$ sauc par **funkcijas f Lebega integrāli kopā** E un apzīmē ar $\int\limits_E f(x)dx$, t.i.,

$$\mathfrak{I} = \int\limits_E f(x)dx \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{E_1} f(x)dx + \int\limits_{E_2} f(x)dx = \mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2. \tag{4.94}$$

Funkciju f sauc par **summējamu funkciju kopā** E (vai **integrējamu Lebega nozīmē funkciju kopā** E), ja funkcija f ir summējama kopās E_1 un E_2, t.i., funkcijas f Lebega integrālis kopā E ir galīgs.

4.9. piezīme. Pieņemsim, ka f ir mērojama funkcija kopā E. Saskaņā ar 4.6. definīciju funkcijas f Lebega integrālis $\mathfrak{I} = \int\limits_E f(x)dx$ kopā E ir definēts,

- ja $0 \leq \mathfrak{I}_1 < +\infty$ un $-\infty < \mathfrak{I}_2 \leq 0$, tad $-\infty < \mathfrak{I} < +\infty$;
- ja $0 \leq \mathfrak{I}_1 < +\infty$ un $\mathfrak{I}_2 = -\infty$, tad $\mathfrak{I} = -\infty$;
- ja $\mathfrak{I}_1 = +\infty$ un $-\infty < \mathfrak{I}_2 \leq 0$, tad $\mathfrak{I} = +\infty$.

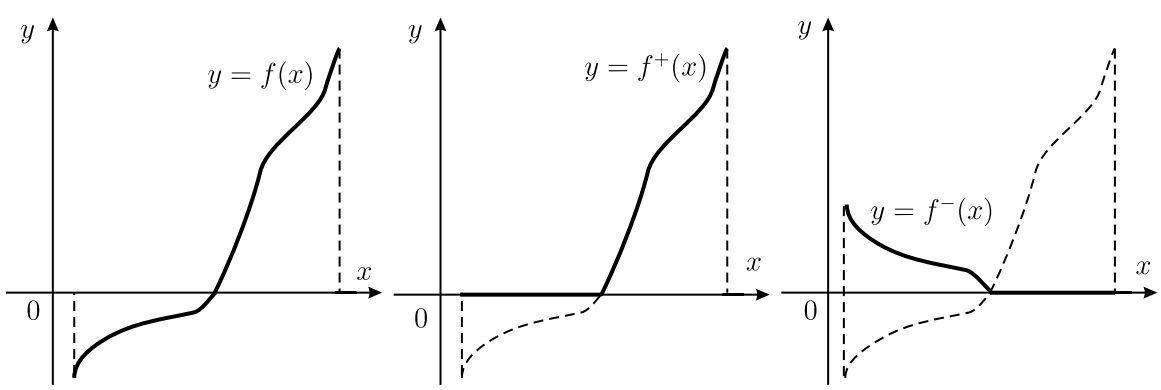
Pirmajā gadījumā funkcija f ir summējama kopā E. Otrajā un trešajā gadījumā funkcijai f eksistē Lebega integrālis kopā E, taču funkcija f nav summējama kopā E.

- Ja $\mathfrak{I}_1 = +\infty$ un $\mathfrak{I}_2 = -\infty$, tad funkcijas f Lebega integrālis kopā E nav definēts (summa $(+\infty) + (-\infty)$ nav definēta!) un līdz ar to funkcija f nav summējama kopā E.

4.10. piezīme.

- *Ja ierobežota funkcija f ir integrējama Lebega nozīmē galīga mēra kopā E 3.10. definīcijas nozīmē, tad funkcija f ir summējama kopā E 4.6. definīcijas nozīmē, pie tam funkcijas f Lebega integrālis kopā E 3.10. definīcijas nozīmē ir vienāds ar funkcijas f Lebega integrāli kopā E 4.6. definīcijas nozīmē.* Tāpēc viena un tā paša apzīmējuma $\int\limits_E f(x)dx$ izmantošana, lai apzīmētu funkcijas f Lebega integrāli gan vienas, gan otras definīcijas nozīmē, ir korekta.
- Ja funkcija f ir nenegatīva kopā E (attiecīgi negatīva kopā E), tad $E_2 = \emptyset$ (attiecīgi $E_1 = \emptyset$). Šajā gadījumā uzskatīsim, ka $\mathfrak{I}_2 = 0$ (attiecīgi $\mathfrak{I}_1 = 0$). Tāpēc, *ja funkcija f ir summējama 4.2. vai 4.5. (attiecīgi 4.3.) definīcijas nozīmē, tad funkcija f ir summējama kopā E 4.6. definīcijas nozīmē, pie tam funkcijas f Lebega integrālis kopā E 4.2. vai 4.5. (attiecīgi 4.3.) definīcijas nozīmē ir vienāds ar funkcijas f Lebega integrāli kopā E 4.6. definīcijas nozīmē.* Tāpēc viena un tā paša apzīmējuma $\int\limits_E f(x)dx$ izmantošana, lai apzīmētu funkcijas f Lebega integrāli šo definīciju nozīmē, ir korekta.

Šī paragrāfa turpinājumā aplūkosim ekvivalentu pieeju summējamu funkciju definēšanai.



4.2. zīmējums. Funkcijai f atbilstošās funkcijas f^+ un f^-.

Apskatīsim funkcijas

$$f^+ = \frac{1}{2}\big(|f| + f\big), \quad f^- = \frac{1}{2}\big(|f| - f\big); \tag{4.95}$$

(skat. 4.2. zīmējumu). Viegli redzēt, ka

$$\forall x \in E : f^+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ja} \quad f(x) \geq 0, \\ 0, & \text{ja} \quad f(x) < 0, \end{cases} \tag{4.96}$$

$$\forall x \in E : f^-(x) = \begin{cases} 0, & \text{ja} \quad f(x) \geq 0, \\ -f(x), & \text{ja} \quad f(x) < 0, \end{cases} \tag{4.97}$$

jeb

$$\forall x \in E : f^+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ja} \quad x \in E[f \geq 0], \\ 0, & \text{ja} \quad x \in E[f < 0], \end{cases} \tag{4.98}$$

$$\forall x \in E : f^-(x) = \begin{cases} 0, & \text{ja} \quad x \in E[f \geq 0], \\ -f(x), & \text{ja} \quad x \in E[f < 0]. \end{cases} \tag{4.99}$$

Funkcijas f^+ un f^- ir nenegatīvas, pie tam

$$f = f^+ - f^-, \tag{4.100a}$$

$$|f| = f^+ + f^-. \tag{4.100b}$$

Ja funkcija f ir mērojama kopā E, tad arī funkcijas $|f|$, f^+ un f^- ir mērojamas kopā E. Šajā gadījumā ir definēti kopā E nenegatīvu mērojamu funkciju f^+ un f^- Lebega integrāļi

$$\int\limits_E f^+(x)dx \quad \text{un} \quad \int\limits_E f^-(x)dx.$$

9. lemma. *Ja funkcija f ir mērojama kopā E, tad ir patiesas vienādības*

$$\int\limits_E f^+(x)dx = \int\limits_{E_1} f(x)dx = \int\limits_{E_1} \big|f(x)\big|dx, \tag{4.101}$$

$$\int\limits_E f^-(x)dx = \int\limits_{E_2} \big|f(x)\big|dx = -\int\limits_{E_2} f(x)dx. \tag{4.102}$$

► Tā kā $E = E_1 \cup E_2$ un $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, pie tam E_1 un E_2 ir mērojamas kopas, tad, ņemot vērā 4.2. paragrāfa 1° un 8° īpašību, kā arī funkciju f^+ un f^- definīcijas, atrodam

$$\int\limits_E f^+(x)dx = \int\limits_{E_1} f^+(x)dx + \int\limits_{E_2} f^+(x)dx = \int\limits_{E_1} f(x)dx + \int\limits_{E_2} 0dx = \int\limits_{E_1} f(x)dx,$$

$$\int\limits_E f^-(x)dx = \int\limits_{E_1} f^-(x)dx + \int\limits_{E_2} f^-(x)dx = \int\limits_{E_1} 0dx + \int\limits_{E_2} \big|f(x)\big|dx = \int\limits_{E_2} \big|f(x)\big|dx,$$

t.i., formulu (4.101) un (4.102) pirmās vienādības ir patiesas. Tā kā jebkuram $x \in E_1 = E[f \geq 0]$ ir spēkā $f(x) = \big|f(x)\big|$, tad formulas (4.101) otrā vienādība arī ir patiesa. Savukārt formulas (4.102) otrā vienādības patiesums izriet no vienādības (4.4). Formulu (4.101) un (4.102) patiesums ir pierādīts.◄

4.2. teorēma. *Pieņemsim, ka funkcija f ir mērojama kopā E. Ja vismaz viens no integrāļiem $\int\limits_E f^+(x)dx$ vai $\int\limits_E f^-(x)dx$ ir galīgs, tad funkcijas f Lebega integrālis kopā E ir definēts un*

$$\int\limits_E f(x)dx = \int\limits_E f^+(x)dx - \int\limits_E f^-(x)dx. \tag{4.103}$$

Funkcija f ir summējama kopā E tad un tikai tad, kad f^+ un f^- ir summējamas funkcijas kopā E.

► Ja vismaz viens no integrāļiem $\int\limits_E f^+(x)dx$ vai $\int\limits_E f^-(x)dx$ ir galīgs, tad no (4.101) un (4.102) izriet, ka vismaz viens no integrāļiem $\int\limits_{E_1} f(x)dx$ vai $\int\limits_{E_2} f(x)dx$ arī ir galīgs, tāpēc saskaņā ar 4.6. definīciju funkcijas f Lebega integrālis kopā E ir definēts.

Formulas (4.103) patiesums izriet no (4.94), (4.101) un (4.102).

Ņemot vērā formulas (4.94), (4.101) un (4.102) un 4.6. definīciju, secinām, ka funkcija f ir summējama kopā E tad un tikai tad, kad funkcijas f^+ un f^- ir summējamas kopā E.◄

4.7. definīcija. Pieņemsim, ka funkcija f ir mērojama kopā E. Ja vismaz viens no integrāļiem $\int\limits_E f^+(x)dx$ vai $\int\limits_E f^-(x)dx$ ir galīgs, tad šo integrāļu starpību $\int\limits_E f^+(x)dx - \int\limits_E f^-(x)dx$ sauc par **funkcijas f Lebega integrāli kopā** E un apzīmē ar $\int\limits_E f(x)dx$, t.i.,

$$\int\limits_E f(x)dx \overset{\text{def}}{=} \int\limits_E f^+(x)dx - \int\limits_E f^-(x)dx. \tag{4.104}$$

Funkciju f sauc par **summējamu funkciju kopā** E (vai **integrējamu Lebega nozīmē funkciju kopā** E), ja funkcijas f^+ un f^- ir summējamas kopā E, t.i., funkcijas f Lebega integrālis kopā E ir galīgs.

4.11. piezīme. No 4.2. teorēmas izriet, ka *definīcijas 4.6. un 4.7. ir ekvivalentas*.

4.12. piezīme. Ja funkcija f ir mērojama kopā E un vismaz viens no integrāļiem $\int\limits_{E_1} f(x)dx = \int\limits_{E_1} \big|f(x)\big|dx$ vai $\int\limits_{E_2} \big|f(x)\big|dx$ ir galīgs, tad no (4.4) un (4.94) izriet

$$\int\limits_E f(x)dx = \int\limits_{E_1} f(x)dx - \int\limits_{E_2} \big|f(x)\big|dx \tag{4.105a}$$

jeb

$$\int\limits_E f(x)dx = \int\limits_{E_1} \big|f(x)\big|dx - \int\limits_{E_2} \big|f(x)\big|dx. \tag{4.105b}$$

4.5. piemērs. *Jebkura nulles mēra kopā E definēta funkcija f ir summējama funkcija šajā kopā, pie tam*

$$\int\limits_E f(x)dx = 0.$$

► Tā kā E ir nulles mēra kopa, tad arī tās apakškopas E_1 un E_2 ir nulles mēra kopas. Saskaņā ar 4.1. piemēru nenegatīva funkcija $|f|$ ir summējama funkcija kopās E_1 un E_2, pie tam

$$\int\limits_{E_1} \big|f(x)\big|dx = 0, \quad \int\limits_{E_2} \big|f(x)\big|dx = 0. \tag{4.106}$$

No (4.105b), ņemot vērā (4.106), atrodam

$$\int\limits_E f(x)dx = \int\limits_{E_1} \big|f(x)\big|dx - \int\limits_{E_2} \big|f(x)\big|dx = 0 - 0 = 0.$$

Tātad f ir summējama funkcija kopā E.◀

4.4. Summējamu funkciju īpašības

1° *Mērojama funkcija f ir summējama kopā E tad un tikai tad, kad funkcijas f modulis $|f|$ ir summējama funkcija kopā E. Ja f ir summējama funkcija kopā E, tad*

$$\left|\int\limits_E f(x)dx\right| \le \int\limits_E \big|f(x)\big|dx. \tag{4.107}$$

▶ *Nepieciešamība.* Ja funkcija f ir summējama kopā E, tad saskaņā ar 4.7. definīciju funkcijas f^+ un f^- ir summējamas kopā E, t.i.,

$$\int\limits_E f^+(x)dx < +\infty, \quad \int\limits_E f^-(x)dx < +\infty. \tag{4.108}$$

Ņemot vērā (4.101) un (4.102), atrodam

$$\int\limits_{E_1} \big|f(x)\big|dx < +\infty, \quad \int\limits_{E_2} \big|f(x)\big|dx < +\infty, \tag{4.109}$$

t.i., funkcija $|f|$ ir summējama kopās E_1 un E_2, kuras nešķeļas un kuru apvienojums ir vienāds ar kopu E. No 4.2. paragrāfa 9° īpašības izriet, ka funkcija $|f|$ ir summējama kopā E.

Pietiekamība. Ja funkcija $|f|$ ir summējama kopā E, tad no 4.2. paragrāfa 6° īpašības izriet, ka funkcija $|f|$ ir summējama kopas E mērojamās apakškopās E_1 un E_2, t.i., izpildās (4.109), no kurienes, ņemot vērā (4.101) un (4.102), secinām, ka ir spēkā (4.108). Saskaņā ar 4.7. definīciju funkcija f ir summējama kopā E.

Pierādīsim nevienādību (4.107). Pieņemsim, ka funkcija f ir summējama kopā E. Saskaņā ar 4.7. definīciju funkcijas f^+ un f^- ir summējamas, pie tam

$$\int\limits_E f(x)dx = \int\limits_E f^+(x)dx - \int\limits_E f^-(x)dx. \tag{4.110}$$

No iepriekš pierādītā izriet, ka funkcijas f modulis $|f|$ arī ir summējama funkcija kopā E. Saskaņā ar (4.100b) ir spēkā vienādība $|f| = f^+ + f^-$, kur, kā jau iepriekš tika atzīmēts, f^+ un f^- ir nenegatīvas summējamas funkcijas kopā E. No 4.2. paragrāfa 1° īpašības seko

$$\int\limits_E \big|f(x)\big|dx = \int\limits_E f^+(x)dx + \int\limits_E f^-(x)dx. \tag{4.111}$$

Atzīmēsim, ka nenegatīvu summējamu funkciju f^+ un f^- integrāļi kopā E ir nenegatīvi skaitļi. Izmantojot formulas (4.110) un (4.111), iegūsim

$$\left|\int\limits_E f(x)dx\right| = \left|\int\limits_E f^+(x)dx - \int\limits_E f^-(x)dx\right| \leq$$

$$\leq \left|\int\limits_E f^+(x)dx\right| + \left|\int\limits_E f^-(x)dx\right| = \int\limits_E f^+(x)dx + \int\limits_E f^-(x)dx = \int\limits_E \big|f(x)\big|dx.$$

Nevienādība (4.107) ir pierādīta.◀

4.13. piezīme. No pēdējās īpašības pierādījuma seko, ka nevienādība (4.107) būs spēkā arī tad, ja pieprasīt tikai integrāļa $\int\limits_E f(x)dx$ definētību, nepieprasot funkcijas f summējamību kopā E. Atzīmēsim arī, ņemot vērā 4.1. piezīmi, ka pēdējā īpašība vispārina galīga mēra kopā ierobežotu mērojamu funkciju īpašību, kura ir formulēta 3.8. piezīmē.

2° **Summējamu funkciju integrāļa absolūtā nepārtrauktība.** *Ja funkcija f ir summējama kopā E, tad jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds $\delta > 0$, ka jebkurai kopas E mērojamai apakškopai E_1, ka $\mathrm{m}(E_1) < \delta$, ir spēkā nevienādība*

$$\left|\int\limits_{E_1} f(x)dx\right| < \varepsilon. \tag{4.112}$$

▶ Tā kā funkcija f ir summējama kopā E, tad no summējamu funkciju 1° īpašības izriet, ka funkcija $|f|$ arī ir summējama kopā E. Tātad $|f|$ ir nenegatīva summējama funkcija kopā E. No 4.2. paragrāfa 15° īpašības seko, ka jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds $\delta > 0$, ka jebkurai kopas E mērojamai apakškopai E_1, ka $\mathrm{m}(E_1) < \delta$, ir spēkā nevienādība

$$\int\limits_{E_1} \big|f(x)\big|dx < \varepsilon. \tag{4.113}$$

Tā kā funkcija $|f|$ ir summējama kopā E_1, tad no summējamu funkciju 1° īpašības seko, ka funkcija f ir summējama kopā E_1, pie tam

$$\left|\int\limits_{E_1} f(x)dx\right| \leq \int\limits_{E_1} \big|f(x)\big|dx. \tag{4.114}$$

No (4.113) un (4.114) izriet (4.112).◀

3° *Pieņemsim, ka funkcija f ir mērojama kopā E.*

1. *Ja ir definēts funkcijas f Lebega integrālis kopā E, tad ir definēts funkcijas f Lebega integrālis jebkurā kopas E mērojamā apakškopā E_1.*
2. *Ja funkcija f ir summējama kopā E, tad funkcija f ir summējama jebkurā kopas E mērojamā apakškopā E_1.*

3. Ja funkcija f nav summējama kādā kopas E mērojamā apakškopā E_1, tad funkcija f nav summējama arī kopā E.

► Apskatīsim kopas E mērojamu apakškopu E_1.

1. Pieņemsim, ka ir definēts funkcijas f Lebega integrālis kopā E. Tad no 4.7. definīcijas seko

$$\int\limits_E f(x)dx = \int\limits_E f^+(x)dx - \int\limits_E f^-(x)dx, \tag{4.115}$$

kur vismaz viens no Lebega integrāļiem $\int\limits_E f^+(x)dx$ vai $\int\limits_E f^-(x)dx$ ir galīgs. Noteiktības labad pieņemsim, ka otrais no šiem integrāļiem ir galīgs (un līdz ar to šis integrālis ir nenegatīvs skaitlis). Tātad funkcija f^- ir summējama kopā E. No 4.2. paragrāfa 6° īpašības izriet, ka funkcija f^- ir summējama kopā E_1, t.i., $\int\limits_{E_1} f^-(x)dx$ ir nenegatīvs skaitlis. Tāpēc saskaņā ar 4.7. definīciju ir definēts funkcijas f Lebega integrālis kopā E_1:

$$\int\limits_{E_1} f(x)dx = \int\limits_{E_1} f^+(x)dx - \int\limits_{E_1} f^-(x)dx, \tag{4.116}$$

2. Ja funkcija f ir summējama kopā E, tad no 4.7. definīcijas seko, ka nenegatīvās funkcijas f^+ un f^- arī ir summējamas kopā E. No 4.2. paragrāfa 6° īpašības izriet, ka funkcijas f^+ un f^- ir summējamas kopā E_1. No 4.7. definīcijas seko, ka funkcija f ir summējama kopā E_1.

3. Apgalvojuma patiesums izriet no 2. punktā pierādītā apgalvojuma.◄

4° *Ja funkcija f ir summējama kopā E un $\lambda \in \mathbb{R}$, tad funkcija λf arī ir summējama kopā E, pie tam*

$$\int\limits_E \lambda f(x)dx = \lambda \int\limits_E f(x)dx. \tag{4.117}$$

► Apskatīsim patvaļīgu kopā E definētu funkciju f un pieņemsim, ka $\lambda \in \mathbb{R}$. Tad ir patiesas formulas:

$$(\lambda f)^+ = \begin{cases} \lambda f^+, & \text{ja} \quad \lambda \geq 0, \\ -\lambda f^-, & \text{ja} \quad \lambda < 0, \end{cases} \tag{4.118}$$

$$(\lambda f)^- = \begin{cases} \lambda f^-, & \text{ja} \quad \lambda \geq 0, \\ -\lambda f^+, & \text{ja} \quad \lambda < 0. \end{cases} \tag{4.119}$$

Pierādīsim formulu (4.118).

a) Pieņemsim, ka $\lambda > 0$. Tad, izmantojot (4.98) un (4.99), iegūsim

$$(\lambda f)^+(x) = \begin{cases} \lambda f(x), & \text{ja} \quad x \in E[\lambda f \geq 0] = E[f \geq 0], \\ 0, & \text{ja} \quad x \in E[\lambda f < 0] = E[f < 0], \end{cases}$$

$$\lambda f^+(x) = \begin{cases} \lambda f(x), & \text{ja} \quad x \in E[f \geq 0], \\ 0, & \text{ja} \quad x \in E[f < 0]. \end{cases}$$

Tātad $(\lambda f)^+(x) = \lambda f^+(x)$ jebkuram $x \in E$, ja $\lambda > 0$, t.i., $(\lambda f)^+ = \lambda f^+$, ja $\lambda > 0$.

b) Pieņemsim, ka $\lambda = 0$. No vienas puses, tā kā $E[0f \geq 0] = E$, tad, izmantojot (4.98), iegūsim, ka $(\lambda f)^+(x) = 0f(x) = 0$ jebkuram $x \in E = E[0f \geq 0]$. No otras puses,

acīmredzot, $\lambda f(x) = 0f(x) = 0$ jebkuram $x \in E$. Tātad $(\lambda f)^+(x) = \lambda f^+(x)$ jebkuram $x \in E$, ja $\lambda = 0$, t.i., $(\lambda f)^+ = \lambda f^+$, ja $\lambda = 0$.

c) Pieņemsim, ka $\lambda < 0$. Tad, izmantojot (4.98) un (4.99), iegūsim

$$(\lambda f)^+(x) = \begin{cases} \lambda f(x), & \text{ja} \quad x \in E[\lambda f \geq 0] = E[f \leq 0], \\ 0, & \text{ja} \quad x \in E[\lambda f < 0] = E[f > 0], \end{cases} \tag{4.120}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} 0, & \text{ja} \quad x \in E[f \geq 0], \\ -f(x), & \text{ja} \quad x \in E[f < 0]. \end{cases} \tag{4.121}$$

Reizinot (4.121) ar $-\lambda$, atrodam

$$-\lambda f^-(x) = \begin{cases} 0, & \text{ja} \quad x \in E[f \geq 0], \\ \lambda f(x), & \text{ja} \quad x \in E[f < 0], \end{cases}$$

jeb

$$-\lambda f^-(x) = \begin{cases} 0, & \text{ja} \quad x \in E[f > 0], \\ \lambda f(x), & \text{ja} \quad x \in E[f \leq 0]. \end{cases} \tag{4.122}$$

Atzīmēsim tikai, ka $\lambda f(x) = 0$, ja $x \in E[f = 0]$. No (4.120) un (4.122) izriet, ka $(\lambda f)^+(x) = -\lambda f^-(x)$ jebkuram $x \in E$, ja $\lambda < 0$, t.i., $(\lambda f)^+ = -\lambda f^-$, ja $\lambda < 0$.

Tādējādi formula (4.118) ir patiesa. Analoģiski pierāda formulas (4.119) patiesumu.

Pieņemsim, ka funkcija f ir summējama kopā E. Pierādīsim, ka funkcija λf arī ir summējama kopā E jebkuram $\lambda \in \mathbb{R}$. Tā kā f ir summējama funkcija kopā E, tad no 4.7. definīcijas izriet, ka funkcijas f^+ un f^- arī ir summējamas kopā E. No 4.2. paragrāfa 2° īpašības seko, ka λf^+ un λf^- ir summējamas funkcijas kopā E *jebkuram* $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Pieņemsim, ka $\lambda \geq 0$. No (4.118) izriet, ka $(\lambda f)^+ = \lambda f^+$. Tā kā λf^+ ir summējama funkcija kopā E, tad arī $(\lambda f)^+$ ir summējama funkcija kopā E. No (4.119) izriet, ka $(\lambda f)^- = \lambda f^-$. Tā kā λf^- ir summējama funkcija kopā E, tad arī $(\lambda f)^-$ ir summējama funkcija kopā E. Tātad $(\lambda f)^+$ un $(\lambda f)^-$ ir summējamas funkcijas kopā E. No 4.7. definīcijas seko, ka λf ir summējama funkcija kopā E.

b) Pieņemsim, ka $\lambda < 0$. No (4.118) izriet, ka $(\lambda f)^+ = -\lambda f^-$. Tā kā $\lambda_1 f^-$, kur $\lambda_1 = -\lambda$, ir summējama funkcija kopā E, tad arī $(\lambda f)^+$ ir summējama funkcija kopā E. No (4.119) izriet, ka $(\lambda f)^- = -\lambda f^+$. Tā kā $\lambda_1 f^+$, kur $\lambda_1 = -\lambda$, ir summējama funkcija kopā E, tad arī $(\lambda f)^+$ ir summējama funkcija kopā E. Tātad $(\lambda f)^+$ un $(\lambda f)^-$ ir summējamas funkcijas kopā E. No 4.7. definīcijas seko, ka λf ir summējama funkcija kopā E.

Pierādīsim vienādību (4.117).

a) Pieņemsim, ka $\lambda \geq 0$. Atgādināsim, ka saskaņā ar funkcijas λf definīciju

$$\forall x \in E : (\lambda f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f(x). \tag{4.123}$$

Ņemot vērā (4.123), 4.7. definīciju, formulas (4.118) un (4.119), kā arī 4.2. paragrāfa 2° īpašību, iegūsim

$$\int\limits_E \lambda f(x)dx = \int\limits_E (\lambda f)(x)dx = \int\limits_E (\lambda f)^+(x)dx - \int\limits_E (\lambda f)^-(x)dx =$$

$$= \int\limits_E \lambda f^+(x)dx - \int\limits_E \lambda f^-(x)dx = \lambda \int\limits_E f^+(x)dx - \lambda \int\limits_E f^-(x)dx =$$

$$= \lambda \left[\int\limits_E f^+(x)dx - \int\limits_E f^-(x)dx \right] = \lambda \int\limits_E f(x)dx.$$

Tātad vienādība (4.117) ir patiesa, ja $\lambda \geq 0$.

b) Pieņemsim, ka $\lambda < 0$. Spriežot līdzīgi kā a) punktā, iegūsim

$$\int\limits_E \lambda f(x)dx = \int\limits_E (\lambda f)(x)dx = \int\limits_E (\lambda f)^+(x)dx - \int\limits_E (\lambda f)^-(x)dx =$$

$$= \int\limits_E (-\lambda) f^-(x)dx - \int\limits_E (-\lambda) f^+(x)dx = (-\lambda) \int\limits_E f^-(x)dx - (-\lambda) \int\limits_E f^+(x)dx =$$

$$= (-\lambda) \left[\int\limits_E f^-(x)dx - \int\limits_E f^+(x)dx \right] = \lambda \left[\int\limits_E f^+(x)dx - \int\limits_E f^-(x)dx \right] = \lambda \int\limits_E f(x)dx.$$

Tātad vienādība (4.117) ir patiesa, ja $\lambda < 0$.

Tādējādi vienādība (4.117) ir patiesa jebkuram $\lambda \in \mathbb{R}$.◀

4.14. piezīme. Formulēsim pēdējās īpašības svarīgu speciālgadījumu.

Ja funkcija f ir summējama kopā E, tad funkcijas f pretējā funkcija $-f$ arī ir summējama kopā E, pie tam

$$\int\limits_E \big(- f(x) \big) dx = - \int\limits_E f(x)dx. \tag{4.124}$$

▶ Apgalvojuma patiesums izriet no summējamu funkciju 4° īpašības, ja ņemt vērā, ka $(-1)f = -f$, t.i., funkcijas f reizinājums ar skaitli $\lambda = -1$ ir vienāds ar funkcijas f pretējo funkciju $-f$.◀

5° Summējamu funkciju sanumurējamā aditivitāte. *Pieņemsim, ka mērojama kopa E ir ne vairāk kā sanumurējams savstarpēji nešķeļošos mērojamu apakškopu $E_k \subset E$ apvienojums, bet funkcija f ir mērojama kopā E.*

1. *Ja ir definēts funkcijas f Lebega integrālis kopā E, tad ir definēts funkcijas f Lebega integrālis katrā kopā E_k, pie tam ir patiesa vienādība*

$$\int\limits_E f(x)dx = \sum_k \int\limits_{E_k} f(x)dx. \tag{4.125}$$

2. *Ja funkcija f ir summējama kopā E, tad funkcija f ir summējama katrā kopā E_k, pie tam ir patiesa vienādība (4.125).*

▶ 1. Pieņemsim, ka ir definēts funkcijas f Lebega integrālis kopā E. Tad no summējamu funkciju 3° īpašības izriet, ka ir definēts funkcijas f Lebega integrālis katrā kopā E_k. Pierādīsim vienādību (4.125).

Tā kā funkcija f ir mērojama kopā E, tad funkcijas f^+ un f^- arī ir mērojamas kopā E. Ņemot vērā, ka funkcijas f^+ un f^- ir nenegatīvas kopā E, no 4.2. paragrāfa 8° īpašības izriet:

$$\int\limits_E f^+(x)dx = \sum_k \int\limits_{E_k} f^+(x)dx, \tag{4.126a}$$

$$\int\limits_E f^-(x)dx = \sum_k \int\limits_{E_k} f^-(x)dx. \tag{4.126b}$$

Tā kā ir definēts funkcijas f Lebega integrālis kopā E, tad saskaņā ar 4.7. definīciju

$$\int\limits_E f(x)dx = \int\limits_E f^+(x)dx - \int\limits_E f^-(x)dx, \tag{4.127}$$

kur vismaz viens no Lebega integrāļiem $\int\limits_E f^+(x)dx$ vai $\int\limits_E f^-(x)dx$ ir galīgs. Noteiktības labad pieņemsim, ka integrālis $\int\limits_E f^-(x)dx$ ir galīgs (tātad šis integrālis ir nenegatīvs skaitlis), t.i., funkcija f^- ir summējama kopā E. No 4.2. paragrāfa 8° īpašības izriet, ka funkcija f^- ir summējama katrā kopā E_k, t.i., $\int\limits_{E_k} f^-(x)dx$ ir nenegatīvs skaitlis jebkuram k.

Tā kā ir definēts funkcijas f Lebega integrālis kopā E_k katram k, tad saskaņā ar 4.7. definīciju jebkuram k ir patiesa vienādība

$$\int\limits_{E_k} f(x)dx = \int\limits_{E_k} f^+(x)dx - \int\limits_{E_k} f^-(x)dx. \tag{4.128}$$

Tā kā jebkuram k integrālis $\int\limits_{E_k} f^+(x)dx$ ir vai nu nenegatīvs skaitlis, vai arī $+\infty$, bet $\int\limits_{E_k} f^-(x)dx$ ir nenegatīvs skaitlis jebkuram k, tad no (4.128) izriet, ka jebkuram k integrālis $\int\limits_{E_k} f(x)dx$ ir vai nu reāls skaitlis, vai arī $+\infty$.

Vienādības (4.125) pierādījumu veiksim, apskatot visus iespējamos gadījumus.

A) Pieņemsim, ka eksistē indekss k, ka $\int\limits_{E_k} f^+(x)dx = +\infty$. Tad no (4.128) izriet, ka $\int\limits_{E_k} f(x)dx = +\infty$. Tāpēc arī

$$\sum_k \int\limits_{E_k} f(x)dx = +\infty. \tag{4.129}$$

No otras puses, tā kā $\int\limits_{E_k} f^+(x)dx = +\infty$, tad $\sum\limits_k \int\limits_{E_k} f^+(x)dx = +\infty$. No (4.126a) seko, ka $\int\limits_E f^+(x)dx = +\infty$. Tāpēc no (4.127) izriet

$$\int\limits_E f(x)dx = +\infty. \tag{4.130}$$

No (4.129) un (4.130) secinām, ka apskatāmajā gadījumā vienādība (4.125) ir patiesa.

B) Pieņemsim, ka $\int\limits_{E_k} f^+(x)dx < +\infty$ jebkuram indeksam k, t.i., funkcija f^+ ir summējama katrā kopā E_k.

1) Pieņemsim, ka indekss k pieņem galīgu skaitu vērtību $1, 2, \ldots, n$. No (4.127), (4.126a), (4.126b) un (4.128), ņemot vērā galīgu skaitlisku summu īpašības, iegūsim:

$$\int\limits_E f(x)dx = \int\limits_E f^+(x)dx - \int\limits_E f^-(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{E_k} f^+(x)dx - \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{E_k} f^-(x)dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\int\limits_{E_k} f^+(x)dx - \int\limits_{E_k} f^-(x)dx \right) = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{E_k} f(x)dx.$$

Tātad apskatāmajā gadījumā vienādība (4.125) ir patiesa.

2) Pieņemsim, ka indekss k pieņem sanumurējamu apjomu vērtību $1, 2, \ldots$.

2_{a}) Pieņemsim, ka

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f^+(x)dx = +\infty. \tag{4.131}$$

No (4.126a) un (4.131) izriet, ka $\int\limits_E f^+(x)dx = +\infty$. Tad no (4.127) seko

$$\int\limits_E f(x)dx = +\infty. \tag{4.132}$$

No otras puses, tā kā funkcija f^- ir summējama kopā E, tad no (4.126b) izriet, ka rinda $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f^-(x)dx$ konverģē; savukārt no (4.131) seko, ka rinda $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f^+(x)dx$ diverģē. Tāpēc šo rindu starpība arī diverģē, pie tam, ņemot vērā (4.131), šo rindu starpības summa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int\limits_{E_k} f^+(x)dx - \int\limits_{E_k} f^-(x)dx \right) = +\infty. \tag{4.133}$$

No (4.128) un (4.133) iegūsim

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f(x)dx = +\infty. \tag{4.134}$$

No (4.132) un (4.134) secinām, ka apskatāmajā gadījumā vienādība (4.125) ir patiesa.

2_{b}) Pieņemsim, ka

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f^+(x)dx < +\infty. \tag{4.135}$$

No (4.127), (4.126a), (4.126b) un (4.128), ņemot vērā, ka konverģentas skaitliskas rindas drīkst atņemt, iegūsim:

$$\int\limits_E f(x)dx = \int\limits_E f^+(x)dx - \int\limits_E f^-(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f^+(x)dx - \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f^-(x)dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int\limits_{E_k} f^+(x)dx - \int\limits_{E_k} f^-(x)dx \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f(x)dx.$$

Tātad apskatāmajā gadījumā vienādība (4.125) ir patiesa.

Tādējādi vienādība (4.125) ir pierādīta.

2. Ja funkcija f ir summējama kopā E, tad saskaņā ar summējamu funkciju 3° īpašību funkcija f ir summējama katrā kopā E_k. Vienādības (4.125) patiesums izriet no 1. punktā pierādītā. ◀

4.15. piezīme. 1°, 3°, 4°, 5° un 8° īpašības pierādījumi balstījās uz 4.7. definīciju un vienādību (4.104). Taču varēja izmantojot arī 4.6. definīciju un vienādību (4.105b) vai (4.94). Iesakām lasītajam par to patstāvīgi pārliecināties (skat. 21. uzdevumu šīs nodaļas beigās).

6° *Pieņemsim, ka mērojama kopa E ir ne vairāk kā sanumurējams savstarpēji nešķeļošos mērojamu apakškopu $E_k \subset E$ apvienojums.*

1. *Ja indekss k pieņem sanumurējamu apjomu vērtību $1, 2, \ldots$ un funkcija f ir summējama katrā kopā E_k, pie tam*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} \big|f(x)\big| dx < +\infty, \tag{4.136}$$

tad funkcija f ir summējama kopā E un ir patiesa vienādība

$$\int\limits_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f(x)dx. \tag{4.137}$$

2. *Ja indekss k pieņem galīgu skaitu vērtību $1, 2, \ldots, n$ un funkcija f ir summējama katrā kopā E_k, tad funkcija f ir summējama kopā E un ir patiesa vienādība*

$$\int\limits_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{E_k} f(x)dx. \tag{4.138}$$

▶ 1. Pieņemsim, ka indekss k pieņem sanumurējamu apjomu vērtību $1, 2, \ldots$. Ja funkcija f ir summējama katrā kopā E_k, tad no summējamu funkciju 1° īpašības izriet, ka funkcija $|f|$ arī ir summējama katrā kopā E_k. No 4.2. paragrāfa 9° īpašības, ņemot vērā nevienādību (4.136), seko, ka funkcija $|f|$ ir summējama kopā E. Tāpēc saskaņā ar summējamu funkciju 1° īpašību funkcija f ir summējama kopā E. Vienādības (4.137) patiesums izriet no summējamu funkciju sanumurējamās aditivitātes.

2. Pieņemsim, ka indekss k pieņem galīgu skaitu vērtību $1, 2, \ldots, n$. Ja funkcija f ir summējama katrā kopā E_k, tad no summējamu funkciju 1° īpašības izriet, ka funkcija

$|f|$ arī ir summējama katrā kopā E_k. No 4.2. paragrāfa 9° īpašības seko, ka funkcija $|f|$ ir summējama kopā E. Tāpēc saskaņā ar summējamu funkciju 1° īpašību funkcija f ir summējama kopā E. Vienādības (4.138) patiesums izriet no summējamu funkciju sanumurējamās aditivitātes.◀

4.6. piemērs. *Pieņemsim, ka mērojama kopa E ir savstarpēji nešķeļošos galīga mēra kopu E_k $(k \in \mathbb{N})$ apvienojums, bet f ir kopā E definēta funkcija, ka $f(x) = c_k$ jebkuram $x \in E_k$, kur c_k $(k \in \mathbb{N})$ ir reālas konstantes. Ja*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \cdot \mathrm{m}(E_k) < +\infty,$$

tad funkcija f ir summējama kopā E, pie tam

$$\int_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot \mathrm{m}(E_k). \tag{4.139}$$

▶ Apgalvojuma patiesums izriet no 6° īpašības, ja ņemt vērā 3.5. piezīmi.◀

7° *Ja funkcijas f un g ir mērojamas kopā E, pie tam gandrīz visiem $x \in E$ ir spēkā nevienādība $\big|f(x)\big| \le g(x)$, tad*

$$\int_E \big|f(x)\big|dx \le \int_E g(x)dx. \tag{4.140}$$

Ja funkcija g ir summējama kopā E, tad arī funkcija f ir summējama kopā E. Ja funkcija f nav summējama kopā E, tad arī funkcija g nav summējama kopā E.

▶ Tā kā $\big|f(x)\big| \le g(x)$ gandrīz visiem $x \in E$, tad kopas $E_1 = E\big[|f| > g\big]$ Lebega mērs ir vienāds ar 0. No 4.5. piemēra izriet

$$\int_{E_1} \big|f(x)\big|dx = 0, \quad \int_{E_1} g(x)dx = 0. \tag{4.141}$$

Tā kā funkcija f ir mērojama kopā E, tad arī funkcija $|f|$ ir mērojama kopā E. Tātad funkcijas $|f|$ un g ir mērojamas kopā E. Kopa $E \setminus E_1$ ir mērojama kā divu mērojamu kopu starpība, jo kopa E ir mērojama saskaņā ar doto, bet E_1 ir mērojama kopa kā nulles mēra kopa. No mērojamu funkciju 3° īpašības izriet, ka funkcijas $|f|$ un g ir mērojamas kopā $E \setminus E_1$. Tā kā $\big|f(x)\big| \le g(x)$ jebkuram $x \in E \setminus E_1$, tad no 4.2. paragrāfa 5° īpašības izriet

$$\int_{E\setminus E_1} \big|f(x)\big|dx \le \int_{E\setminus E_1} g(x)dx. \tag{4.142}$$

Tā kā $E = E_1 \cup (E \setminus E_1)$ un $E_1 \cap (E \setminus E_1) = \emptyset$, tad no summējamu funkciju sanumurējamās aditivitātes, ņemot vērā (4.141) un (4.142), seko

$$\int_E \big|f(x)\big|dx = \int_{E_1} \big|f(x)\big|dx + \int_{E\setminus E_1} \big|f(x)\big|dx \le \int_{E_1} g(x)dx + \int_{E\setminus E_1} g(x)dx = \int_E g(x)dx,$$

t.i., izpildās (4.140).

Pierādīsim īpašības otro apgalvojumu. No (4.140), ņemot vērā summējamu funkciju 1° īpašību, atrodam

$$0 \le \int\limits_E \big|f(x)\big| dx \le \int\limits_E g(x)dx. \tag{4.143}$$

Ja funkcija g ir summējama kopā E, tad no (4.143) seko, ka

$$0 \le \int\limits_E g(x)dx < +\infty,$$

un līdz arī

$$0 \le \int\limits_E \big|f(x)\big| dx < +\infty,$$

t.i., funkcija $|f|$ arī ir summējama kopā E. No summējamu funkciju 1° īpašības izriet, ka funkcija f ir summējama kopā E. Savukārt, ja funkcija f nav summējama kopā E, tad no summējamu funkciju 1° īpašības izriet, ka funkcija $|f|$ arī nav summējama kopā E, t.i., $\int\limits_E \big|f(x)\big| dx = +\infty$. No (4.143) seko, ka $\int\limits_E g(x)dx = +\infty$, t.i., funkcija g nav summējama kopā E.◀

4.16. piezīme. *Pieņemsim, ka funkcijas f un g ir mērojamas kopā E, pie tam gandrīz visiem $x \in E$ ir spēkā $\big|f(x)\big| \le g(x)$. Ja funkcija g ir summējama kopā E, tad arī funkcija f ir summējama kopā E, pie tam ir spēkā nevienādība*

$$\left|\int\limits_E f(x)dx\right| \le \int\limits_E g(x)dx.$$

▶ Apgalvojuma patiesums izriet no summējamu funkciju 1° un 7° īpašības.◀

Atzīmēsim, ka pēdējā nevienādība būs spēkā arī tad, ja pieprasīt tikai integrāļa $\int\limits_E f(x)dx$ definētību, nepieprasot funkcijas g summējamību kopā E.

8° *Pieņemsim, ka $f \overset{E}{\sim} g$, t.i., funkcijas f un g ir ekvivalentas kopā E.*

1. *Ja ir definēts funkcijas f Lebega integrālis kopā E, tad ir definēts arī funkcijas g Lebega integrālis kopā E, pie tam izpildās vienādība*

$$\int\limits_E f(x)dx = \int\limits_E g(x)dx. \tag{4.144}$$

2. *Ja funkcija f ir summējama kopā E, tad arī funkcija g ir summējama kopā E, pie tam ir spēkā vienādība (4.144).*

▶ 1. Tā kā f un g ir ekvivalentas funkcijas kopā E, tad $\mathrm{m}(E_0) = 0$, kur $E_0 = E[f \ne g]$.

Apskatīsim kopu $E^+ = E[f^+ \ne g^+]$. Pierādīsim, ka $E^+ \subset E_0$. Apskatīsim četras kopas:

$$E_1 = E[f \ge 0] \cap E[g \ge 0], \quad E_3 = E[f < 0] \cap E[g \ge 0],$$
$$E_2 = E[f \ge 0] \cap E[g < 0], \quad E_4 = E[f < 0] \cap E[g < 0].$$

Tad
$$E = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4,\ E_i \cap E_j = \emptyset\ \ (i \neq j;\ i,j = 1,2,3,4),$$
no kurienes seko
$$E^+ = (E^+ \cap E_1) \cup (E^+ \cap E_2) \cup (E^+ \cap E_3) \cup (E^+ \cap E_4). \tag{4.145}$$

a) Pierādīsim, ka $E^+ \cap E_1 \subset E_0$. Pieņemsim, ka $x \in E^+ \cap E_1$, t.i., $x \in E^+$ un $x \in E_1$. Tā kā $x \in E^+$, tad $f^+(x) \neq g^+(x)$. Tā kā $x \in E_1$, tad $f(x) \geq 0$ un $g(x) \geq 0$. No (4.96) seko, ka $f^+(x) = f(x)$ un $g^+(x) = g(x)$. Tā kā $f^+(x) \neq g^+(x)$, tad arī $f(x) \neq g(x)$, t.i., $x \in E_0$.

b) Pierādīsim, ka $E^+ \cap E_2 \subset E_0$. Pieņemsim, ka $x \in E^+ \cap E_2$, t.i., $x \in E^+$ un $x \in E_2$. Tā kā $x \in E_2$, tad $f(x) \geq 0$ un $g(x) < 0$, no kurienes seko, ka $f(x) \neq g(x)$, t.i., $x \in E_0$.

c) Pierādīsim, ka $E^+ \cap E_3 \subset E_0$. Pieņemsim, ka $x \in E^+ \cap E_3$, t.i., $x \in E^+$ un $x \in E_3$. Tā kā $x \in E_3$, tad $f(x) < 0$ un $g(x) \geq 0$, no kurienes seko, ka $f(x) \neq g(x)$, t.i., $x \in E_0$.

d) Pierādīsim, ka $E^+ \cap E_4 \subset E_0$. Pieņemsim, ka $x \in E^+ \cap E_4$, t.i., $x \in E^+$ un $x \in E_4$. Tā kā $x \in E^+$, tad $f^+(x) \neq g^+(x)$. Tā kā $x \in E_4$, tad $f(x) < 0$ un $g(x) < 0$. No (4.96) seko, ka $f^+(x) = 0$ un $g^+(x) = 0$, t.i., $f^+(x) = g^+(x)$. No iegūtās pretrunas secinām, ka $E^+ \cap E_4 = \emptyset$. Tātad $E^+ \cap E_4 \subset E_0$.

No (4.145), ņemot vērā a), b), c) un d), izriet, ka $E^+ \subset E_0$. Tā E_0 ir nulles mēra kopa, tad arī tās apakškopa E^+ ir nulles mēra kopa. Tātad funkcijas f^+ un g^+ ir ekvivalentas kopā E, t.i., $f^+ \overset{E}{\sim} g^+$. Spriežot līdzīgi pierāda, ka arī $f^- \overset{E}{\sim} g^-$.

Pieņemsim, ka ir definēts funkcijas f Lebega integrālis kopā E. No 4.7. definīcijas seko, ka funkcija f ir mērojama kopā E un vismaz viens no integrāļiem
$$\int\limits_E f^+(x)dx \ \text{ vai } \int\limits_E f^-(x)dx \tag{4.146}$$
ir galīgs, pie tam
$$\int\limits_E f(x)dx = \int\limits_E f^+(x)dx - \int\limits_E f^-(x)dx. \tag{4.147}$$

Tā kā $f \overset{E}{\sim} g$ un funkcija f ir mērojama kopā E, tad no 2.3. teorēmas izriet, ka funkcija g arī ir mērojama kopā E. Taču tad funkcijas f^+, g^+, f^- un g^- arī ir mērojamas kopā E. Tātad funkcijas f^+ un g^+ (attiecīgi f^- un g^-) ir ekvivalentas nenegatīvas mērojamas funkcijas kopā E. No 4.2. paragrāfa 10° īpašības izriet
$$\int\limits_E f^+(x)dx = \int\limits_E g^+(x)dx, \quad \int\limits_E f^-(x)dx = \int\limits_E g^-(x)dx. \tag{4.148}$$

Tā kā vismaz viens no integrāļiem (4.146) ir galīgs, tad, ņemot vērā (4.148), secinām, ka vismaz viens no integrāļiem
$$\int\limits_E g^+(x)dx \ \text{ vai } \int\limits_E g^-(x)dx$$
arī ir galīgs. Tāpēc no 4.7. definīcijas izriet, ka ir definēts arī funkcijas g Lebega integrālis kopā E, pie tam
$$\int\limits_E g(x)dx = \int\limits_E g^+(x)dx - \int\limits_E g^-(x)dx. \tag{4.149}$$

Vienādības (4.144) patiesums izriet no (4.148), (4.147) un (4.149).

2. Ja funkcija f ir summējama kopā E, tad saskaņā ar 4.7. definīciju ir definēts integrālis $\int\limits_E f(x)dx$, pie tam šis integrālis ir galīgs. No 1. punktā pierādītā izriet, ka integrālis $\int\limits_E g(x)dx$ arī ir definēts, pie tam ir spēkā vienādība (4.144). Tā kā integrālis $\int\limits_E f(x)dx$ ir galīgs, tad no (4.144) seko, ka integrālis $\int\limits_E g(x)dx$ arī ir galīgs, t.i., funkcija g ir summējama kopā E.◀

9° *Ja funkcija f ir vienāda ar nulli gandrīz visur kopā E, tad f ir mērojama funkcija kopā E un*

$$\int\limits_E f(x)dx = 0,$$

līdz ar to funkcija f ir summējama kopā E.

▶ Īpašības patiesums izriet no summējamu funkciju 8° īpašības un 4.2. piemēra.◀

10° *Ja funkcijas f un g ir summējamas kopā E, tad šo funkciju summa $f+g$ arī ir summējama funkcija kopā E, pie tam*

$$\int\limits_E \big(f(x)+g(x)\big)dx = \int\limits_E f(x)dx + \int\limits_E g(x)dx. \tag{4.150}$$

▶ Tā kā funkcijas f un g ir summējamas kopā E, tad saskaņā ar summējamu funkciju 1° īpašību funkcijas $|f|$ un $|g|$ arī ir summējamas kopā E. No 4.2. paragrāfa 1° īpašības seko, ka $|f|+|g|$ - summējama funkcija kopā E. Tā kā funkcijas f un g ir summējamas kopā E, tad saskaņā ar 4.6. definīciju funkcijas f un g ir mērojamas kopā E. Tāpēc funkciju f un g summas modulis $|f+g|$ ir mērojama funkcija kopā E. Tā kā jebkuram $x \in E$ ir spēkā nevienādība $\big|f(x)+g(x)\big| \le \big|f(x)\big| + \big|g(x)\big|$, tad no 4.2. paragrāfa 5° īpašības seko, ka $|f+g|$ ir summējama funkcija kopā E. No summējamu funkciju 1° īpašības izriet, ka $f+g$ ir summējama funkcija kopā E.

Pierādīsim vienādību (4.150). Apskatīsim sešas kopas:

$$\begin{aligned}
E_1 &= E[f \ge 0] \cap E[g \ge 0],\\
E_2 &= E[f \ge 0] \cap E[g < 0] \cap E[f+g \ge 0],\\
E_3 &= E[f \ge 0] \cap E[g < 0] \cap E[f+g < 0],\\
E_4 &= E[f < 0] \cap E[g < 0],\\
E_5 &= E[f < 0] \cap E[g \ge 0] \cap E[f+g \ge 0],\\
E_6 &= E[f < 0] \cap E[g \ge 0] \cap E[f+g < 0].
\end{aligned}$$

Viegli pārliecināties, ka kopas E_i $(i = 1,2,3,4,5,6)$ ir mērojamas, pie tam

$$E = \bigcup_{i=1}^{6} E_i \quad \text{un} \quad E_i \cap E_j = \emptyset \ \ (i \ne j;\ i,j = 1,2,3,4,5,6).$$

Pierādīsim, ka

$$\int\limits_{E_i} \big(f(x)+g(x)\big)dx = \int\limits_{E_i} f(x)dx + \int\limits_{E_i} g(x)dx \ \ (i = 1,2,3,4,5,6). \tag{4.151}$$

Pieņemsim, ka $i = 1$. Tā kā funkcijas f un g ir summējamas kopā E, no summējamu funkciju 5° īpašības seko, ka funkcijas f un g ir summējamas kopā E_1. Atzīmēsim, ka funkcijas f un g ir nenegatīvas kopā E_1. Tāpēc no 4.2. paragrāfa 1° īpašības izriet vienādība

$$\int\limits_{E_1} \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int\limits_{E_1} f(x)dx + \int\limits_{E_1} g(x)dx.$$

Pieņemsim, ka $i = 2$. Funkcija f ir summējama kopā E saskaņā ar doto, funkcija $f + g$ ir summējama kopā E saskaņā ar iepriekš pierādīto, funkcija $-g$ arī ir summējama kopā E saskaņā ar 4.14. piezīmi. No summējamu funkciju 5° īpašības seko, ka funkcijas f, $-g$ un $f + g$ ir summējamas arī kopā E_2. Atzīmēsim, ka funkcijas f, $-g$ un $f + g$ ir nenegatīvas kopā E_2. Tā kā $f = (-g) + (f + g)$, tad no 4.2. paragrāfa 1° īpašības, ņemot vērā 4.14. piezīmi, iegūsim

$$\int\limits_{E_2} f(x)dx = \int\limits_{E_2} \big(-g(x)\big)dx + \int\limits_{E_2} \big(f(x) + g(x)\big)dx = -\int\limits_{E_2} g(x)dx + \int\limits_{E_2} \big(f(x) + g(x)\big)dx,$$

no kurienes izriet

$$\int\limits_{E_2} \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int\limits_{E_2} f(x)dx + \int\limits_{E_2} g(x)dx.$$

Iesakām lasītājam patstāvīgi aplūkot gadījumus, kad $i = 3, 4, 5, 6$.

Tā kā funkcijas f, g un $f + g$ ir summējamas kopā E, tad no summējamu funkciju sanumurējamās aditivitātes izriet

$$\int\limits_{E} f(x)dx = \sum_{i=1}^{6} \int\limits_{E_i} f(x)dx, \quad \int\limits_{E} g(x)dx = \sum_{i=1}^{6} \int\limits_{E_i} g(x)dx, \tag{4.152}$$

$$\int\limits_{E} \big(f(x) + g(x)\big)dx = \sum_{i=1}^{6} \int\limits_{E_i} \big(f(x) + g(x)\big)dx. \tag{4.153}$$

No vienādībām (4.151), (4.152) un (4.153) atrodam

$$\int\limits_{E} \big(f(x) + g(x)\big)dx = \sum_{i=1}^{6} \int\limits_{E_i} \big(f(x) + g(x)\big)dx = \sum_{i=1}^{6} \left(\int\limits_{E_i} f(x)dx + \int\limits_{E_i} g(x)dx \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{6} \int\limits_{E_i} f(x)dx + \sum_{i=1}^{6} \int\limits_{E_i} g(x)dx = \int\limits_{E} f(x)dx + \int\limits_{E} g(x)dx.$$

Vienādība (4.150) ir pierādīta.◀

4.17. piezīme. *Ja funkcijas f un g ir summējamas kopā E, tad funkciju f un g starpība $f - g$ arī ir summējama funkcija kopā E, pie tam*

$$\int\limits_{E} \big(f(x) - g(x)\big)dx = \int\limits_{E} f(x)dx - \int\limits_{E} g(x)dx. \tag{4.154}$$

▶ Apgalvojuma patiesums izriet no summējamu funkciju 10° īpašības un 4.14. piezīmes, ja ņemt vērā, ka $f - g = f + (-g)$, t.i., funkciju f un g starpība ir vienāda ar funkcijas f un funkcijas g pretējās funkcijas $-g$ summu.◀

11° *Ja funkcijas f un g ir summējamas kopā E, tad jebkura funkciju f un g lineārā kombinācija $\lambda f + \mu g$, kur $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, arī ir summējama funkcija kopā, pie tam*

$$\int\limits_E \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)dx = \lambda \int\limits_E f(x)dx + \mu \int\limits_E g(x)dx. \tag{4.155}$$

► Īpašības patiesums seko no summējamu funkciju 4° un 10° īpašības.◄

12° **Summējamu funkciju linearitāte.** *Ja funkcijas $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ir summējamas kopā E, tad jebkura šo funkciju lineārā kombinācija $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n$, kur $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, arī ir summējama funkcija kopā E, pie tam*

$$\int\limits_E \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j(x)\right) dx = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \int\limits_E f_j(x)dx. \tag{4.156}$$

► Īpašības patiesumu pierāda ar matemātiskās indukcijas metodi, izmantojot summējamu funkciju 11° īpašību.◄

4.5. Robežpāreja zem Lebega integrāļa zīmes

4.5.1. Fatu teorēma

10. lemma. *Pieņemsim, ka funkcijas f un f_n $(n \in \mathbb{N})$ ir nenegatīvas galīga mēra kopā E. Ja $x \in E$ un $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, tad jebkuram $t > 0$ ir spēkā*

$$\lim_{n\to\infty} [f_n]_t(x) = [f]_t(x). \tag{4.157}$$

► Iesakām lasītājam patstāvīgi pierādīt šo lemmu, izmantojot virknes robežas un griezuma definīciju.◄

4.3. teorēma. **[Fatu[1] teorēma]** *Pieņemsim, ka f ir nenegatīva funkcija kopā E, bet f_n $(n \in \mathbb{N})$ ir nenegatīvas mērojamas funkcijas kopā E. Ja $(f_n) \xrightarrow[\text{g.v.}]{E} f$, tad*

1. *funkcija f ir mērojama kopā E;*
2. *ir spēkā nevienādība*

$$\int\limits_E f(x)dx \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_E f_n(x)dx. \tag{4.158}$$

3. *ja kopa*

$$\left\{ \int\limits_E f_n(x)dx : \ n \in \mathbb{N} \right\} \tag{4.159}$$

ir ierobežota no augšas, tad funkcija f ir summējama kopā E.

[1] P. Fatu (*Pierre Joseph Louis Fatou*, 1878-1929) - franču matemātiķis.

▶ 1. Funkcijas f mērojamība kopā E izriet no 2.8. teorēmas.

2. Pierādīsim teorēmas otro apgalvojumu.

Pieņemsim, ka E *ir galīga mēra kopa.* No 10. lemmas izriet, ka jebkuram $t > 0$ un gandrīz visiem $x \in E$ ir patiesa vienādība (4.157). Saskaņā ar griezumu 1° īpašību dotajam $t > 0$ funkcijas $[f]_t$ un $[f_n]_t$ $(n \in \mathbb{N})$ ir ierobežotas kopā E ar konstanti t, no kurienes seko, ka funkciju virkne $([f_n]_t)$ ir vienmērīgi ierobežota kopā E ar konstanti t. Izmantojot 1. sekas no 3.4. teorēmas, iegūsim

$$\int\limits_E [f]_t(x)dx = \lim_{m\to\infty} \int\limits_E [f_m]_t(x)dx \quad (t > 0). \tag{4.160}$$

Saskaņā ar griezumu 2° īpašību jebkuram $x \in E$ ir spēkā $[f_n]_t(x) \le f_n(x)$ $(n \in \mathbb{N})$. Tāpēc no 4.2. paragrāfa 5° īpašības izriet

$$\int\limits_E [f_m]_t(x)dx \le \int\limits_E f_m(x)dx \quad (t > 0,\ m \in \mathbb{N}). \tag{4.161}$$

Acīmredzot,

$$\int\limits_E f_m(x)dx \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_E f_n(x)dx \quad (m \in \mathbb{N}). \tag{4.162}$$

No (4.161) un (4.162) atrodam

$$\int\limits_E [f_m]_t(x)dx \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_E f_n(x)dx \quad (t > 0,\ m \in \mathbb{N}). \tag{4.163}$$

Pārejot nevienādībā (4.163) pie robežas, kad $m \to \infty$, un izmantojot (4.160), atrodam

$$\int\limits_E [f]_t(x)dx \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_E f_n(x)dx \quad (t > 0). \tag{4.164}$$

Pārejot nevienādībā (4.164) pie robežas, kad $t \to +\infty$, un izmantojot nenegatīvu mērojamu funkciju Lebega integrāļa definīciju, iegūsim (4.158).

Pieņemsim, ka E *ir bezgalīga mēra kopa.* Apskatīsim galīga mēra kopas

$$e_m = E \cap [-m; m] \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Saskaņā ar 4.2. definīciju

$$\int\limits_E f(x)dx = \lim_{m\to\infty} \int\limits_{e_m} f(x)dx, \tag{4.165a}$$

$$\int\limits_E f_n(x)dx = \lim_{m\to\infty} \int\limits_{e_m} f_n(x)dx \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{4.165b}$$

Pierādīsim, ka

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{e_m} f_n(x)dx = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_E f_n(x)dx. \tag{4.166}$$

Šim nolūkam, izmantojot suprēma definīciju, pierādīsim, ka

$$\alpha = \lim_{m\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{e_m} f_n(x)dx$$

ir kopas

$$A = \left\{ \int\limits_E f_n(x)dx \right\}_{n=1}^{\infty}$$

suprēms.

a) Apskatīsim patvaļīgu $a \in A$. Tad eksistē $n_0 \in \mathbb{N}$, ka

$$a = \int\limits_E f_{n_0}(x)dx.$$

Pārejot nevienādībā

$$\int\limits_{e_m} f_{n_0}(x)dx \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{e_m} f_n(x)dx \quad (m \in \mathbb{N})$$

pie robežas, kad $m \to \infty$, un izmantojot (4.165b), iegūsim

$$\int\limits_E f_{n_0}(x)dx = \lim_{m\to\infty} \int\limits_{e_m} f_{n_0}(x)dx \le \lim_{m\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{e_m} f_n(x)dx,$$

t.i., $a \le \alpha$. Tātad α *ir kopas* A *mažorante*.

b) Pieņemsim, ka α' ir patvaļīga kopas A mažorante, t.i.,

$$\int\limits_E f_n(x)dx \le \alpha' \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Tā kā $e_m \subset E$ $(m \in \mathbb{N})$, tad no 4.2. paragrāfa 5° īpašības izriet

$$\int\limits_{e_m} f_n(x)dx \le \int\limits_E f_n(x)dx \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Tātad

$$\int\limits_{e_m} f_n(x)dx \le \alpha' \quad (m, n \in \mathbb{N}),$$

no kurienes seko

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{e_m} f_n(x)dx \le \alpha' \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Pārejot šajā nevienādībā pie robežas, kad $m \to \infty$, iegūsim

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{e_m} f_n(x)dx \le \alpha' \quad (m \in \mathbb{N}),$$

t.i., $\alpha \le \alpha'$. Tātad α ir vismazākā kopas A mažorante.

No a) un b) izriet, ka $\alpha = \sup A$.

Saskaņā ar iepriekš pierādīto

$$\int\limits_{e_m} f(x)dx \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{e_m} f_n(x)dx \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Pārejot šajā nevienādībā pie robežas, kad $m \to \infty$, un izmantojot vienādības (4.165a) un (4.166), iegūsim

$$\int\limits_{E} f(x)dx = \lim_{m\to\infty} \int\limits_{e_m} f(x)dx \le \lim_{m\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{e_m} f_n(x)dx = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{E} f_n(x)dx.$$

Tātad nevienādība (4.158) ir pierādīta arī gadījumā, kad $\mathrm{m}(E) = +\infty$.

Tādējādi nevienādība (4.158) ir spēkā jebkurai mērojamai kopai E.

3. Ja kopa (4.159) ir ierobežota no augšas, tad šīs kopas suprēms

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{E} f_n(x)dx$$

ir galīgs. Tāpēc no (4.158) izriet, ka f ir summējama funkcija kopā E.◀

Sekas. *Ja, izpildoties Fatu teorēmas nosacījumiem, virknei*

$$\left(\int\limits_{E} f_n(x)dx \right)_{n=1}^{\infty}$$

eksistē galīga vai bezgalīga robeža, kad $n \to \infty$, tad

$$\int\limits_{E} f(x)dx \le \lim_{n\to\infty} \int\limits_{E} f_n(x)dx. \tag{4.167}$$

▶ Ja

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{E} f_n(x)dx = +\infty,$$

tad nevienādība (4.167), acīmredzot, izpildās. Pieņemsim, ka

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{E} f_n(x)dx = a < +\infty.$$

Saskaņā ar virknes robežas definīciju jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē $N \in \mathbb{N}$, ka visiem numuriem $n \ge N$ ir spēkā

$$\int\limits_{E} f_n(x)dx < a + \varepsilon,$$

no kurienes izriet

$$\sup_{n\ge N} \int\limits_{E} f_n(x)dx \le a + \varepsilon. \tag{4.168}$$

Funkciju virkne (g_n), kur $g_1 = f_N,\ g_2 = f_{N+1},\ g_3 = f_{N+2},\ \dots$, apmierina visus Fatu teorēmas nosacījumus, pie tam $(g_n) \xrightarrow[\text{g.v.}]{E} f$. Tāpēc no šīs teorēmas seko

$$\int\limits_E f(x)dx \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_E g_n(x)dx = \sup_{n\ge N} \int\limits_E f_n(x)dx. \tag{4.169}$$

No (4.168) un (4.169) izriet

$$\int\limits_E f(x)dx \le a + \varepsilon.$$

Pārejot šajā nevienādībā pie robežas, kad ε tiecas uz nulli no labās puses, iegūsim (4.167).◀

4.18. piezīme. Nevienādības (4.158) un (4.167) var būt arī stingras (skat. 12. uzdevumu šīs nodaļas beigās un 3.6. piemērā apskatīto funkciju virkni).

4.5.2. Levi teorēma

4.4. teorēma. **[Levi[2] teorēma]** *Pieņemsim, ka f ir nenegatīva funkcija kopā E, bet f_n $(n \in \mathbb{N})$ ir nenegatīvas mērojamas funkcijas kopā E, pie tam gandrīz visiem $x \in E$ ir spēkā*

$$f_1(x) \le f_2(x) \le \ \cdots\ \le f_n(x) \le \ \cdots\ . \tag{4.170}$$

Ja $(f_n) \xrightarrow[\text{g.v.}]{E} f$, tad

1. *funkcija f ir mērojama kopā E;*
2. *ir spēkā vienādība*
$$\int\limits_E f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x)dx; \tag{4.171}$$
3. *ja kopa*
$$\left\{ \int\limits_E f_n(x)dx : n \in \mathbb{N} \right\} \tag{4.172}$$
ir ierobežota no augšas, tad funkcija f ir summējama kopā E.

▶ 1. Funkcijas f mērojamība kopā E izriet no 2.8. teorēmas.

2. No (4.170), ņemot vērā 4.2. paragrāfa 10° īpašību, izriet, ka

$$\left(\int\limits_E f_n(x)dx \right)_{n=1}^{\infty} \tag{4.173}$$

ir augoša virkne, pie tam šīs virknes locekļi ir nenegatīvi skaitļi vai $+\infty$. Tāpēc virknei (4.173) eksistē galīga vai bezgalīga robeža. Izmantojot sekas no Fatu teorēmas, iegūsim

$$\int\limits_E f(x)dx \le \lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x)dx. \tag{4.174}$$

[2] *Beppo Levi*, B. Levi (1875-1961) - itāļu matemātiķis.

No otras puses, tā kā $(f_n) \xrightarrow[\text{g.v.}]{E} f$, tad, ņemot vērā 4.1.2. apakšparagrāfa 1. lemmu, katram $n \in \mathbb{N}$ un gandrīz visiem $x \in E$ ir spēkā

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \geq f_n(x).$$

Tāpēc no 4.2. paragrāfa 10° īpašības seko

$$\int\limits_E f(x)dx \geq \int\limits_E f_n(x)dx \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Pārejot šajā nevienādībā pie robežas, kad $n \to \infty$, iegūsim

$$\int\limits_E f(x)dx \geq \lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x)dx. \tag{4.175}$$

No (4.174) un (4.175) izriet (4.171).

3. Ja virkne (4.173) ir ierobežota no augšas, tad šai virknei eksistē galīga robeža. Tāpēc no (4.171) seko, ka funkcija f ir summējama kopā E.◀

4.19. piezīme.

- Vienādība (4.171) būs spēkā arī tad, ja funkcijas f un f_n $(n \in \mathbb{N})$ ir mērojamas (ne obligāti nenegatīvas) kopā E, $(f_n) \xrightarrow[\text{g.v.}]{E} f$ un gandrīz visiem $x \in E$ ir spēkā (4.170).
- Vienādība (4.171) būs spēkā arī tad, ja funkcijas f un f_n $(n \in \mathbb{N})$ ir mērojamas (ne obligāti nenegatīvas) kopā E, $(f_n) \xrightarrow[\text{g.v.}]{E} f$ un gandrīz visiem $x \in E$ ir spēkā

  $$f_1(x) \geq f_2(x) \geq \cdots \geq f_n(x) \geq \cdots .$$

  Iesakām lasītājam patstāvīgi pierādīt šos apgalvojumus (skat. 14. un 15. uzdevumu šīs nodaļas beigās).

4.5. teorēma. *Pieņemsim, ka f_n $(n \in \mathbb{N})$ ir nenegatīvas mērojamas funkcijas kopā E, pie tam gandrīz visiem $x \in E$ ir spēkā*

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq f_n(x) \leq \cdots . \tag{4.176}$$

Ja kopa

$$\left\{ \int\limits_E f_n(x)dx : n \in \mathbb{N} \right\} \tag{4.177}$$

ir ierobežota no augšas, tad

1. *funkcijas f_n $(n \in \mathbb{N})$ ir summējamas kopā E;*
2. *eksistē kopā E nenegatīva mērojama funkcija f, ka $(f_n) \xrightarrow[\text{g.v.}]{E} f$;*

3.
$$\int\limits_E f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x)dx. \tag{4.178}$$

4. funkcija f ir summējama kopā E.

► Pieņemsim, ka kopa (4.177) ir ierobežota no augšas ar konstanti $M > 0$, t.i.,

$$\int\limits_E f_n(x)dx \le M \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{4.179}$$

1. No (4.179) seko, ka funkcijas f_n $(n \in \mathbb{N})$ ir summējamas kopā E.

2. Apskatīsim kopu $E_0 = E\big[\exists n \in \mathbb{N} : f_n > f_{n+1}\big]$. Saskaņā ar doto E_0 ir nulles mēra kopa. Tad $E_1 = E \setminus E_0$ ir mērojama kopa, pie tam jebkuram $x \in E_1$ ir spēkā (4.176). Atzīmēsim, ka

$$E = E_0 \cup E_1, \ E_0 \cap E_1 = \emptyset. \tag{4.180}$$

Tā kā jebkuram $x \in E_1[f_n \ge k]$ $(n, k \in \mathbb{N})$ ir spēkā $f_n(x) \ge k$, tad no 4.2. paragrāfa 5° un 6° īpašības, ņemot vērā (4.179), seko

$$M \ge \int\limits_E f_n(x)dx \ge \int\limits_{E_1[f_n \ge k]} f_n(x)dx \ge k \cdot \mathrm{m}\Big(E_1\big[f_n \ge k\big]\Big) \quad (n, k \in \mathbb{N}),$$

no kurienes izriet

$$\mathrm{m}\Big(E_1\big[f_n \ge k\big]\Big) \le \frac{M}{k} \quad (n, k \in \mathbb{N}). \tag{4.181}$$

Atzīmēsim, ka kopas $E_1\big[f_n \ge k\big]$ ir mērojamas jebkuriem $n, k \in \mathbb{N}$.

Apskatīsim kopas

$$E_1{}' = E_1\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty\right] \quad \text{un} \quad E_1{}'' = E_1\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x) < +\infty\right].$$

Viegli pierādīt, ka

$$E_1{}' = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} E_1[f_n \ge k],$$

no kurienes seko, ka kopa $E_1{}'$ ir mērojama. Tātad arī kopa $E_1{}''$ ir mērojama, pie tam

$$E_1 = E_1{}' \cup E_1{}'', \ E_1{}' \cap E_1{}'' = \emptyset. \tag{4.182}$$

Tā kā jebkuram $k \in \mathbb{N}$ mērojamu kopu virkne $\big(E_1[f_n \ge k]\big)_{n=1}^{\infty}$ ir augoša, tad no mēra pusnepārtrauktības no apakšas un nevienādībām (4.181) izriet

$$\mathrm{m}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_1[f_n \ge k]\right) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{m}\big(E_1[f_n \ge k]\big) \le \frac{M}{k} \ (k \in \mathbb{N}). \tag{4.183}$$

Tā kā mērojamu kopu virkne

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_1[f_n \ge k]\right)_{k=1}^{\infty}$$

ir dilstoša, tad no mēra pusnepārtrauktības no augšas, ņemot vērā (4.183), seko

$$\mathrm{m}(E_1') \le \lim_{k\to\infty} \mathrm{m}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_1[f_n \ge k]\right) \le 0.$$

Ņemot vērā mēra nenegativitāti, secinām, ka $\mathrm{m}(E_1') = 0$, t.i., E_1' ir nulles mēra kopa.

No (4.180) un (4.182) izriet

$$E = \left(E_0 \cup E_1'\right) \cup E_1'',\ \left(E_0 \cup E_1'\right) \cap E_1'' = \emptyset,$$

kur $E_0 \cup E_1'$ ir nulles mēra kopa, bet kopā E_1'' funkciju virkne (f_n) konverģē. Apskatīsim patvaļīgu nenegatīvu funkciju $\widetilde{f}$ kopā $E_0 \cup E_1'$. Pieņemsim, ka

$$\forall x \in E : f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x), & \text{ja} \quad x \in E_1'', \\ \widetilde{f}(x), & \text{ja} \quad x \in E_0 \cup E_1'. \end{cases}$$

No iepriekš pierādītā seko, ka $(f_n) \xrightarrow[\text{g.v.}]{E} f$. Tā kā funkcijas f_n $(n \in \mathbb{N})$ ir mērojamas kopā E_1'', tad no 2.9. teorēmas izriet, ka arī funkcija f ir mērojama kopā E_1''. Ņemot vērā mērojamu funkciju 2° un 4° īpašību, secinām, ka funkcija f ir mērojama kopā $E = (E_0 \cup E_1') \cup E_1''$.

3.-4. Ņemot vērā 1. un 2. punktā pierādīto, no Levi teorēmas izriet, ka ir patiesa vienādība (4.178), pie tam funkcija f ir summējama kopā E.◀

4.6. teorēma. *Ja u_n $(n \in \mathbb{N})$ ir nenegatīvas mērojamas funkcijas kopā E, pie tam*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_E u_n(x)dx < +\infty, \tag{4.184}$$

tad

1. *funkcijas u_n $(n \in \mathbb{N})$ ir summējamas kopā E;*
2. *eksistē tāda kopā E nenegatīva mērojama funkcija f, ka gandrīz visiem $x \in E$ ir spēkā*
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = f(x); \tag{4.185}$$
3. $$\int_E f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E u_n(x)dx; \tag{4.186}$$
4. *funkcija f ir summējama kopā E;*
5. *gandrīz visiem $x \in E$ ir spēkā*
$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = 0. \tag{4.187}$$

▶ 1. Tā kā jebkuram $n \in \mathbb{N}$ ir spēkā

$$\int\limits_E u_n(x)dx \le \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_E u_k(x)dx,$$

tad no (4.184) seko, ka funkcijas u_n $(n \in \mathbb{N})$ ir summējamas kopā E.

2. Tā kā rindas $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ parciālsummu virkne (f_n), kur

$$\forall x \in E: \ f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \ \ (n \in \mathbb{N}),$$

apmierina visus 4.5. teorēmas nosacījumus, tad no šīs teorēmas izriet, ka eksistē tāda kopā E nenegatīva mērojama funkcija f, ka gandrīz visiem $x \in E$ ir spēkā $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Tāpēc saskaņā ar rindas summas definīciju gandrīz visiem $x \in E$ ir spēkā (4.185).

3. Ņemot vērā 4.5. teorēmas 3. apgalvojumu un 4.2. paragrāfa 4° īpašību, iegūsim

$$\int\limits_E f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_E \left(\sum_{k=1}^{n} u_k(x) \right) dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_E u_k(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_E u_n(x)dx.$$

Atzīmēsim tikai, ka pēdējā vienādība ir spēkā saskaņā ar rindas, kuras locekļi ir nenegatīvi skaitļi vai $+\infty$, summas definīciju. Tātad vienādība (4.186) ir pierādīta.

4. No (4.184) un (4.186) izriet, ka funkcija f ir summējama kopā E.

5. Tā kā rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ konverģē gandrīz visur kopā E, tad saskaņā ar rindas konverģences nepieciešamo pazīmi gandrīz visiem $x \in E$ ir spēkā (4.187).◀

4.5.3. Lebega teorēma

4.7. teorēma. **[Lebega teorēma]** *Pieņemsim, ka funkcijas f un f_n $(n \in \mathbb{N})$ ir mērojamas kopā E. Ja $(f_n) \overset{E}{\Rightarrow} f$, pie tam virkne (f_n) ir gandrīz visur kopā E vienmērīgi ierobežota ar nenegatīvu summējamu kopā E funkciju φ, t.i., katram $n \in \mathbb{N}$ un gandrīz visiem $x \in E$ ir patiesa nevienādība*

$$\big|f_n(x)\big| \le \varphi(x), \tag{4.188}$$

tad

1. *funkcijas f_n $(n \in \mathbb{N})$ ir summējamas kopā E;*
2. *gandrīz visiem $x \in E$ ir spēkā nevienādība*

$$\big|f(x)\big| \le \varphi(x); \tag{4.189}$$

3. *funkcija f ir summējama kopā E;*

4.

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_E f_n(x)dx = \int\limits_E f(x)dx. \tag{4.190}$$

▶ 1. Tā kā katram $n \in \mathbb{N}$ un gandrīz visiem $x \in E$ ir patiesa nevienādība (4.188), bet funkcija φ ir summējama kopā E, tad no 4.2. paragrāfa 10° īpašības izriet, ka funkcijas f_n $(n \in \mathbb{N})$ ir summējamas kopā E.

2. Tā kā $(f_n) \overset{E}{\Rightarrow} f$, tad no Risa teorēmas seko, ka eksistē virknes (f_n) apakšvirkne (f_{n_k}), ka $(f_{n_k}) \xrightarrow[\text{g.v.}]{E} f$. Tāpēc

$$\big(|f_{n_k}|\big) \xrightarrow[\text{g.v.}]{E} |f|. \tag{4.191}$$

Tā kā katram $n \in \mathbb{N}$ un gandrīz visiem $x \in E$ ir patiesa nevienādība (4.188), tad katram $k \in \mathbb{N}$ un gandrīz visiem $x \in E$ ir patiesa nevienādība $\big|f_{n_k}(x)\big| \le \varphi(x)$. Pārejot šajā nevienādībā pie robežas, kad $k \to \infty$, un izmantojot (4.191), iegūsim, ka gandrīz visiem $x \in E$ ir spēkā $\big|f(x)\big| \le \varphi(x)$.

3. Tā kā funkcija f ir mērojama kopā E, bet funkcija φ ir summējama kopā E, pie tam gandrīz visiem $x \in E$ ir spēkā (4.189), tad no summējamu funkciju 7° īpašības izriet, ka funkcija f ir summējama kopā E.

4. Pierādīsim vienādību (4.190). Pieņemsim, ka $\varepsilon > 0$.

Tā kā φ ir nenegatīva summējama funkcija kopā E, tad saskaņā ar nenegatīvu summējamu funkciju 4.5. definīciju

$$\int\limits_E \varphi(x)dx = \sup \Upsilon < +\infty,$$

kur

$$\Upsilon = \left\{ \int\limits_e \varphi(x)dx : e \subset E,\ \mathrm{m}(e) < +\infty,\ \varphi \text{ ir ierobežota kopā } e \right\}.$$

No suprēma īpašībām izriet, ka eksistē tāda kopas E galīga mēra apakškopa e, kurā funkcija φ ir ierobežota, ka

$$\int\limits_e \varphi(x)dx > \int\limits_E \varphi(x)dx - \frac{\varepsilon}{6}. \tag{4.192}$$

Tā kā E un e ir mērojamas kopas, pie tam $E = e \cup (E \setminus e)$ un $e \cap (E \setminus e) = \emptyset$, tad no 4.2. paragrāfa 8° īpašības seko, ka

$$\int\limits_E \varphi(x)dx = \int\limits_e \varphi(x)dx + \int\limits_{E\setminus e} \varphi(x)dx. \tag{4.193}$$

No (4.192) un (4.193) iegūsim

$$\int\limits_{E\setminus e} \varphi(x)dx < \frac{\varepsilon}{6}. \tag{4.194}$$

Tā kā nenegatīvā funkcija φ ir summējama kopā E, tad no 4.2. paragrāfa 15° īpašības izriet, ka eksistē tāds $\delta > 0$, ka jebkurai kopas E mērojamai apakškopai e', ka $\mathrm{m}(e') < \delta$, ir spēkā nevienādība

$$\int\limits_{e'} \varphi(x)dx < \frac{\varepsilon}{6}. \tag{4.195}$$

Izvēlēsimies tādu $\eta > 0$, ka

$$\eta \cdot \mathrm{m}(e) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.196}$$

Tā kā $(f_n) \overset{E}{\Rightarrow} f$, tad no konverģences pēc mēra definīcijas seko, ka eksistē tāds $n_0 \in \mathbb{N}$, ka visiem numuriem $n \geq n_0$, ir patiesa nevienādība

$$\mathrm{m}\Big(E\big[|f_n - f| \geq \eta\big]\Big) < \delta. \tag{4.197}$$

Katram $n \in \mathbb{N}$ apskatīsim trīs kopas:

$$\begin{aligned} E_1 &= E \setminus e, \\ E_{n2} &= e\big[|f_n - f| \geq \eta\big], \\ E_{n3} &= e\big[|f_n - f| < \eta\big]. \end{aligned}$$

Tad jebkuram $n \in \mathbb{N}$ ir spēkā sakarības:

$$E = E_1 \cup E_{n2} \cup E_{n3}, \tag{4.198a}$$

$$E_1 \cap E_{n2} = \emptyset,\ E_1 \cap E_{n3} = \emptyset,\ E_{n2} \cap E_{n3} = \emptyset. \tag{4.198b}$$

Atzīmēsim, ka jebkuram $n \in \mathbb{N}$ kopas E_1, E_{n2} un E_{n3} ir mērojamas. Tiešām, kopa E_1 ir mērojama kā mērojamu kopu E un e starpība. Tā kā funkcijas f un f_n $(n \in \mathbb{N})$ ir mērojamas kopā E, tad saskaņā ar 2.5. paragrāfā teikto jebkuram n funkcija $|f_n - f|$ $(n \in \mathbb{N})$ ir mērojama kopā E. No mērojamu funkciju 3° īpašības seko, ka funkcija $|f_n - f|$ $(n \in \mathbb{N})$ ir mērojama arī kopā e. Tāpēc funkcijas $|f_n - f|$ $(n \in \mathbb{N})$ Lebega kopas E_{n2} un E_{n3} ir mērojamas. Atzīmēsim, ka jebkuram $n \in \mathbb{N}$ kopu E_{n2} un E_{n3} mērs ir galīgs, jo šīs kopas ir galīga mēra kopas e apakškopas.

Saskaņā ar 1. un 2. punktā pierādīto funkcijas f un f_n $(n \in \mathbb{N})$ ir summējamas kopā E. No 4.17. piezīmes izriet, ka funkcija $f_n - f$ $(n \in \mathbb{N})$ arī ir summējama kopā E, pie tam ir patiesa vienādība

$$\int\limits_E \big(f_n(x) - f(x)\big)dx = \int\limits_E f_n(x)dx - \int\limits_E f(x)dx \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{4.199}$$

Tā kā funkcija $f_n - f$ $(n \in \mathbb{N})$ ir summējama kopā E, tad no summējamu funkciju 1° īpašības seko, ka funkcija $|f_n - f|$ $(n \in \mathbb{N})$ ir summējama kopā E, pie tam ir patiesa nevienādība

$$\left|\int\limits_E \big(f_n(x) - f(x)\big)dx\right| \leq \int\limits_E \big|f_n(x) - f(x)\big|dx \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{4.200}$$

Tā kā funkcija $|f_n - f|$ $(n \in \mathbb{N})$ ir summējama kopā E, tad no summējamu funkciju sanumurējamās aditivitātes, ņemot vērā (4.198a) un (4.198b), iegūsim, ka funkcija $|f_n - f|$

$(n \in \mathbb{N})$ ir summējama kopās E_1, E_{n2} un E_{n3}, pie tam ir spēkā vienādība

$$\int\limits_E \big|f_n(x) - f(x)\big|dx = \int\limits_{E_1} \big|f_n(x) - f(x)\big|dx + \\ + \int\limits_{E_{n2}} \big|f_n(x) - f(x)\big|dx + \int\limits_{E_{n3}} \big|f_n(x) - f(x)\big|dx \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{4.201}$$

No (4.199), (4.200) un (4.201) iegūsim

$$\left|\int\limits_E f_n(x)dx - \int\limits_E f(x)dx\right| \le \int\limits_{E_1} \big|f_n(x) - f(x)\big|dx + \\ + \int\limits_{E_{n2}} \big|f_n(x) - f(x)\big|dx + \int\limits_{E_{n3}} \big|f_n(x) - f(x)\big|dx \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{4.202}$$

Tagad novērtēsim nevienādības (4.202) labajā pusē atrodošos integrāļus.

Pirmā integrāļa novērtējums.

No (4.188) un (4.189) izriet, ka katram $n \in \mathbb{N}$ un gandrīz visiem $x \in E$ ir patiesa nevienādība

$$\big|f_n(x) - f(x)\big| \le 2\varphi(x). \tag{4.203}$$

Acīmredzot, nevienādība (4.203) ir spēkā katram $n \in \mathbb{N}$ un gandrīz visiem $x \in E_1$.

Tā kā funkcija φ ir summējama kopā E, tad no summējamu funkciju 3° īpašības izriet, ka funkcija φ ir summējama arī kopā E_1. Tāpēc no summējamu funkciju 4° īpašības seko, ka funkcija 2φ arī ir summējama kopā E_1, pie tam ir patiesa vienādība

$$\int\limits_{E_1} 2\varphi(x)dx = 2\int\limits_{E_1} \varphi(x)dx. \tag{4.204}$$

Tā kā funkcijas 2φ un $|f_n - f|$ $(n \in \mathbb{N})$ ir summējamas kopā E_1, pie tam katram $n \in \mathbb{N}$ un gandrīz visiem $x \in E_1$ ir patiesa nevienādība (4.203), tad no summējamu funkciju 7° īpašības seko

$$\int\limits_{E_1} \big|f_n(x) - f(x)\big|dx \le \int\limits_{E_1} 2\varphi(x)dx \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{4.205}$$

No (4.194), (4.204) un (4.205) iegūsim

$$\int\limits_{E_1} \big|f_n(x) - f(x)\big|dx \le \int\limits_{E_1} 2\varphi(x)dx = 2\int\limits_{E_1} \varphi(x)dx < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{3} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Tātad

$$\int\limits_{E_1} \big|f_n(x) - f(x)\big|dx < \frac{\varepsilon}{3} \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{4.206}$$

Otrā integrāļa novērtējums.

Tā kā $e \subset E$, tad $E_{n2} = e\big[|f_n - f| \ge \eta\big] \subset E\big[|f_n - f| \ge \eta\big]$ $(n \in \mathbb{N})$. Tāpēc no mēra monotonitātes izriet

$$\mathrm{m}(E_{n2}) \le \mathrm{m}\Big(E\big[|f_n - f| \ge \eta\big]\Big) \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{4.207}$$

Ja $n \geq n_0$, tad no (4.197) un (4.207) seko, ka $\mathrm{m}(E_{n2}) < \delta$. Tāpēc saskaņā ar nevienādību (4.195) iegūsim

$$\int\limits_{E_{n2}} \varphi(x)dx < \frac{\varepsilon}{6} \quad (n \geq n_0).$$

Spriežot līdzīgi kā iepriekš, tikai šoreiz attiecībā pret kopām E_{n2} $(n \geq n_0)$, iegūsim

$$\int\limits_{E_{n2}} \big|f_n(x) - f(x)\big|dx \leq \int\limits_{E_{n2}} 2\varphi(x)dx = 2\int\limits_{E_{n2}} \varphi(x)dx < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{3} \quad (n \geq n_0).$$

Tātad jebkuram

$$\int\limits_{E_{n2}} \big|f_n(x) - f(x)\big|dx < \frac{\varepsilon}{3} \quad (n \geq n_0). \tag{4.208}$$

Trešā integrāļa novērtējums.

Tā kā funkcija $|f_n - f|$ $(n \in \mathbb{N})$ ir summējama kopā E_{n3}, tad, protams, funkcija $|f_n - f|$ $(n \in \mathbb{N})$ ir mērojama kopā E_{n3}. Saskaņā ar mērojamu funkciju 3° īpašību konstantā kopā E_{n3} funkcija h, ka $h(x) = \eta$ jebkuram $x \in E_{n3}$, ir mērojama kopā E_{n3}. Tā kā katram $n \in \mathbb{N}$ un jebkuram $x \in E_{n3}$ ir spēkā $\big|f_n(x) - f(x)\big| < \eta$, tad no summējamu funkciju 7° īpašības, ņemot vērā 4.3. piemēru, izriet

$$\int\limits_{E_{n3}} \big|f_n(x) - f(x)\big|dx \leq \eta \cdot \mathrm{m}(E_{n3}) \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{4.209}$$

Tā kā $E_{n3} \subset e$ $(n \in \mathbb{N})$, tad no mēra monotonitātes seko

$$\mathrm{m}(E_{n3}) \leq \mathrm{m}(e) \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{4.210}$$

No (4.196), (4.209) un (4.210) iegūsim

$$\int\limits_{E_{n3}} \big|f_n(x) - f(x)\big|dx \leq \eta \cdot \mathrm{m}(E_{n3}) \leq \eta \cdot \mathrm{m}(e) < \frac{\varepsilon}{3} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Tātad

$$\int\limits_{E_{n3}} \big|f_n(x) - f(x)\big|dx < \frac{\varepsilon}{3} \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{4.211}$$

Galīgais novērtējums.

No (4.202), ņemot vērā iepriekš iegūtos integrāļu novērtējumus (4.206), (4.208) un (4.211), atrodam

$$\left|\int\limits_E f_n(x)dx - \int\limits_E f(x)dx\right| < \varepsilon \quad (n \geq n_0). \tag{4.212}$$

Tātad jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē $n_0 \in \mathbb{N}$, ka visiem numuriem $n \geq n_0$ ir spēkā (4.212). No virknes robežas definīcijas izriet (4.190).◀

1. sekas. *Pieņemsim, ka funkcijas f un f_n $(n \in \mathbb{N})$ ir mērojamas kopā E. Ja $(f_n) \overset{E}{\Rightarrow} f$, pie tam virkne (f_n) ir gandrīz visur kopā E vienmērīgi ierobežota ar konstanti $K > 0$, t.i., katram $n \in \mathbb{N}$ un gandrīz visiem $x \in E$ ir patiesa nevienādība $\big|f_n(x)\big| \leq K$, tad*

1. *gandrīz visiem $x \in E$ ir spēkā nevienādība $\left|f(x)\right| \leq K$;*
2. $$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x)dx = \int\limits_E f(x)dx;$$
3. *funkcijas f_n $(n \in \mathbb{N})$ un f ir summējamas kopā E.*

► Apgalvojuma patiesums izriet no 4.7. teorēmas, ja $\varphi(x) = K$ jebkuram $x \in E$.◄

2. sekas. *Pieņemsim, ka funkcijas f un f_n $(n \in \mathbb{N})$ ir mērojamas* ***galīga mēra kopā*** *E. Ja $(f_n) \xrightarrow[\text{g.v.}]{E} f$, pie tam virkne (f_n) ir gandrīz visur kopā E vienmērīgi ierobežota ar nenegatīvu summējamu kopā E funkciju φ, t.i., katram $n \in \mathbb{N}$ un gandrīz visiem $x \in E$ ir patiesa nevienādība $\left|f_n(x)\right| \leq \varphi(x)$, tad*

1. *funkcijas f_n $(n \in \mathbb{N})$ ir summējamas kopā E;*
2. *gandrīz visiem $x \in E$ ir spēkā nevienādība $\left|f(x)\right| \leq \varphi(x)$;*
3. *funkcija f ir summējama kopā E;*
4. $$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x)dx = \int\limits_E f(x)dx.$$

► Apgalvojuma patiesums izriet no 4.7. teorēmas, jo, ja $\mathrm{m}(E) < +\infty$ un $(f_n) \xrightarrow[\text{g.v.}]{E} f$, tad saskaņā ar 2.9. teorēmu funkcija f ir mērojama kopā E un $(f_n) \overset{E}{\Rightarrow} f$.◄

4.20. piezīme.

- 4.7. teorēmas 1. sekas vispārina 3.4. teorēmu, jo tajās netiek pieprasīta funkciju f_n $(n \in \mathbb{N})$ un f ierobežotība (skat. arī 4.10. piezīmi).
- 4.7. teorēmas 2. sekas vispārina 3.4. teorēmas 1., 2. un 3. sekas.
- 4.7. teorēma izsaka tikai pietiekamos nosacījumus, lai izpildītos vienādība (4.190) (skat. 11. uzdevumu šīs nodaļas beigās).
- 4.7. teorēmas 2. sekas var pierādīt, neizmantojot summējamu funkciju integrāļa absolūtās nepārtrauktības īpašību (kura tika izmantota 4.7. teorēmas pierādījumā); skat., piemēram, [29, 111.-113. lpp.].

4.6. Summējamība un neīstais integrālis

4.6.1. Summējamība un pirmā veida neīstais integrālis

Atgādināsim pirmā veida neīstā integrāļa jēdzienu (skat., piemēram, [7, 1. daļa], [9]).

Apskatīsim intervālā $[a; +\infty)$, kur $a \in \mathbb{R}$, definētu funkciju f. Pieņemsim, ka jebkuram $A \in [a; +\infty)$ ir definēts Rīmaņa integrālis $\int\limits_a^A f(x)dx$. Ja eksistē galīga vai bezgalīga robeža

$$\lim_{A\to+\infty} \int\limits_a^A f(x)dx, \tag{4.213}$$

tad šo robežu sauc par **funkcijas f pirmā veida neīsto integrāli intervālā** $[a;+\infty)$ un apzīmē ar

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx, \tag{4.214}$$

t.i.,

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{A\to+\infty} \int\limits_a^{A} f(x)dx.$$

4.21. piezīme. Tātad neīstais integrālis (4.214) ir definēts, t.i., eksistē galīga vai bezgalīga robeža (4.213), kuru apzīmēsim ar $\mathfrak{I}$, tad un tikai tad, kad funkcijas

$$\varphi(A) = \int\limits_a^{A} f(x)dx \ \ (A \geq a)$$

robeža, kad $A \to +\infty$, ir vienāda ar $\mathfrak{I}$, t.i., jebkurai reālu skaitļu virknei $(A_n)_{n=1}^{\infty}$, ka $A_n \geq a$ $(n \in \mathbb{N})$ un $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = +\infty$, ir spēkā $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(A_n) = \mathfrak{I}$.

4.22. piezīme. Ja funkcija f ir nenegatīva intervālā $[a;+\infty)$, pie tam jebkuram $A \in [a;+\infty)$ ir definēts Rīmaņa integrālis $\int\limits_a^A f(x)dx$, tad neīstais integrālis (4.214) ir vienmēr definēts. Tiešām, tā kā $\varphi(A)$ ir nenegatīva augoša funkcija intervālā $[a;+\infty)$, tad saskaņā ar 4.1.2. apakšparagrāfa 2. lemmu tai eksistē robeža, kad $A \to +\infty$, kura ir vai nu nenegatīvs skaitlis, vai arī $+\infty$.

Neīsto integrāli (4.214) sauc par **konverģentu**, ja robeža (4.213) ir galīga. Pretējā gadījumā, t.i., ja robeža (4.213) ir bezgalīga, neīsto integrāli (4.214) sauc par **diverģentu**. Neīsto integrāli (4.214) sauc par **absolūti konverģentu**, ja neīstais integrālis

$$\int\limits_a^{+\infty} \big|f(x)\big|dx, \tag{4.215}$$

ir konverģents. Neīsto integrāli (4.214) sauc par **nosacīti konverģentu**, ja neīstais integrālis (4.214) ir konverģents, bet neīstais integrālis (4.215) ir diverģents. Funkciju f sauc par **integrējamu neīstā nozīmē intervālā** $[a;+\infty)$, ja integrālis (4.214) konverģē, un par **neintegrējamu neīstā nozīmē intervālā** $[a;+\infty)$, ja integrālis (4.214) diverģē vai arī robeža (4.213) neeksistē.

Analoģiski tiek definēts **funkcijas f pirmā veida neīstais integrālis intervālā** $(-\infty;b]$, kur $b \in \mathbb{R}$:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{B\to-\infty} \int\limits_B^{b} f(x)dx,$$

kur $B \in (-\infty;b]$.

Izmantojot iepriekš definētos neīstos integrāļus, tiek definēts **funkcijas f pirmā veida neīstais integrālis intervālā** $(-\infty;+\infty)$:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx \quad (c \in \mathbb{R}),$$

pie nosacījuma, ka ir definēti gan integrāļi, kas atrodas šīs vienādības labajā pusē, gan to summa. Atzīmēsim, ka šī definīcija nav atkarīga no c izvēles.

Neīsto integrāļu

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx \quad \text{un} \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \tag{4.216}$$

konverģence, diverģence, absolūtā un nosacītā konverģence tiek definēta analoģiski kā neīstā integrāļa (4.214) gadījumā.

Ir spēkā šādi apgalvojumi (noteiktības labad apskatīsim kopas $[a;+\infty)$ gadījumu; analoģiskas īpašības ir spēkā arī kopu $(-\infty;b]$ un $(-\infty;+\infty)$ gadījumā).

1. *Ja neīstais integrālis* $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ *ir absolūti konverģents, tad šis integrālis ir konverģents, pie tam*

$$\left|\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx\right| \leq \int\limits_{a}^{+\infty} \big|f(x)\big|dx.$$

2. **Pirmā veida neīsto integrāļu linearitāte**. *Ja neīstie integrāļi* $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ *un* $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx$ *ir konverģenti (absolūti konverģenti), tad jebkuriem reāliem skaitļiem* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *neīstais integrālis*

$$\int\limits_{a}^{+\infty} \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)dx$$

ir konverģents (absolūti konverģents), pie tam

$$\int\limits_{a}^{+\infty} \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)dx = \lambda \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx + \mu \int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx.$$

4.8. teorēma. *Pieņemsim, ka funkcija f ir integrējama Rīmaņa nozīmē nogrieznī $[a;A]$ jebkuram $A \in [a;+\infty)$. Neīstais integrālis $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ ir absolūti konverģents tad un tikai tad, kad funkcija f ir summējama kopā $[a;+\infty)$. Ja dotais neīstais integrālis ir absolūti konverģents, vai, kas ir ekvivalenti, funkcija f ir summējama kopā $[a;+\infty)$, tad ir patiesa vienādība*

$$\int\limits_{[a;+\infty)} f(x)dx = \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx. \tag{4.217}$$

► Pieņemsim, ka funkcija f ir integrējama Rīmaņa nozīmē nogriezni $[a; A]$ jebkuram $A \in [a; +\infty)$.

Pieņemsim, ka $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ ir stingri augoša nenegatīvu skaitļu neierobežota virkne, bet $A_n = a + \alpha_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Tad $\big([a; A_n]\big)_{n=1}^{\infty}$ ir galīga mēra kopu augoša virkne, pie tam

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} [a; A_n] = [a; +\infty). \tag{4.218}$$

Tā kā funkcija f ir integrējama Rīmaņa nozīmē nogriezni $[a; A_n]$ $(n \in \mathbb{N})$, tad no 3.6. teorēmas seko, ka funkcija f ir nepārtraukta gandrīz visur nogriezni $[a; A_n]$ $(n \in \mathbb{N})$, bet no 2.6. teorēmas izriet, ka funkcija f ir mērojama nogriezni $[a; A_n]$ $(n \in \mathbb{N})$. Ņemot vērā (4.218), no mērojamu funkciju 4° īpašības seko, ka *funkcija f ir mērojama kopā* $[a; +\infty)$.

Tā kā funkcija f ir integrējama Rīmaņa nozīmē nogriezni $[a; A_n]$ jebkuram $n \in \mathbb{N}$, tad arī funkcija $|f|$ ir integrējama Rīmaņa nozīmē nogriezni $[a; A_n]$ jebkuram $n \in \mathbb{N}$. Funkcija $|f|$ ir nenegatīva kopā $[a; \infty)$, tāpēc saskaņā ar 4.22. piezīmi neīstais integrālis $\int\limits_a^{+\infty} \big|f(x)\big| dx$ ir definēts, pie tam no 4.21. piezīmes izriet

$$\int\limits_a^{+\infty} \big|f(x)\big| dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^{A_n} \big|f(x)\big| dx. \tag{4.219}$$

Tā kā funkcija $|f|$ ir integrējama Rīmaņa nozīmē nogriezni $[a; A_n]$ $(n \in \mathbb{N})$, tad no 3.1. teorēmas seko, ka funkcija $|f|$ ir integrējama Lebega nozīmē kopā $[a; A_n]$ $(n \in \mathbb{N})$, pie tam

$$\int\limits_{[a;A_n]} \big|f(x)\big| dx = \int\limits_a^{A_n} \big|f(x)\big| dx \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{4.220}$$

No (4.219) un (4.220) izriet

$$\int\limits_a^{+\infty} \big|f(x)\big| dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{[a;A_n]} \big|f(x)\big| dx. \tag{4.221}$$

Tā kā $([a; A_n])_{n=1}^{\infty}$ ir galīga mēra kopu augoša virkne, pie tam ir spēkā (4.218), tad no 4.2. paragrāfa 14° īpašības izriet

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{[a;A_n]} \big|f(x)\big| dx = \int\limits_{[a;+\infty)} \big|f(x)\big| dx. \tag{4.222}$$

No (4.221) un (4.222) iegūsim

$$\int\limits_a^{+\infty} \big|f(x)\big| dx = \int\limits_{[a;+\infty)} \big|f(x)\big| dx, \tag{4.223}$$

no kurienes seko, ka neīstais integrālis $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ ir absolūti konverģents tad un tikai tad, kad funkcija $|f|$ ir summējama kopā $[a;+\infty)$. Taču saskaņā ar summējamu funkciju 1° īpašību funkcijas $|f|$ summējamība kopā $[a;+\infty)$ ir ekvivalenta funkcijas f summējamībai šajā kopā. Teorēmas pirmais apgalvojums ir pierādīts.

Pierādīsim vienādību (4.217). Pieņemsim, ka neīstais integrālis $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ ir absolūti konverģents. Tad neīstie integrāļi

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \ \text{ un } \int\limits_a^{+\infty} \big|f(x)\big|dx \tag{4.224}$$

ir konverģenti. Saskaņā ar pierādīto funkcija f ir summējama kopā $[a;+\infty)$. Tāpēc no 4.7. definīcijas izriet, ka kopā $[a;+\infty)$ nenegatīvās funkcijas f^+ un f^- ir summējamas funkcijas šajā kopā, pie tam

$$\int\limits_{[a;+\infty)} f(x)dx = \int\limits_{[a;+\infty)} f^+(x)dx - \int\limits_{[a;+\infty)} f^-(x)dx. \tag{4.225}$$

Tā kā

$$f^+ = \frac{1}{2}\big(|f| + f\big) \ \text{ un } f^- = \frac{1}{2}\big(|f| - f\big), \tag{4.226}$$

pie tam neīstie integrāļi (4.224) ir konverģenti, tad, ņemot vērā neīsto integrāļu linearitāti, iegūsim, ka neīstie integrāļi

$$\int\limits_a^{+\infty} f^+(x)dx \ \text{ un } \int\limits_a^{+\infty} f^-(x)dx \tag{4.227}$$

arī ir konverģenti. Atzīmēsim, ka nenegatīvu funkciju gadījumā neīsto integrāļu konverģence ir ekvivalenta to absolūtai konverģencei. Tā kā funkcijas f^+ un f^- ir nenegatīvas kopā $[a;+\infty)$, tad neīstie integrāļi (4.227) ir absolūti konverģenti. Tāpēc, ņemot vērā iepriekš pierādīto vienādību (4.223), iegūsim:

$$\int\limits_{[a;+\infty)} f^+(x)dx = \int\limits_a^{+\infty} f^+(x)dx, \quad \int\limits_{[a;+\infty)} f^-(x)dx = \int\limits_a^{+\infty} f^-(x)dx. \tag{4.228}$$

No vienādības (4.225), ņemot vērā vienādības (4.228), neīsto integrāļu linearitāti un vienādību $f = f^+ - f^-$, iegūsim

$$\int\limits_{[a;+\infty)} f(x)dx = \int\limits_{[a;+\infty)} f^+(x)dx - \int\limits_{[a;+\infty)} f^-(x)dx =$$

$$= \int\limits_a^{+\infty} f^+(x)dx - \int\limits_a^{+\infty} f^-(x)dx = \int\limits_a^{+\infty} \big(f^+(x) - f^-(x)\big)\,dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Vienādība (4.217) ir pierādīta.◀

4.23. piezīme.

- No teorēmas izriet, ka summējamas funkcijas Lebega integrālis ir absolūti konverģenta pirmā veida neīstā integrāļa vispārinājums.
- Teorēmas apgalvojums ir spēkā arī absolūti konverģentiem neīstajiem integrāļiem (4.216).
- Pieņemsim, ka funkcija f ir integrējama Rīmaņa nozīmē nogrieznī $[a; A]$ jebkuram $A \in [a; +\infty)$. No teorēmas izriet: *ja neīstais integrālis* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *ir nosacīti konverģents, tad funkcija* f *nav summējama kopā* $[a; +\infty)$. Tātad nosacīti konverģenti integrāļi $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ sniedz nesummējamu kopā $[a; +\infty)$ funkciju piemērus. Piemēram, tā kā neīstie integrāļi

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \quad \text{un} \quad \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$$

ir nosacīti konverģenti, ja $0 < \alpha \leq 1$, un absolūti konverģenti, ja $\alpha \geq 1$ (skat. [9, 117. lpp.]), tad funkcijas

$$\frac{\sin x}{x^\alpha} \quad \text{un} \quad \frac{\cos x}{x^\alpha}$$

ir summējamas kopā $[1; +\infty)$, ja $\alpha \geq 1$, un nav summējamas šajā kopā, ja $0 < \alpha \leq 1$.

4.6.2. Summējamība un otrā veida neīstais integrālis

Atgādināsim otrā veida neīstā integrāļa jēdzienu (skat., piemēram, [7, 1. daļa], [9]). Pieņemsim, ka funkcija f ir definēta intervālā $[a; b)$, kur $a, b \in \mathbb{R}$ un $a < b$, pie tam

1. funkcija f ir neierobežota intervālā $[a; b)$;
2. funkcija f ir integrējama Rīmaņa nozīmē katrā nogrieznī $[a; b-\alpha]$, kur $0 < \alpha \leq b-a$.

Ja eksistē galīga vai bezgalīga robeža

$$\lim_{\alpha \to 0+} \int\limits_a^{b-\alpha} f(x)dx, \tag{4.229}$$

tad šo robežu sauc par **funkcijas** f **otrā veida neīsto integrāli intervālā** $[a; b)$ un apzīmē ar

$$\int\limits_a^b f(x)dx, \tag{4.230}$$

t.i.,

$$\int\limits_a^b f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\alpha \to 0+} \int\limits_a^{b-\alpha} f(x)dx.$$

4.24. piezīme. Tātad neīstais integrālis (4.230) ir definēts, t.i., eksistē galīga vai bezgalīga robeža (4.229), kuru apzīmēsim ar $\mathfrak{I}$, tad un tikai tad, kad funkcijas

$$F(\alpha) = \int\limits_a^{b-\alpha} f(x)dx \quad (0 < \alpha \leq b - a)$$

robeža, kad α tiecas uz 0 no labās puses, ir vienāda ar $\mathfrak{I}$, t.i., jebkurai reālu skaitļu virknei $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$, ka $0 < \alpha_n \leq b - a$ $(n \in \mathbb{N})$ un $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, ir spēkā $\lim\limits_{n\to\infty} F(\alpha_n) = \mathfrak{I}$.

4.25. piezīme. Ja funkcija f ir nenegatīva intervālā $[a; b)$, pie tam tā apmierina apakšparagrāfa sākumā minētos nosacījumus 1. un 2., tad neīstais integrālis (4.230) ir vienmēr definēts. Tiešām, tā kā $F(\alpha)$ ir nenegatīva dilstoša funkcija intervālā $(0; b - a]$, tad $\widetilde{F}(\beta) = F\left(\frac{1}{\beta}\right)$ ir nenegatīva augoša funkcija intervālā $\left[\frac{1}{b-a}; +\infty\right)$. Ņemot vērā, ka $\beta \to +\infty$ tad un tikai tad, kad $\alpha \to 0+$, no 4.1.2. apakšparagrāfa 2. lemmas izriet, ka eksistē robeža

$$\lim_{\beta\to+\infty} \widetilde{F}(\beta) = \lim_{\alpha\to 0+} F(\alpha),$$

kura ir vai nu nenegatīvs skaitlis, vai arī $+\infty$.

Neīsto integrāli (4.230) sauc par **konverģentu**, ja robeža (4.229) ir galīga. Pretējā gadījumā, t.i., ja robeža (4.229) ir bezgalīga, neīsto integrāli (4.230) sauc par **diverģentu**. Neīsto integrāli (4.230) sauc par **absolūti konverģentu**, ja neīstais integrālis

$$\int\limits_a^b \big|f(x)\big|dx, \tag{4.231}$$

ir konverģents. Neīsto integrāli (4.230) sauc par **nosacīti konverģentu**, ja neīstais integrālis (4.230) ir konverģents, bet neīstais integrālis (4.231) ir diverģents. Funkciju f sauc par **integrējamu neīstā nozīmē intervālā** $[a; b)$, ja integrālis (4.230) konverģē, un par **neintegrējamu neīstā nozīmē intervālā** $[a; b)$, ja integrālis (4.230) diverģē vai arī robeža (4.229) neeksistē.

Analoģiski tiek definēts **funkcijas f otrā veida neīstais integrālis intervālā** $(a; b]$:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\alpha\to 0+} \int\limits_{a+\alpha}^b f(x)dx, \tag{4.232}$$

ja funkcija f ir neierobežota intervālā $(a; b]$, kur $a, b \in \mathbb{R}$ un $a < b$, un integrējama Rīmaņa nozīmē katrā nogriezni $[a + \alpha; b]$, kur $0 < \alpha \leq b - a$.

Gadījumā, ja funkcija f ir neierobežota intervālā $(a; b)$, kur $a, b \in \mathbb{R}$ un $a < b$, un integrējama Rīmaņa nozīmē katrā nogriezni $[a^*; b^*]$, kur $a < a^* < b^* < b$, tad, izmantojot iepriekš definētos neīstos integrāļus, **funkcijas f otrā veida neīstais integrālis intervālā** $(a; b)$ tiek definēts šādi:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx, \tag{4.233}$$

pie nosacījuma, ka ir definēti gan integrāļi (īstā vai neīstā nozīmē), kas atrodas šīs vienādības labajā pusē, gan to summa. Atzīmēsim, ka šī definīcija nav atkarīga no punkta c izvēles.

Iepriekš apskatīto neīsto integrāļu (4.232) un (4.233) konverģence, diverģence, absolūtā un nosacītā konverģence tiek definēta analoģiski kā neīstā integrāļa (4.230) gadījumā.

4.9. teorēma. *Pieņemsim, ka funkcija f ir definēta intervālā $[a;b)$, kur $a, b \in \mathbb{R}$ un $a < b$, un apmierina nosacījumus 1., 2. un 3., kuri tika minēti apkšparagrāfa sākumā. Neīstais integrālis $\int\limits_a^b f(x)dx$ ir absolūti konverģents tad un tikai tad, kad funkcija f ir summējama kopā $[a;b)$. Ja dotais neīstais integrālis ir absolūti konverģents, vai, kas ir ekvivalenti, funkcija f ir summējama kopā $[a;b)$, tad ir patiesa vienādība*

$$\int\limits_{[a;b)} f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx. \tag{4.234}$$

▶ Pieņemsim, ka funkcija f apmierina nosacījumus 1. un 2., kuri tika minēti apkšparagrāfa sākumā.

Tā $a < b$, tad eksistē $N \in \mathbb{N}$, ka $a < b - \frac{1}{N}$. Apskatīsim virkni $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$, kur $\alpha_n = \frac{1}{N+n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Tad $0 < \alpha_n < b - a$ $(n \in \mathbb{N})$ un $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Savukārt $\big([a; b - \alpha_n]\big)_{n=1}^{\infty}$ ir galīga mēra kopu augoša virkne, pie tam

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} [a; b - \alpha_n] = [a; b). \tag{4.235}$$

Iesakām lasītājam patstāvīgi pabeigt šīs teorēmas pierādījumu, spriežot analoģiski kā iepriekšējās teorēmas pierādījumā.◀

4.26. piezīme. Otrā veida neīstajiem integrāļiem ir spēkā analoģiski apgalvojumi tiem, kuri tika formulēti 4.23. piezīmē. Apskatīsim šādu piemēru. Tā kā neīstais integrālis

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^{\lambda}} \quad (\lambda > 0),$$

ir absolūti konverģents, ja $0 < \lambda < 1$, un diverģents, ja $\lambda \geq 1$ (skat. [9]), tad funkcija

$$\frac{1}{(b-x)^{\lambda}}$$

ir summējama kopā $[a;b)$, ja $0 < \lambda < 1$, un nav summējama šajā kopā, ja $\lambda \geq 1$.

4.27. piezīme. Pieņemsim, ka

- funkcija f ir definēta intervālā $\langle a;b\rangle$, kur $a,b\in\widetilde{\mathbb{R}}$ un $a<b$, izņemot tā punktu galīgu apakškopu $\{c_1;c_2;\dots;c_n\}$, kur
$$a=c_0<c_1<\dots<c_n<c_{n+1}=b,$$
- ir definēti gan neīstie integrāļi
$$\int\limits_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)dx \quad (k=0,1,2,\dots,n)$$
(iepriekš apskatīto pirmā un otrā veida neīsto integrāļu nozīmē), gan to summa.

Tad **funkcijas f neīstais integrālis intervālā** $\langle a;b\rangle$ tiek definēts šādi:
$$\int\limits_a^b f(x)dx \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n}\int\limits_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)dx$$
(skat., piemēram, [9, 112.-114. lpp.]).

Var pierādīt, ka šādi definēts neīsts integrālis $\int\limits_a^b f(x)dx$ ir absolūti konverģents, t.i., $\int\limits_a^b \big|f(x)\big|dx<+\infty$, tad un tikai tad, kad funkcija f ir summējama kopā $\langle a;b\rangle$, pie tam
$$\int\limits_{\langle a;b\rangle} f(x)dx=\int\limits_a^b f(x)dx.$$

4.7. Noslēguma piezīmes par summējamām funkcijām

4.7.1. Gandrīz visur galīgu funkciju summējamība

Šajā paragrāfā, kuru var uzskatīt par 2.8. paragrāfa turpinājumu, īsumā izklāstīsim tās korekcijas un precizējumus šīs nodaļas materiālā, kuras ļauj funkciju $f:E\to\mathbb{R}$ Lebega integrāļa un summējamības teoriju vispārināt funkcijām $f:E\to\widetilde{\mathbb{R}}$, t.i., funkcijām, kuras var pieņemt arī noteiktas zīmes bezgalīgas vērtības.

• Nenegatīvu mērojamu funkciju $f:E\to\widetilde{\mathbb{R}}$ mērojamā kopā E Lebega integrāli un summējamību definē ar 4.2. definīciju, pievienojot tai papildpunktu.

3. Ja $\mathrm{m}\big(E[f=+\infty]\big)>0$, tad $\int\limits_E f(x)dx \overset{\text{def}}{=} +\infty$.

Ir spēkā arī 4.1.2. apakšparagrāfa 3. lemmas analogs.

3′. lemma. *Pieņemsim, ka $f:E\to\widetilde{\mathbb{R}}$ ir nenegatīva mērojama funkcija galīga mēra kopā E. Ja E_1 ir patvaļīga kopas E mērojama apakškopa, tad*
$$\int\limits_{E_1} f(x)dx\le\int\limits_E f(x)dx.$$

Nākamajai teorēmai ir nozīmīga loma summējamu funkciju $f : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$ teorijā.

4.10. teorēma. *Ja nenegatīva mērojama funkcija $f : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$ mērojamā kopā E ir summējama, t.i., $\int\limits_E f(x)dx < +\infty$, tad funkcija f ir gandrīz visur galīga kopā E, t.i.,* $\mathrm{m}\big(E[f = +\infty]\big) = 0$.

► Pieņemsim, ka nenegatīva mērojama funkcija $f : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$ mērojamā kopā E ir summējama, t.i., $\int\limits_E f(x)dx < +\infty$. Apskatīsim kopu $A = E[f = +\infty]$. Tad

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} E[f \geq n],$$

pie tam, tā kā funkcija f ir mērojama kopā E, tad jebkuram $n \in \mathbb{N}$ funkcijas f Lebega kopas $E[f \geq n]$ ir mērojamas, un līdz ar to kopa A ir mērojama kā mērojamu kopu sanumurējams šķēlums. Pierādīsim, ka $\mathrm{m}(A) = 0$. Pieņemsim pretējo, ka $\mathrm{m}(A) > 0$. Apskatīsim divus gadījumus.

1. Pieņemsim, ka $\mathrm{m}(E) < +\infty$. Tā kā jebkuram $x \in A$ ir spēkā $[f]_t(x) = t$, kur t ir pozitīvs skaitlis, tad no galīga mēra kopā ierobežotu funkciju Lebega integrāļa 5° un 10° īpašības (skat. 3.6. paragrāfu), ņemot vērā 3.5. piezīmi, izriet

$$\int\limits_E [f]_t(x)dx = \int\limits_A [f]_t(x)dx + \int\limits_{E\setminus A} [f]_t(x)dx \geq \int\limits_A [f]_t(x)dx = \int\limits_A t dx = t \cdot \mathrm{m}(A),$$

no kurienes, izmantojot teorēmu par robežpāreju nevienādībās, seko

$$\int\limits_E f(x)dx = \lim_{t\to+\infty} \int\limits_E [f]_t(x)dx \geq \lim_{t\to+\infty} t \cdot \mathrm{m}(A) = +\infty,$$

kas ir pretrunā ar funkcijas f summējamību kopā E.

2. Pieņemsim, ka $\mathrm{m}(E) = +\infty$. Apskatīsim kopas A galīga mēra apakškopas $a_n = A \cap [-n; n]$ $(n \in \mathbb{N})$. Tad

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{4.236}$$

2_{a}) Ja $\mathrm{m}(a_n) = 0$ jebkuram $n \in \mathbb{N}$, tad no (4.236), ņemot vērā Lebega mēra sanumurējamo aditivitāti, izriet $\mathrm{m}(A) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(a_n) = 0$, kas ir pretrunā ar to, ka $\mathrm{m}(A) > 0$.

2_{b}) Pieņemsim, ka eksistē tāds $k \in \mathbb{N}$, ka $\mathrm{m}(a_k) > 0$. Ņemot vērā nenegatīvas funkcijas $f : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$ bezgalīga mēra kopā E Lebega integrāļa definīciju (skat. šī paragrāfa sākumā teikto), iegūsim

$$\int\limits_E f(x)dx = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{e_n} f(x)dx \geq \int\limits_{e_k} f(x)dx, \tag{4.237}$$

kur $e_n = E \cap [-n; n]$ $(n \in \mathbb{N})$ ir kopas E galīga mēra apakškopas. Apskatīsim kopas $a_n = A \cap [-n; n]$ $(n \in \mathbb{N})$. Tā kā $e_n \supset a_n$ $(n \in \mathbb{N})$, tad no 3′. lemmas seko

$$\int\limits_{e_k} f(x)dx \geq \int\limits_{a_k} f(x)dx. \tag{4.238}$$

Ņemot vērā nenegatīvas funkcijas $f : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$ galīga mēra kopā E Lebega integrāļa definīciju (skat. šī paragrāfa sākumā teikto), kā arī galīga mēra kopā ierobežotu funkciju Lebega integrāļa 5° īpašību (skat. 3.6.2. apakšparagrāfu) un 3.5. piezīmi, atrodam

$$\int\limits_{a_k} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty} \int\limits_{a_k} [f]_t(x)dx = \lim_{t\to+\infty} \int\limits_{a_k} tdx = \lim_{t\to+\infty} t \cdot \mathrm{m}(a_k) = +\infty. \tag{4.239}$$

No (4.237), (4.238) un (4.239) seko

$$\int\limits_E f(x)dx \geq +\infty,$$

kas ir pretrunā ar funkcijas f summējamību kopā E.

Visos iespējamos gadījumos ieguvām pretrunu. Tādējādi $\mathrm{m}(A) = 0$, t.i., funkcija f ir gandrīz visur galīga kopā E.◀

No 4.10. teorēmas izriet, ka jebkurai nenegatīvai summējamai funkcijai $f : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$ eksistē tai ekvivalenta visur galīga funkcija $g : E \to \mathbb{R}$, piemēram, var uzskatīt, ka kopas $E[f < +\infty]$ punktos funkcija g ir vienāda ar funkciju f, bet kopas $E[f = +\infty]$ punktos funkcija g pieņem kādu galīgu, t.i., reālu, vērtību, piemēram, vērtību 0. Izmantojot šo faktu, viegli pierādīt, ka visas 4.2. paragrāfā formulētās īpašības ir spēkā arī tad, ja uzskatīt, ka tajās figurējošās nenegatīvās funkcijas ir gandrīz visur galīgas funkcijas attiecīgajās kopās. Minēto īpašību pierādījumos, dažkārt, ir jāveic tikai minimālas izmaiņas, piemēram, 12° īpašības pierādījumā vienādība $E = E[f = 0] \cup E[f > 0]$ ir jānomaina ar vienādību $E = E[f = 0] \cup E[f > 0] \cup E[f = +\infty]$ un jāņem vērā, ka saskaņā ar 4.10. teorēmu nenegatīvai summējamai kopā E funkcijai $f : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$ ir spēkā $\mathrm{m}\big(E[f = +\infty]\big) = 0$.

Noslēgumā, runājot par nenegatīvu funkciju $f : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$ summējamību, atzīmēsim, ka 4.2.6. definīcija ir jāpapildina ar šādu nosacījumu: ja $\mathrm{m}(E) = 0$ un $f(x) = +\infty$ jebkuram $x \in E$, tad

$$\int\limits_E f(x)dx \overset{\text{def}}{=} 0.$$

• Nepozitīvu mērojamu funkciju $f : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$ mērojamā kopā E Lebega integrāli un summējamību definē ar 4.1.3. definīciju, pievienojot tai papildpunktu.

3. Ja $\mathrm{m}\big(E[f = -\infty]\big) > 0$, tad $\int\limits_E f(x)dx \overset{\text{def}}{=} -\infty$.

Ir spēkā 4.10. teorēmas analogs.

4.11. teorēma. *Ja nepozitīva mērojama funkcija $f : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$ mērojamā kopā E ir summējama, t.i., $\int\limits_E f(x)dx > -\infty$, tad funkcija f ir gandrīz visur galīga kopā E, t.i.,* $\mathrm{m}\big(E[f = -\infty]\big) = 0$.

• Mērojamu funkciju $f : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$ mērojamā kopā E, kuras kopas E punktos pieņem dažādu zīmju vērtības (tai skaitā, iespējams, vērtības $-\infty$ un $+\infty$), Lebega integrāli un summējamību definē ar 4.6. definīciju vai tai ekvivalento 4.7. definīciju, pie tam, protams, uz Lebega integrāļiem, kas atrodas vienādību (4.94) un (4.104) labajai pusēs, attiecas iepriekš teiktais par nenegatīvu un negatīvu funkciju Lebega integrāļiem. Ir spēkā šāds 4.10. un 4.11. teorēmu analogs.

4.12. teorēma. *Ja mērojama funkcija $f : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$ mērojamā kopā E ir summējama, t.i.,*

$$-\infty < \int\limits_E f(x)dx < +\infty,$$

tad funkcija f ir gandrīz visur galīga kopā E, t.i., $\mathrm{m}\Big(E\big[|f| = +\infty\big]\Big) = 0.$

No 4.10. teorēmas izriet, ka summējamai funkcijai $f : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$ eksistē tai ekvivalenta visur galīga funkcija $g : E \to \mathbb{R}$, piemēram, var uzskatīt, ka kopas $E\big[|f| < +\infty\big]$ punktos funkcija g ir vienāda ar funkciju f, bet kopas $E\big[|f| = +\infty\big]$ punktos funkcija g pieņem kādu galīgu (t.i., reālu) vērtību, piemēram, vērtību 0. Izmantojot šo faktu, viegli pierādīt, ka visas 4.4. paragrāfā formulētās īpašības ir spēkā arī tad, ja uzskatīt, ka tajās figurējošās funkcijas ir gandrīz visur galīgas attiecīgajās kopās. Atzīmēsim tikai, ka summējamu gandrīz visur galīgu funkciju $f : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$ un $g : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$ summa $f + g$ un starpība $f - g$ ir definēta gandrīz visur kopā E (jo, piemēram, summa $(-\infty) + (+\infty)$ nav definēta; skat. 6.1.2. apakšparagrāfu), taču tas nav šķērslis, lai nevarētu apskatīt funkciju $f + g$ un $f - g$ Lebega integrāļus un runāt par šo funkciju summējamību, šajā gadījumā jāuzskata, ka tajos kopas E punktos, kuros šīs funkcijas nav definētas, tās pieņem kādu galīgu (t.i., reālu) vērtību.

4.3. teorēma (Fatu teorēma), 4.4. teorēma (Levi teorēma), 4.5. un 4.6. teorēma, 4.7. teorēma (Lebega teorēma) ir spēkā, ja funkcijas f_n $(n \in \mathbb{N})$ un f ir gandrīz visur galīgas kopā E (lai gan ir jāatzīmē, ka 4.4., 4.5. un 4.6. teorēmā nosacījums par funkcijas f gandrīz visur galīgumu kopā E izriet no pārējiem šo teorēmu nosacījumiem), pie tam, ja 4.3. un 4.4. teorēmā pieņemt, ka funkcija f ir mērojama kopā E, tad šajās teorēmās nosacījumu, ka $(f_n) \xrightarrow[\text{g.v.}]{E} f$, var nomainīt ar vispārīgāku nosacījumu, ka $(f_n) \overset{E}{\Rightarrow} f$ (skat. 20. uzdevumu šīs nodaļas beigās; par gandrīz visur galīgu funkciju konverģenci pēc mēra skat. 2.8. paragrāfu).

4.7.2. Summējamu funkciju diferencējamība

3.9. paragrāfā tika noskaidrots (skat. 3.9. teorēmu), ka, ja funkcijai F eksistē ierobežots atvasinājums nogrieznī $[a; b]$, tad funkcija F' ir integrējama Lebega nozīmē šajā nogrieznī, pie tam ir spēkā vispārinātā Ņūtona-Leibnica formula (3.143). Kādiem nosacījumiem ir jāizpildās, lai formula (3.143) būtu spēkā gadījumā, ja funkcija F' nav ierobežota nogrieznī $[a; b]$ (skat. 22. uzdevumu šīs nodaļas beigās)? Atbildi uz šo jautājumu sniedz zemāk minētie apgalvojumi (skat., piemēram, [4], [17], [23]).

- Ja funkcija f ir summējama nogrieznī $[a; b]$, tad gandrīz visiem $x \in [a; b]$ ir spēkā vienādība

$$\frac{d}{dx}\left(\int\limits_a^x f(t)dt\right) = f(x),$$

  kur ar integrāli vienādības kreisajā pusē saprot funkcijas f Lebega integrāli nogrieznī $[a; x]$ $(a \le x \le b)$.

Lai varētu formulēt nosacījumus, pie kuriem ir spēkā vispārinātā Ņūtona-Leibnica formula neierobežota atvasinājuma gadījumā, ir jāapskata absolūti nepārtrauktas funkcijas jēdzienu.

Funkciju $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ sauc par **absolūti nepārtrauktu funkciju**, ja jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē $\delta > 0$, ka jebkuriem nogriežņa $[a; b]$ apakšintervāliem $(a_k; b_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, kuri savstarpēji nešķeļas un kuru garumi apmierina nevienādību $\sum\limits_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$, ir spēkā nevienādība $\sum\limits_{k=1}^{n} \big|f(b_k) - f(a_k)\big| < \varepsilon$.

- Ja funkcija f ir summējama nogrieznī $[a; b]$, tad funkcija F, ka

$$\forall x \in [a; b] : \; F(x) = c + \int\limits_a^x f(t)dt,$$

  kur c ir patvaļīga reāla konstante, ir absolūti nepārtraukta funkcija.

Nākamais apgalvojums vispārina iepriekš minēto 3.9. teorēmu.

- Ja funkcija $F : [a; b] \to \mathbb{R}$ ir absolūti nepārtraukta, tad funkcija F ir gandrīz visur diferencējama nogrieznī $[a; b]$, bet funkcija $f = F'$ ir summējama nogrieznī $[a; b]$, pie tam ir spēkā vispārinātā Ņūtona-Leibnica formula

$$\forall x \in [a; b] : \; F(x) = F(a) + \int\limits_a^x F'(t)dt.$$

No pēdējiem diviem apgalvojumiem izriet, ka *ar precizitāti līdz patvaļīgai reālai konstantei absolūti nepārtrauktas funkcijas un tikai tās var tikt restaurētas pēc to atvasinājumiem, izmantojot integrēšanas Lebega nozīmē operāciju* (skat. 23. uzdevumu šīs nodaļas beigās).

4.8. Uzdevumi

1. Pierādīt 1. lemmu 157. lappusē.
2. Pierādīt 2. lemmu 157. lappusē.
3. Pierādīt 4. lemmu 169. lappusē.
4. Pierādīt 5. lemmu 170. lappusē.
5. Aprēķināt funkcijas f Lebega integrāli kopā $[0; 1]$, ja

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ja} \quad x \in \mathcal{P} \cap [0; 1], \\ \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, & \text{ja} \quad x \in [0; 1] \setminus \mathcal{P}, \end{cases}$$

   kur $\mathcal{P}$ ir Kantora kopa. Vai funkcija f ir summējama kopā $[0; 1]$?

6. Aprēķināt funkcijas f Lebega integrāli kopā $[0; 1]$, ja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{ja} \quad x \in [0; 1] \cap \mathbb{I}, \\ x^3, & \text{ja} \quad x \in [0; 1] \cap \mathbb{Q}, \end{cases}$$

   kur $\mathbb{Q}$ ir visu racionālo skaitļu kopa, bet $\mathbb{I}$ ir visu iracionālo skaitļu kopa. Vai funkcija f ir summējama kopā $[0; 1]$?

7. Aprēķināt funkcijas f Lebega integrāli kopā $(0;1]$, ja

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & \text{ja} \quad x\in(0;1]\cap\mathbb{Q},\\ \frac{1}{\ln^2 x}, & \text{ja} \quad x\in(0;1]\cap\mathbb{I}.\end{cases}$$

Vai funkcija f ir summējama kopā $(0;1]$?

8. Aprēķināt funkcijas f Lebega integrāli kopā $[0;1]$, ja

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{ja} \quad x\in\mathcal{P},\\ n, & \text{ja} \quad x \text{ pieder kādam Kantora kopas } \mathcal{P}\\ & \quad\ \text{blakusintervālam ar garumu } \frac{1}{3^n}.\end{cases}$$

Vai funkcija f ir summējama kopā $[0;1]$?

9. Pieņemsim, ka $E=(0;1]$, bet $E_n=\left(\frac{1}{n+1};\frac{1}{n}\right]$ $(n\in\mathbb{N})$. Apskatīsim funkciju f kopā E, ka

$$f(x)=\begin{cases}n, & \text{ja} \quad x\in\left(\frac{2n+1}{2n(n+1)};\frac{1}{n}\right],\\ -n, & \text{ja} \quad x\in\left(\frac{1}{n+1};\frac{2n+1}{2n(n+1)}\right].\end{cases}$$

Pierādīt:

(a) $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$ un $E_n\cap E_m=\emptyset$ $(n\neq m;\ n,m\in\mathbb{N})$;

(b) funkcija f ir summējama katrā kopā E_n $(n\in\mathbb{N})$, bet nav summējama kopā E.

10. Apskatīsim funkciju f kopā $[0;1]$, ka

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}, & \text{ja} \quad x\in(0;1],\\ 0, & \text{ja} \quad x=0.\end{cases}$$

Pierādīt, ka funkcija nav summējama kopā $[0;1]$ (*norādījums:* pierādīt, ka funkcijas f neīstais integrālis intervālā $[0;1]$ ir nosacīti konverģents).

11. Apskatīsim funkcijas f_n $(n\in\mathbb{N})$ kopā $E=(0;1]$, ka

$$f_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & \text{ja} \quad x\in\left[\frac{1}{n+1};\frac{1}{n}\right],\\ 0, & \text{ja} \quad x\notin\left[\frac{1}{n+1};\frac{1}{n}\right].\end{cases}$$

Pierādīt:

(a) $(f_n)\xrightarrow{E}f$, kur $f=\mathbb{O}$ ir nullfunkcija kopā E;

(b) izpildās vienādība (4.190);
(*norādījums:* vispirms pierādīt, ka $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_E f_n(x)dx=0$);

(c) neeksistē summējama kopā E funkcija φ, ka katram $n\in\mathbb{N}$ un gandrīz visiem $x\in E$ izpildītos nevienādība $\left|f_n(x)\right|\leq\varphi(x)$.

12. Apskatīsim funkcijas f_n $(n\in\mathbb{N})$ kopā $E=(0;+\infty)$, ka

$$f_n(x)=\frac{n}{x^3}e^{-\frac{n}{2x^2}}.$$

Pierādīt:

(a) $(f_n) \overset{E}{\rightrightarrows} f$, kur $f = \mathbb{O}$ ir nullfunkcija kopā E;

(b) vienādība (4.190) nav spēkā;
(*norādījums*: vispirms pierādīt, ka $\int\limits_E f_n(x)dx = 1$ jebkuram $n \in \mathbb{N}$).

13. Apskatīsim funkcijas f_n $(n \in \mathbb{N})$ kopā $E = (0;1)$, ka

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2, & \text{ja} \quad x \in \left(0; \frac{1}{n}\right), \\ 0, & \text{ja} \quad x \in \left[\frac{1}{n}; 1\right). \end{cases}$$

Pierādīt:

(a) $(f_n) \overset{E}{\to} f$, kur $f = \mathbb{O}$ ir nullfunkcija kopā E;

(b) vienādība (4.190) nav spēkā;
(*norādījums*: vispirms pierādīt, ka $\int\limits_E f_n(x)dx = +\infty$ jebkuram $n \in \mathbb{N}$).

14. Pieņemsim, ka f un f_n $(n \in \mathbb{N})$ ir mērojamas funkcijas kopā E, pie tam gandrīz visiem $x \in E$ ir spēkā $f_1(x) \le f_2(x) \le \cdots \le f_n(x) \le \cdots$. Ja $(f_n) \xrightarrow[\text{g.v.}]{E} f$, tad

$$\int\limits_E f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x)dx.$$

15. Pieņemsim, ka f un f_n $(n \in \mathbb{N})$ ir mērojamas funkcijas kopā E, pie tam gandrīz visiem $x \in E$ ir spēkā $f_1(x) \ge f_2(x) \ge \cdots \ge f_n(x) \ge \cdots$. Ja $(f_n) \xrightarrow[\text{g.v.}]{E} f$, tad

$$\int\limits_E f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x)dx.$$

16. Pieņemsim, ka f ir nenegatīva mērojama funkcija galīga mēra kopā E. Pierādīt, ka funkcija f ir summējama kopā E tad un tikai tad, ja izpildās vismaz viens no šādiem nosacījumiem:

(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k \cdot \mathrm{m}(E_k) < +\infty$, kur $E_k = E[k \le f < k+1]$ $(k \in \mathbb{N})$;

(b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}(\widetilde{E}_k) < +\infty$, kur $\widetilde{E}_k = E[f \ge k]$ $(k \in \mathbb{N})$.

17. (a) Pierādīt, ka 4.3. teorēma (- Fatu teorēma) ir 4.4. teorēmas (- Levi teorēmas) sekas (*norādījums*: aplūkot virkni (g_n), kur $g_n = \inf\limits_{k \ge n} f_k$ $(n \in \mathbb{N})$).

(b) Pierādīt, ka, ja kopa

$$\left\{ \int\limits_E f_n(x)dx : \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

ir ierobežota no augšas, tad 4.4. teorēma (- Levi teorēma) ir 4.7. teorēmas (- Lebega teorēmas) sekas.

18. Pierādīt 4.9. teorēmu 223. lappusē.

19. Pierādīt 10. lemmu 203. lappusē.

20. Pierādīt, ka, ja funkcija f ir mērojama kopā E, tad 4.3. un 4.4. teorēmā nosacījumu, ka $(f_n) \xrightarrow[\text{g.v.}]{E} f$, var nomainīt ar vispārīgāku nosacījumu, ka $(f_n) \overset{E}{\Longrightarrow} f$ (*norādījums*: izmantot 2.12. teorēmu (- Risa teorēmu)).

21. Pierādīt summējamu funkciju 1°, 3°, 4°, 5° un 8° īpašību, izmantojot 4.6. definīciju un vienādību (4.105b), kā arī attiecīgās nenegatīvu summējamu funkciju īpašības.

22. Apskatīsim funkciju f nogriezni $[0;1]$, ka

$$\forall x \in [0;1]: \ f(x) = \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{x}, & \text{ja} \quad x \in (0;1], \\ 0, & \text{ja} \quad x = 0 \end{cases}$$

Pierādīt, ka funkcijai f eksistē galīgs atvasinājums f' nogriezni $[0;1]$, pie tam funkcija f' ir summējama nogriezni $[0;1]$, taču funkcija f' nav ierobežota nogriezni $[0;1]$ (līdz ar to funkcija f neapmierina 3.9. teorēmas nosacījumus). Vai funkcijai f ir spēkā vispārinātā Ņūtona-Leibnica formula?

23. Apskatīsim funkciju f nogriezni $[0;1]$, ka

$$\forall x \in [0;1]: \ f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{\pi}{x^2}, & \text{ja} \quad x \in (0;1], \\ 0, & \text{ja} \quad x = 0. \end{cases}$$

Pierādīt, ka funkcijai f eksistē galīgs atvasinājums f' nogriezni $[0;1]$, pie tam funkcija f' nav summējama nogriezni $[0;1]$. Vai funkcija f ir absolūti nepārtraukta nogriezni $[0;1]$? Vai funkcijai f ir spēkā vispārinātā Ņūtona-Leibnica formula?

24. Pierādīt, ka, ja funkcija $f(x)$ ir summējama nogriezni $[0;a]$, kur $a > 0$, tad funkcija $f(kx)$, kur $k > 0$, ir summējama nogriezni $\left[0; \frac{a}{k}\right]$.

25. Pierādīt, ka katram $k > 0$ funkcija f, ka

$$\forall x \in (0;1): \ f(x) = \frac{1}{x} \cos \frac{k}{x},$$

nav summējama intervālā $(0;1)$.

26. Pieņemsim, ka f ir mērojama funkcija galīga mēra kopā E.

    (a) Apskatīsim funkciju $[f]_{-t}^{\ t}$ kopā E, ka

    $$\forall x \in E: \ [f]_{-t}^{\ t}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ja} \quad -t \le f(x) \le t, \\ t, & \text{ja} \quad f(x) > t, \\ -t, & \text{ja} \quad f(x) < -t, \end{cases}$$

    kur $t > 0$. Pierādīt, ka funkcija $[f]_{-t}^{\ t}$ ir mērojama kopā E.

    (b) Apskatīsim mainīgā t $(t > 0)$ funkciju $\mathfrak{I}_t(f)$, ka

    $$\forall t > 0: \ \mathfrak{I}_t(f) = \int\limits_E [f]_{-t}^{\ t}(x)dx.$$

    Funkciju f sauc par **Q-integrējamu funkciju kopā** E, ja eksistē galīga robeža

    $$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{I}_t(f) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_E [f]_{-t}^{\ t}(x)dx = (Q) \int\limits_E f(x)dx.$$

i. Pierādīt, ka, ja funkcija f ir summējama kopā E, tad funkcija f ir Q-integrējama kopā E, pie tam

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{I}_t(f) = \int\limits_E f(x)dx,$$

kur $\int\limits_E f(x)dx$ ir funkcijas f Lebega integrālis kopā E.

ii. Ar piemēra palīdzību pierādīt, ka eksistē Q-integrējamas funkcijas kopā E, kuras nav summējamas funkcijas kopā E.

iii. Pierādīt, ka, ja f ir nenegatīva mērojama funkcija galīga mēra kopā E, pie tam funkcija f ir Q-integrējama kopā E, tad funkcija f ir summējama kopā E.

iv. Pierādīt, ka, ja f ir nepāra mērojama funkcija nogriezni $[-a; a]$, kur $a > 0$, tad funkcija f ir Q-integrējama nogriezni $[-a; a]$.

v. Vai ir spēkā apgalvojums: ja f ir Q-integrējama funkcija galīga mēra kopā E, bet E_1 ir kopas E mērojama apakškopa, tad funkcija f ir Q-integrējama kopā E_1?

vi. Pierādīt, ka, ja funkcija f Q-integrējama galīga mēra kopā E, tad jebkuram $\lambda \in \mathbb{R}$ funkcija λf arī ir Q-integrējama kopā E, pie tam ir spēkā vienādība

$$(Q)\int\limits_E \lambda f(x)dx = \lambda(Q)\int\limits_E f(x)dx.$$

vii. Vai ir spēkā apgalvojums: ja funkcijas f un g ir Q-integrējamas galīga mēra kopā E, tad funkcija $f + g$ arī ir Q-integrējama kopā E?

viii. Vai ir spēkā apgalvojums: ja funkcijas f, g un $f+g$ ir Q-integrējamas galīga mēra kopā E, tad ir spēkā vienādība

$$(Q)\int\limits_E (f+g)(x)dx = (Q)\int\limits_E f(x)dx + (Q)\int\limits_E g(x)dx?$$

5. nodaļa

FUNKCIJU TELPAS $L_1(E)$ un $L_2(E)$

Šajā nodaļā tiks aplūkota summējamu kopā E funkciju normēta telpa $L_1(E)$ un kopā E mērojamu funkciju ar summējamu kvadrātu prehiberta telpa $L_2(E)$, tiks pierādīta šo telpu pilnība, tiks apskatīta konverģences pēc vidējā (t.i., konverģences telpā $L_1(E)$) un konverģences pēc vidējā kvadrātiskā (t.i., konverģences telpā $L_2(E)$) gan savstarpējā saistība, gan saistība ar 2. nodaļā aplūkotajiem konverģences veidiem.

5.1. Banaha telpa $L_1(E)$

Apskatīsim kopu $L_1(E)$, kas sastāv no visām kopā E summējamām funkcijām, pie tam uzskatīsim, ka kopā E ekvivalentas funkcijas reprezentē vienu un to pašu kopas $L_1(E)$ elementu. Atzīmēsim, ka kopa $L_1(E)$ ir definēta *korekti*: ja $f \in L_1(E)$ un $f \overset{\mathrm{E}}{\sim} f_*$, tad no summējamu funkciju 8° īpašības izriet, ka arī $f_* \in L_1(E)$.

5.1. teorēma. *Kopa $L_1(E)$ ir reāla vektoru telpa attiecībā pret dabiskajām funkciju saskaitīšanas un reizināšanas ar reālu skaitli operācijām:*

$$\forall x \in E : (f+g)(x) \overset{\text{def}}{=} f(x) + g(x), \tag{5.1a}$$

$$\forall x \in E : (\alpha f)(x) \overset{\text{def}}{=} \alpha f(x), \tag{5.1b}$$

kur $f, g \in L_1(E)$, bet $\alpha \in \mathbb{R}$.

► Atzīmēsim, ka operācijas (5.1) ir *korekti* definētas kopā $L_1(E)$: jebkurām funkcijām $f, g \in L_1(E)$ un patvaļīgam $\alpha \in \mathbb{R}$ no $f \overset{\mathrm{E}}{\sim} f_*$ un $g \overset{\mathrm{E}}{\sim} g_*$ seko, ka $f + g \overset{\mathrm{E}}{\sim} f_* + g_*$ un $\alpha f \overset{\mathrm{E}}{\sim} \alpha f_*$. Bez tam kopa $L_1(E)$ ir *slēgta* attiecībā pret operācijām (5.1a) un (5.1b). Tiešām, jebkurām funkcijām $f, g \in L_1(E)$ un patvaļīgam $\alpha \in \mathbb{R}$ ir spēkā $f+g \in L_1(E)$ un $\alpha f \in L_1(E)$ saskaņā ar summējamu funkciju attiecīgi 4° un 10° īpašību. Iesakām lasītājam patstāvīgi pārliecināties, ka izpildās visas vektoru telpas aksiomas. Atzīmēsim tikai, ka vektoru telpā $L_1(E)$ nullvektora lomā ir nullfunkcija kopā E un visas tai ekvivalentās kopā E funkcijas.◄

5.2. teorēma. *Vektoru telpa $L_1(E)$ ir normēta telpa attiecībā pret normu $\|\cdot\|_1 : L_1(E) \to \mathbb{R}$, ka*

$$\forall f \in L_1(E): \ \|f\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_E \big|f(x)\big| dx. \tag{5.2}$$

► Vispirms pārliecināsimies, ka vienādība (5.2) *definē* attēlojumu

$$\|\cdot\|_1 : L_1(E) \to \mathbb{R}.$$

Tiešām, ja $f \in L_1(E)$, tad no summējamu funkciju 1° īpašības seko, ka arī $|f| \in L_1(E)$, t.i., integrālis, kas atrodas vienādības (5.2) labajā pusē, ir galīgs. Bez tam vienādība (5.2) *korekti* definē attēlojumu $\|\cdot\|_1$. Tiešām, ja $f, f_* \in L_1(E)$ un $f \stackrel{\text{E}}{\sim} f_*$, tad, acīmredzot, $|f| \stackrel{\text{E}}{\sim} |f_*|$, bet no summējamu funkciju 1° īpašības izriet, ka $|f|, |f_*| \in L_1(E)$, tāpēc no 4.2. paragrāfa 10° īpašības seko

$$\|f\|_1 = \int\limits_E \big|f(x)\big| dx = \int\limits_E \big|f_*(x)\big| dx = \|f_*\|_1 .$$

Pārliecināsimies, ka izpildās visas *normas aksiomas*:

1. *jebkurai funkcijai $f \in L_1(E)$ ir spēkā $\|f\|_1 \geq 0$, pie tam $\|f\|_1 = 0$ tad un tikai tad, kad $f \stackrel{\text{E}}{\sim} \mathbb{O}$;*
2. *jebkurai funkcijai $f \in L_1(E)$ un patvaļīgam $\alpha \in \mathbb{R}$ ir spēkā*
$$\|\alpha f\|_1 = |\alpha| \, \|f\|_1 ;$$
3. *jebkurām funkcijām $f, g \in L_1(E)$ ir spēkā nevienādība*
$$\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1 .$$

1. Apskatīsim patvaļīgu funkciju $f \in L_1(E)$. No summējamu funkciju 1° īpašības seko, ka $|f| \in L_1(E)$. Tā kā $|f|$ ir nenegatīva funkcija kopā E, tad no 4.2. paragrāfa 5° īpašības izriet, ka

$$\|f\|_1 = \int\limits_E \big|f(x)\big| dx \geq 0,$$

bet no 4.2. paragrāfa 13° īpašības seko, ka

$$\|f\|_1 = \int\limits_E \big|f(x)\big| dx = 0,$$

tad un tikai tad, kad $|f| \stackrel{\text{E}}{\sim} \mathbb{O}$ jeb $f \stackrel{\text{E}}{\sim} \mathbb{O}$.

2. Apskatīsim patvaļīgu funkciju $f \in L_1(E)$ un jebkuru $\alpha \in \mathbb{R}$. Tā kā $L_1(E)$ ir reāla vektoru telpa, tad $\alpha f \in L_1(E)$. No summējamu funkciju 1° īpašības seko, ka $|\alpha f| \in L_1(E)$. Tā kā $|\alpha f| = |\alpha| \, |f|$, tad, ņemot vērā 4.2. paragrāfa 2° īpašību, iegūsim

$$\|\alpha f\|_1 = \int\limits_E \big|\alpha f(x)\big| dx = \int\limits_E |\alpha| \, \big|f(x)\big| dx = |\alpha| \int\limits_E \big|f(x)\big| dx = |\alpha| \, \|f\|_1 .$$

3. Apskatīsim patvaļīgas funkcijas $f, g \in L_1(E)$. Tā kā $L_1(E)$ ir reāla vektoru telpa, tad $f + g \in L_1(E)$. No summējamu funkciju 1° īpašības seko, ka $|f + g| \in L_1(E)$. Tā kā

$$\forall x \in E: \ \big|f(x) + g(x)\big| \le \big|f(x)\big| + \big|g(x)\big|,$$

tad, ņemot vērā 4.2. paragrāfa 2° un 5° īpašību, iegūsim

$$\|f + g\|_1 = \int\limits_E \big|f(x) + g(x)\big| dx \le \int\limits_E \big|f(x)\big| dx + \int\limits_E \big|g(x)\big| dx = \|f\|_1 + \|g\|_1 .$$

Teorēma ir pierādīta.◀

5.1. definīcija. Pieņemsim, ka $f \in L_1(E)$ un $f_n \in L_1(E)$ $(n \in \mathbb{N})$. Saka, ka **funkciju virkne** (f_n) **konverģē pēc vidējā uz funkciju** f **kopā** E, ja funkciju virkne (f_n) konverģē uz funkciju f normētā telpā $L_1(E)$. Raksta:

$$(f_n) \xrightarrow{L_1(E)} f.$$

Tātad

$$\Big((f_n) \xrightarrow{L_1(E)} f\Big) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \Big(\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0\Big) \Longleftrightarrow \left(\lim_{n\to\infty} \int\limits_E \big|f_n(x) - f(x)\big| dx = 0\right).$$

5.3. teorēma. *Ja* $(f_n) \xrightarrow{L_1(E)} f$, *tad* $(f_n) \overset{E}{\Rightarrow} f$, *t.i., ja funkciju virkne* (f_n) *konverģē pēc vidējā uz funkciju* f *kopā* E, *tad funkciju virkne* (f_n) *konverģē pēc mēra uz funkciju* f *kopā* E.

▶ Pieņemsim, ka $(f_n) \xrightarrow{L_1(E)} f$, t.i., skaitļu virkne

$$\left(\int\limits_E \big|f_n(x) - f(x)\big| dx\right) \tag{5.3}$$

konverģē uz 0. Pierādīsim, ka $(f_n) \overset{E}{\Rightarrow} f$. Pieņemsim pretējo, ka virkne (f_n) nekonverģē pēc mēra uz funkciju f kopā E. Tad saskaņā ar konverģences pēc mēra definīciju eksistē $\varepsilon > 0$ un $\delta > 0$, kā arī augoša indeksu virkne

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots , \tag{5.4}$$

ka

$$\mathrm{m}\Big(E\Big[\big|f_n(x) - f(x)\big| \ge \varepsilon\Big]\Big) \ge \delta \tag{5.5}$$

jebkuram $n = n_1, n_2, \dots$. Apskatīsim kopas

$$E_k = E\Big[\big|f_{n_k}(x) - f(x)\big| \ge \varepsilon\Big] \ \ (k = 1, 2, \dots).$$

Tā kā $E \supset E_k$ $(k \in \mathbb{N})$, tad no 4.2. paragrāfa 6° īpašības izriet

$$\int\limits_E \big|f_{n_k}(x) - f(x)\big| dx \ge \int\limits_{E_k} \big|f_{n_k}(x) - f(x)\big| dx \ \ (k = 1, 2, \dots). \tag{5.6}$$

Tā kā

$$\forall x \in E_k : \ \big|f_{n_k}(x) - f(x)\big| \geq \varepsilon \ \ (k = 1, 2, \dots),$$

tad no 4.2. paragrāfa 10° īpašības, ņemot vērā formulu (5.5) un 4.3. piemēru, seko

$$\int\limits_{E_k} \big|f_{n_k}(x) - f(x)\big| dx \geq \varepsilon\, \mathrm{m}(E_k) \geq \delta\varepsilon \ \ (k = 1, 2, \dots). \tag{5.7}$$

Pieņemsim, ka $\varepsilon_1 = \delta\varepsilon$. No (5.6) un (5.7) iegūsim

$$\int\limits_{E} \big|f_{n_k}(x) - f(x)\big| dx \geq \varepsilon_1 \ \ (k = 1, 2, \dots). \tag{5.8}$$

Tātad eksistē tāds $\varepsilon_1 > 0$, ka visiem indeksiem (5.4) ir spēkā (5.8), tāpēc

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{E} \big|f_{n_k}(x) - f(x)\big| dx \neq 0,$$

kas ir pretrunā ar to, ka jebkura konverģentās virknes (5.3) apakšvirkne

$$\left(\int\limits_{E} \big|f_{n_k}(x) - f(x)\big| dx \right)$$

ir konverģenta un tās robeža ir vienāda ar 0. No iegūtās pretrunas secinām, ka $(f_n) \overset{E}{\Rightarrow} f$.◀

5.1. piezīme. 5.3. teorēmas apgrieztā teorēma nav spēkā, jo *vispārīgā gadījumā no funkciju virknes konverģences pēc mēra (vēl vairāk, arī no konverģences gandrīz visur un punktveida konverģences)* ***neizriet*** *šīs funkciju virknes konverģence pēc vidējā uz attiecīgo robežfunkciju apskatāmajā kopā.* Ilustrēsim iepriekš teikto. Aplūkosim kopā $(0; 1)$ definētu funkciju virkni (f_n), ka

$$\forall x \in (0; 1) : \ f_n(x) = \begin{cases} n, & \text{ja} \quad 0 < x < \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{ja} \quad \frac{1}{n} \leq x < 1, \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

No vienas puses, $(f_n) \xrightarrow{(0;1)} \mathbb{O}$, t.i., virkne (f_n) *konverģē* uz nullfunkciju $\mathbb{O}$ kopā $(0; 1)$, tātad arī $(f_n) \overset{(0;1)}{\Longrightarrow} \mathbb{O}$, t.i., virkne (f_n) *konverģē pēc mēra* uz nullfunkciju $\mathbb{O}$ kopā $(0; 1)$. No otras puses, tā kā

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - \mathbb{O}\|_1 = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{0}^{\frac{1}{n}} n dx = \lim_{n\to\infty} 1 = 1,$$

tad virkne (f_n) *nekonverģē pēc vidējā* uz nullfunkciju $\mathbb{O}$ kopā $(0; 1)$.

5.2. piezīme. *Vispārīgā gadījumā no funkciju virknes konverģences pēc vidējā* ***neizriet*** *šīs funkciju virknes konverģence gandrīz visur (atsevišķā gadījumā punktveida konverģence un vienmērīgā konverģence) apskatāmajā kopā uz attiecīgo robežfunkciju. Vēl jo vairāk, funkciju virkne var konverģēt pēc vidējā, bet tajā pašā laikā diverģēt katrā apskatāmās kopas punktā.* Šādas virknes piemēru kopas $E = [0; 1]$ gadījumā sniedz virkne (f_n), kura tika apskatīta 2.4. piemērā. Tiešām, viegli pārliecināties, ka, no vienas puses, $(f_n) \xrightarrow{L_1\left([0;1]\right)} \mathbb{O}$, bet, no otras puses, kā jau tika pierādīts minētajā piemērā, virkne (f_n) diverģē katrā kopas E punktā.

5.4. teorēma. *Ja* $\mathrm{m}(E) < +\infty$, $f_n \in L_1(E)$ $(n \in \mathbb{N})$, $f \in L_1(E)$ *un* $(f_n) \overset{E}{\rightrightarrows} f$, *tad* $(f_n) \xrightarrow{L_1(E)} f$, *t.i., ja galīga mēra kopā* E *summējamu funkciju virkne* (f_n) *vienmērīgi konverģē kopā* E *uz summējamu šajā kopā funkciju* f, *tad funkciju virkne* (f_n) *konverģē pēc vidējā uz funkciju* f *kopā* E.

► Pieņemsim, ka $\mathrm{m}(E) < +\infty$ un $(f_n) \overset{E}{\rightrightarrows} f$, pie tam $f \in L_1(E)$ un $f_n \in L_1(E)$ $(n \in \mathbb{N})$. Apskatīsim divus gadījumus.

Pieņemsim, ka $\mathrm{m}(E) = 0$. Ņemot vērā 4.1. piemēru, atrodam

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = \lim_{n\to\infty} \int\limits_E \big|f_n(x) - f(x)\big| dx = \lim_{n\to\infty} 0 = 0,$$

t.i., $(f_n) \xrightarrow{L_1(E)} f$.

Pieņemsim, ka $0 < \mathrm{m}(E) < +\infty$. Tā kā $(f_n) \overset{E}{\rightrightarrows} f$, tad jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds $n_0 \in \mathbb{N}$, ka visiem numuriem $n \geq n_0$ un katram $x \in E$ ir spēkā

$$\big|f_n(x) - f(x)\big| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot \mathrm{m}(E)},$$

no kurienes, izmantojot 4.2. paragrāfa 5° īpašību, atrodam

$$\|f_n - f\|_1 = \int\limits_E \big|f_n(x) - f(x)\big| dx \leq \frac{\varepsilon}{2 \cdot \mathrm{m}(E)} \cdot \mathrm{m}(E) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Tātad $(f_n) \xrightarrow{L_1(E)} f$.◄

5.3. piezīme.

- Ja $m(E) = +\infty$, tad pēdējā teorēma nav spēkā, t.i., *ja* $m(E) = +\infty$, *tad vispārīgā gadījumā no funkciju virknes vienmērīgās konverģences* ***neizriet*** *šīs funkciju virknes konverģence pēc vidējā apskatāmajā kopā uz attiecīgo robežfunkciju.* Ilustrēsim iepriekš teikto. Aplūkosim kopā $\mathbb{R}$ definētu funkciju virkni (f_n), ka
$$\forall x \in \mathbb{R}: \ f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}}, & \text{ja} \quad |x| \leq n, \\ 0, & \text{ja} \quad |x| > n, \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$
No vienas puses, $(f_n) \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} \mathbb{O}$, t.i., virkne (f_n) *vienmērīgi konverģē* uz nullfunkciju $\mathbb{O}$ kopā $\mathbb{R}$. No otras puses, tā kā $f_n \in L_1(\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N})$, $\mathbb{O} \in L_1(\mathbb{R})$ un
$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - \mathbb{O}\|_1 = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-n}^{n} \frac{dx}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} 2\sqrt{n} = +\infty,$$
tad virkne (f_n) *nekonverģē pēc vidējā* uz nullfunkciju $\mathbb{O}$ kopā $\mathbb{R}$.
- Ņemot vērā 5.2. piezīmē teikto, vispārīgā gadījumā no funkciju virknes konverģences pēc vidējā *neizriet* šīs funkciju virknes vienmērīgā konverģence apskatāmajā kopā uz attiecīgo robežfunkciju.

5.5. teorēma. *$L_1(E)$ ir pilna normēta telpa, t.i., $L_1(E)$ ir Banaha telpa.*

► Lai pierādītu, ka $L_1(E)$ ir Banaha telpa, ir jāpierāda, ka jebkura telpas $L_1(E)$ fundamentālvirkne konverģē šajā telpā uz kādu telpas $L_1(E)$ elementu.

Apskatīsim patvaļīgu pozitīvu skaitļu virkni (ε_k), ka rinda $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon_n$ konverģē. Pieņemsim, ka (f_n) ir fundamentālvirkne normētā telpā $L_1(E)$. Tad funkcijas f_n $(n \in \mathbb{N})$ ir summējamas (un tātad arī mērojamas) kopā E, pie tam jebkuram $k \in \mathbb{N}$ eksistē tāds $n_k \in \mathbb{N}$, ka visiem numuriem $n, m \geq n_k$ ir spēkā $\|f_n - f_m\|_1 < \varepsilon_k$. Viegli redzēt, ka numurus n_k var izvēlēties tā, lai $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$. Tātad jebkuram $k \in \mathbb{N}$ ir spēkā

$$\left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_1 < \varepsilon_k. \tag{5.9}$$

No (5.9), ņemot vērā rindu ar nenegatīviem locekļiem salīdzināšanas pazīmi, secinām, ka rinda

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_1 \quad \text{jeb} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_E \left|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\right| dx$$

arī konverģē. No 4.6. teorēmas izriet, ka rinda

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\right|$$

konverģē gandrīz visiem $x \in E$, t.i., rinda

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\big) \tag{5.10}$$

absolūti konverģē gandrīz visiem $x \in E$. Tātad rinda (5.10) konverģē gandrīz visiem $x \in E$. Taču tad rinda

$$f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \big(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\big) = \\ = f_{n_1}(x) + \big(f_{n_2}(x) - f_{n_1}(x)\big) + \big(f_{n_3}(x) - f_{n_2}(x)\big) + \cdots \tag{5.11}$$

arī konverģē gandrīz visiem $x \in E$, jo rindas konverģence saglabājas, ja tai pievieno galīgu skaitu jaunu locekļu (rinda (5.11) ir iegūta no rindas (5.10), pievienojot tai tikai vienu locekli $f_{n_1}(x)$). Tāpēc rindas (5.11) parciālsummu virkne (S_k), ka

$$\forall x \in E: \ S_k(x) = f_{n_k}(x) \ \ (k \in \mathbb{N}),$$

konverģē gandrīz visiem $x \in E$. Apskatīsim kopā E definētu funkciju f, ka

$$\forall x \in E: \ f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x) & \text{visos tajos kopas } E \text{ punktos, kuros} \\ & \qquad\qquad \text{šī robeža eksistē,} \\ 0 & \text{visos pārējos kopas } E \text{ punktos.} \end{cases}$$

Tad $(f_{n_k}) \xrightarrow[\text{g.v.}]{E} f$, bet no 2.8. teorēmas izriet, ka funkcija f ir mērojama kopā E.

Pierādīsim, ka $f \in L_1(E)$ un $(f_n) \xrightarrow{L_1(E)} f$. Tā kā (f_n) ir fundamentālvirkne telpā $L_1(E)$, tad jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds $N \in \mathbb{N}$, ka visiem numuriem $n, m \geq N$ ir spēkā

$$\|f_n - f_m\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.12}$$

Tā kā virkne (n_k) ir stingri augoša, tad eksistē tāds $K \in \mathbb{N}$, ka $n_k \geq N$ visiem $k \geq K$. No (5.12) seko, ka visiem $n \geq N$ un $k \geq K$ ir spēkā

$$\|f_n - f_{n_k}\|_1 = \int\limits_E \big|f_n(x) - f_{n_k}(x)\big| dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.13}$$

Tātad kopa

$$\left\{ \int\limits_E \big|f_n(x) - f_{n_k}(x)\big| dx : n \geq N,\ k \geq K \right\}$$

ir ierobežota no augšas ar konstanti $\frac{\varepsilon}{2}$. Ja x ir tāds kopas E punkts, ka $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x)$, tad, ņemot vērā nevienādību $\Big|\big|f_n(x) - f_{n_k}(x)\big| - \big|f_n(x) - f(x)\big|\Big| \leq \big|f_{n_k}(x) - f(x)\big|$, kura ir spēkā jebkuriem $n, k \in \mathbb{N}$, var secināt, ka

$$\lim_{k\to\infty} \big|f_n(x) - f_{n_k}(x)\big| = \big|f_n(x) - f(x)\big|$$

jebkuram $n \in \mathbb{N}$. Tā kā $(f_{n_k}) \xrightarrow[\text{g.v.}]{E} f$, ja $k \to \infty$, tad

$$\big(|f_n - f_{n_k}|\big) \xrightarrow[\text{g.v.}]{E} |f_n - f|,$$

ja $k \to \infty$, bet n ir fiksēts naturāls skaitlis. Tāpēc arī

$$\big(|f_n - f_{n_k}|\big)_{k=K}^{\infty} \xrightarrow[\text{g.v.}]{E} |f_n - f|,$$

kur $k \geq K$ un $k \to \infty$, bet n ir fiksēts naturāls skaitlis, ka $n \geq N$. No Fatu teorēmas izriet, ka funkcijas $|f_n - f|$ $(n \geq N)$ ir summējamas kopā E, pie tam, ņemot vērā (5.13), iegūsim

$$\int\limits_E \big|f_n(x) - f(x)\big| dx \leq \sup_{\substack{n\geq N\\ k\geq K}} \int\limits_E \big|f_n(x) - f_{n_k}(x)\big| dx \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad (n \geq N).$$

jeb

$$\|f_n - f\|_1 < \varepsilon \quad (n \geq N). \tag{5.14}$$

Tā kā funkcijas $|f_n - f|$ $(n \geq N)$ ir summējamas kopā E, tad no summējamu funkciju 1° īpašības izriet, ka funkcijas $f_n - f$ $(n \geq N)$ arī ir summējamas kopā E. Funkcijas f_n $(n \geq N)$ ir summējamas kopā E pēc dotā. Tāpēc saskaņā ar 4.17. piezīmi šo funkciju starpība $f_n - (f_n - f) = f$ ir summējama funkcija kopā E, t.i., $f \in L_1(E)$. Tādējādi eksistē $f \in L_1(E)$, ka jebkuram $\varepsilon > 0$ var atrast $N \in \mathbb{N}$, ka visiem numuriem $n \geq N$ ir spēkā (5.14). Tas nozīmē, ka $(f_n) \xrightarrow{L_1(E)} f$.◀

5.4. piezīme. No pierādītās teorēmas izriet, ka $L_1(E)$ ir pilna metriska telpa attiecībā pret metriku $\rho : L_1(E) \times L_1(E) \to \mathbb{R}$, ka

$$\forall f, g \in L_1(E) : \rho(f; g) = \|f - g\|_1 = \int\limits_E \big|f(x) - g(x)\big| dx.$$

5.2. Hilberta telpa $L_2(E)$

Apskatīsim kopu $L_2(E)$, kas sastāv no visām kopā E mērojamām funkcijām f, kuru kvadrāts f^2 ir summējama funkcija kopā E, pie tam uzskatīsim, ka kopā E ekvivalentas funkcijas reprezentē vienu un to pašu kopas $L_2(E)$ elementu. Atzīmēsim, ka kopa $L_2(E)$ ir definēta *korekti*: ja $f \in L_2(E)$ un $f \overset{E}{\sim} f_*$, tad $f_* \in L_2(E)$. Tiešām, pieņemsim, ka

1. $f \in L_2(E)$, t.i., funkcija f ir mērojama kopā E, bet funkcijas f kvadrāts ir summējama funkcija kopā E;

2. $f \overset{E}{\sim} f_*$, t.i., funkcijas f un f_* ir ekvivalentas kopā E.

Tā kā funkcija f ir mērojama kopā E un $f \overset{E}{\sim} f_*$, tad no 2.3. teorēmas seko, ka arī *funkcija f_* ir mērojama kopā E*. Tā kā $f \overset{E}{\sim} f_*$, tad arī $f^2 \overset{E}{\sim} f_*^2$. Tā kā funkcija f^2 ir summējama kopā E un $f^2 \overset{E}{\sim} f_*^2$, tad no summējamu funkciju 8° īpašības izriet, ka *funkcija f_*^2 arī ir summējama kopā E*. Tātad $f_* \in L_2(E)$.

5.6. teorēma. *Kopa $L_2(E)$ ir reāla vektoru telpa attiecībā pret dabiskajām funkciju saskaitīšanas un reizināšanas ar reālu skaitli operācijām* (5.1a) *un* (5.1b).

► Atzīmēsim, ka operācijas (5.1) ir *korekti* definētas kopā $L_2(E)$: jebkurām funkcijām $f, g \in L_2(E)$ un patvaļīgam $\alpha \in \mathbb{R}$ no $f \overset{\mathrm{E}}{\sim} f_*$ un $g \overset{\mathrm{E}}{\sim} g_*$ seko, ka $f + g \overset{\mathrm{E}}{\sim} f_* + g_*$ un $\alpha f \overset{\mathrm{E}}{\sim} \alpha f_*$. Pierādīsim, ka kopa $L_2(E)$ ir *slēgta* attiecībā pret operācijām (5.1a) un (5.1b), t.i., jebkurām funkcijām $f, g \in L_2(E)$ un patvaļīgam $\alpha \in L_2(E)$ ir spēkā $f + g \in L_2(E)$ un $\alpha f \in L_2(E)$.

Pieņemsim, ka $f, g \in L_2(E)$. Tad funkcijas f un g ir mērojamas kopā E, bet to kvadrāti f^2 un g^2 ir summējamas funkcijas kopā E. Tāpēc funkciju f un g reizinājums fg ir mērojama funkcija kopā E, bet saskaņā ar summējamu funkciju 11° īpašību funkcija $\frac{1}{2}f^2 + \frac{1}{2}g^2$ ir summējama kopā E. Ņemot vērā, ka

$$\forall x \in E: \ \big|f(x)g(x)\big| \leq \frac{f^2(x) + g^2(x)}{2},$$

no summējamu funkciju 7° īpašības izriet, ka *funkcija fg ir summējama kopā E*. Taču tad, ņemot vērā, ka

$$\forall x \in E: \ \big[f(x) + g(x)\big]^2 = f^2(x) + 2f(x)g(x) + g^2(x),$$

no summējamu funkciju 4° un 10° īpašības izriet, ka *funkcija $(f+g)^2$ ir summējama kopā E*. Tā kā funkcijas f un g ir mērojamas kopā E, tad arī to *summa $f + g$ ir mērojama funkcija kopā E*. Tātad $f + g \in L_2(E)$.

Pieņemsim, ka $f \in L_2(E)$, t.i., funkcija f ir mērojama kopā E, bet tās kvadrāts ir summējama funkcija kopā E. Apskatīsim patvaļīgu $\alpha \in \mathbb{R}$. Tad funkcija αf ir mērojama kopā E, bet no summējamu funkciju 4° īpašības izriet, ka funkcija $(\alpha f)^2 = \alpha^2 f^2$ ir summējama kopā E. Tātad $\alpha f \in L_2(E)$.

Iesakām lasītājam patstāvīgi pārliecināties, ka izpildās visas vektoru telpas aksiomas. Atzīmēsim tikai, ka vektoru telpā $L_2(E)$ nullvektora lomā ir nullfunkcija kopā E un visas tai ekvivalentās kopā E funkcijas.◄

5.5. piezīme. Kāda saistība pastāv starp kopām $L_1(E)$ un $L_2(E)$?

- Ja $\mathrm{m}(E) = 0$, tad $L_1(E) = L_2(E)$. Tiešām, saskaņā ar 4.5. piemēru (skat. 4.3. paragrāfu) jebkura nulles mēra kopā definēta funkcija ir summējama šajā kopā, tāpēc gan $L_1(E)$, gan $L_2(E)$ sastāv no vienām un tām pašām funkcijām - visām kopā E definētām funkcijām, t.i., $L_1(E) = L_2(E)$.
- Ja $\mathrm{m}(E) > 0$, tad $L_1(E) \not\subset L_2(E)$, t.i., *eksistē summējamas pozitīva mēra kopā E funkcijas, kuru kvadrāts nav summējama funkcija kopā E.* Piemēram, funkcija f, ka

$$\forall x \in (0; +\infty) : f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{ja} \quad x \in (0; 1], \\ 0, & \text{ja} \quad x \in (1; +\infty), \end{cases}$$

  ir summējama bezgalīga mēra kopā $(0; +\infty)$ un līdz ar to arī ir summējama galīga mēra kopā $(0; 1]$, taču funkcija f^2 nav summējama galīga mēra kopā $(0; 1]$ un līdz ar to arī nav summējama bezgalīga mēra kopā $(0; +\infty)$.
- Ja $\mathrm{m}(E) = +\infty$, tad $L_2(E) \not\subset L_1(E)$, t.i., *eksistē mērojamas bezgalīga mēra kopā E funkcijas, kuras nav summējamas kopā E, bet kuru kvadrāts ir summējama funkcija kopā E.* Piemēram, funkcija f, ka

$$\forall x \in (1; +\infty) : f(x) = \frac{1}{x},$$

  ir mērojama funkcija kopā $(1; +\infty)$, pie tam šī funkcija nav summējama kopā $(1; +\infty)$, taču tās kvadrāts ir summējama funkcija kopā $(1; +\infty)$.
- *Ja E ir galīga mēra kopa, tad $L_2(E) \subset L_1(E)$.* Pieņemsim, ka $f \in L_2(E)$, t.i., funkcija f ir mērojama kopā E, bet tās kvadrāts f^2 ir summējama funkcija kopā E. Atzīmēsim, ka

$$\forall x \in E : \ \big|f(x)\big| \leq \frac{1}{2}\big[1 + f^2(x)\big] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f^2(x). \tag{5.15}$$

  Tā kā funkcija f^2 ir summējama kopā E, tad no summējamu funkciju 4° īpašības izriet, ka funkcija $\frac{1}{2}f^2$ ir summējama kopā E. Saskaņā ar 4.3. piemēru jebkura kopā E konstanta funkcija ir summējama kopā E. Tāpēc no summējamu funkciju 9° īpašības seko, ka funkcija $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}f^2$ ir summējama kopā E. Ņemot vērā (5.15), no summējamu funkciju 7° īpašības izriet, ka funkcija f ir summējama kopā E, t.i., $f \in L_1(E)$.

5.7. teorēma. *Vektoru telpa $L_2(E)$ ir prehilberta telpa attiecībā pret skalāro reizinājumu $\langle \cdot; \cdot \rangle : L_2(E) \times L_2(E) \to \mathbb{R}$, ka*

$$\forall f, g \in L_2(E) : \ \langle f; g \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_E f(x)g(x)dx. \tag{5.16}$$

▶ Vispirms atzīmēsim, ka formula (5.16) *definē* attēlojumu

$$\langle \cdot; \cdot \rangle : L_2(E) \times L_2(E) \to \mathbb{R}.$$

Tiešām, ja $f, g \in L_2(E)$, tad 5.6. teorēmas pierādījuma gaitā tika iegūts, ka funkcija fg ir summējama kopā E, tāpēc integrālis vienādības (5.16) labajā pusē ir galīgs, un tādējādi attēlojums $\langle \cdot; \cdot \rangle$ ir definēts. Bez tam vienādība (5.16) *korekti* definē attēlojumu $\langle \cdot; \cdot \rangle$.

Tiešām, ja $f \overset{E}{\sim} f_*$ un $g \overset{E}{\sim} g_*$, kur $f, g, f_*, g_* \in L_2(E)$, tad, acīmredzot, $fg \overset{E}{\sim} f_* g_*$, pie tam funkcijas fg un $f_* g_*$ ir summējamas kopā E, tāpēc no summējamu funkciju 8° īpašības izriet

$$\langle f; g\rangle = \int\limits_E f(x)g(x)dx = \int\limits_E f_*(x)g_*(x)dx = \langle f_*; g_*\rangle.$$

Pārliecināsimies, ka izpildās visas *skalārā reizinājuma aksiomas*:

1. *jebkurai funkcijai $f \in L_2(E)$ ir spēkā $\langle f; f\rangle \geq 0$, pie tam $\langle f; f\rangle = 0$ tad un tikai tad, kad $f \overset{\mathrm{E}}{\sim} \mathbb{O}$;*

2. *jebkurām funkcijām $f, g, h \in L_2(E)$ un patvaļīgiem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ir spēkā*

$$\langle \alpha f + \beta g; h\rangle = \alpha\langle f; h\rangle + \beta\langle g; h\rangle;$$

3. *jebkurām funkcijām $f, g \in L_2(E)$ ir spēkā*

$$\langle f; g\rangle = \langle g; f\rangle.$$

1. Apskatīsim patvaļīgu funkciju $f \in L_2(E)$, t.i., funkcija f ir mērojama kopā E, bet funkcija f^2 ir summējama kopā E. Tā kā f^2 ir nenegatīva funkcija kopā E, tad no 4.2. paragrāfa 5° īpašības izriet, ka

$$\langle f; f\rangle = \int\limits_E f^2(x)dx \geq 0,$$

bet no 4.2. paragrāfa 13° īpašības seko, ka

$$\langle f; f\rangle = \int\limits_E f^2(x)dx = 0$$

tad un tikai tad, kad $f^2 \overset{\mathrm{E}}{\sim} \mathbb{O}$ jeb $f \overset{\mathrm{E}}{\sim} \mathbb{O}$.

2. Pieņemsim, ka $f, g, h \in L_2(E)$, bet $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tā kā $L_2(E)$ ir reāla vektoru telpa, tad $\alpha f + \beta g \in L_2(E)$. No summējamu funkciju 10° īpašības seko

$$\langle \alpha f + \beta g; h\rangle = \int\limits_E \big[\alpha f(x) + \beta g(x)\big]h(x)dx = \int\limits_E \big[\alpha f(x)h(x) + \beta g(x)h(x)\big]dx =$$
$$= \alpha \int\limits_E f(x)h(x)dx + \beta \int\limits_E g(x)h(x)dx = \alpha\langle f; h\rangle + \beta\langle g; h\rangle.$$

3. Ja $f, g \in L_2(E)$, tad, acīmredzot,

$$\langle f; g\rangle = \int\limits_E f(x)g(x)dx = \int\limits_E g(x)f(x)dx = \langle g; f\rangle.$$

Teorēma ir pierādīta.◀

5.6. piezīme. Atzīmēsim dažas sekas no pierādītās teorēmas.

- $L_2(E)$ ir normēta telpa attiecībā pret normu $\|\cdot\|_2 : L_2(E) \to \mathbb{R}$, ka

$$\forall f \in L_2(E): \ \|f\|_2 = \sqrt{\langle f; f\rangle} = \sqrt{\int\limits_E f^2(x)dx}\,.$$

- $L_2(E)$ ir metriska telpa attiecībā pret metriku $\rho : L_2(E) \times L_2(E) \to \mathbb{R}$, ka

$$\forall f, g \in L_2(E): \ \rho(f; g) = \|f - g\|_2 = \sqrt{\langle f - g; f - g\rangle} = \sqrt{\int\limits_E \big[f(x) - g(x)\big]^2 dx}\,.$$

- Ir patiesa **Košī-Buņakovska**[1] **nevienādība**:

$$\big|\,\langle f; g\rangle\,\big| \le \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 \tag{5.17a}$$

jeb

$$\left|\int\limits_E f(x)g(x)dx\right| \le \sqrt{\int\limits_E f^2(x)dx}\sqrt{\int\limits_E g^2(x)dx} \tag{5.17b}$$

jeb

$$\left(\int\limits_E f(x)g(x)dx\right)^2 \le \left(\int\limits_E f^2(x)dx\right)\left(\int\limits_E g^2(x)dx\right), \tag{5.17c}$$

kur $f, g \in L_2(E)$.

5.2. definīcija. Pieņemsim, ka $f \in L_2(E)$ un $f_n \in L_2(E)$ $(n \in \mathbb{N})$. Saka, ka **funkciju virkne** (f_n) **konverģē pēc vidējā kvadrātiskā uz funkciju** f **kopā** E, ja funkciju virkne (f_n) konverģē uz funkciju f normētā telpā $L_2(E)$. Raksta:

$$(f_n) \xrightarrow{L_2(E)} f.$$

Tātad

$$\Big((f_n) \xrightarrow{L_2(E)} f\Big) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \Big(\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = 0\Big) \Longleftrightarrow \left(\lim_{n\to\infty} \int\limits_E \big[f_n(x) - f(x)\big]^2 dx = 0\right).$$

5.8. teorēma. *Pieņemsim, ka E ir* ***galīga*** *mēra kopa.*

1. *Vektoru telpa $L_2(E)$ ir vektoru telpas $L_1(E)$ apakštelpa, pie tam*

$$\forall f \in L_2(E): \ \|f\|_1 \le \sqrt{\mathrm{m}(E)} \cdot \|f\|_2\,, \tag{5.18}$$

kur $\|f\|_1$ ir funkcijas $f \in L_2(E)$ norma telpā $L_1(E)$, bet $\|f\|_2$ ir funkcijas f norma telpā $L_2(E)$.

[1] V. Buņakovskis (*Буняковский Виктор Яковлевич*, 1804-1889) - krievu matemātiķis.

2. *Ja* $(f_n) \xrightarrow{L_2(E)} f$, *tad* $(f_n) \xrightarrow{L_1(E)} f$, *t.i., no funkciju virknes* (f_n) *konverģences pēc vidējā kvadrātiskā uz funkciju* f *galīga mēra kopā* E *izriet funkciju virknes* (f_n) *konverģence pēc vidējā uz funkciju* f *kopā* E.

► 1. Kā jau tika atzīmēts 5.5. piezīmē, ja E ir galīga mēra kopa, tad $L_2(E) \subset L_1(E)$. Tā kā vektoru telpās $L_1(E)$ un $L_2(E)$ ir vienas un tās pašas funkciju saskaitīšanas un reizināšanas ar reāliem skaitļiem operācijas (5.1a) un (5.1b), tad vektoru telpa $L_2(E)$ ir vektoru telpas $L_1(E)$ apakštelpa. Tāpēc jebkurai funkcijai $f \in L_2(E)$ ir definētas divas normas

$$\|f\|_1 = \int\limits_E \big|f(x)\big|dx \quad \text{un} \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int\limits_E f^2(x)dx}.$$

Pierādīsim, ka šīs normas saista nevienādība (5.18). Tiešām, ja Košī-Buņakovska nevienādībā (5.17b) ņemt $g = |f|$ un uzskatīt, ka $f(x) = 1$ jebkuram $x \in E$, tad, ņemot vērā 3.5. piezīmi, iegūsim

$$\int\limits_E \big|f(x)\big|dx = \left|\int\limits_E \big|f(x)\big|dx\right| \le \sqrt{\mathrm{m}(E)} \cdot \sqrt{\int\limits_E f^2(x)dx},$$

t.i., izpildās (5.18).

2. Pieņemsim, ka $(f_n) \xrightarrow{L_2(E)} f$. Ja $\mathrm{m}(E) = 0$, tad $\|f\|_1 = \|f\|_2 = 0$ jebkurai funkcijai $f \in L_2(E) = L_1(E)$. Tāpēc šajā gadījumā, acīmredzot, $(f_n) \xrightarrow{L_1(E)} f$. Pieņemsim, ka $\mathrm{m}(E) > 0$. Apskatīsim patvaļīgu $\varepsilon > 0$. Tad eksistē $n_0 \in \mathbb{N}$, ka visiem numuriem $n \ge n_0$ ir spēkā

$$\|f_n - f\|_2 < \frac{\varepsilon}{\sqrt{\mathrm{m}(E)}}. \tag{5.19}$$

No (5.18) un (5.19) iegūsim

$$\|f_n - f\|_1 \le \sqrt{\mathrm{m}(E)} \cdot \|f_n - f\|_2 < \sqrt{\mathrm{m}(E)} \cdot \frac{\varepsilon}{\sqrt{\mathrm{m}(E)}} = \varepsilon,$$

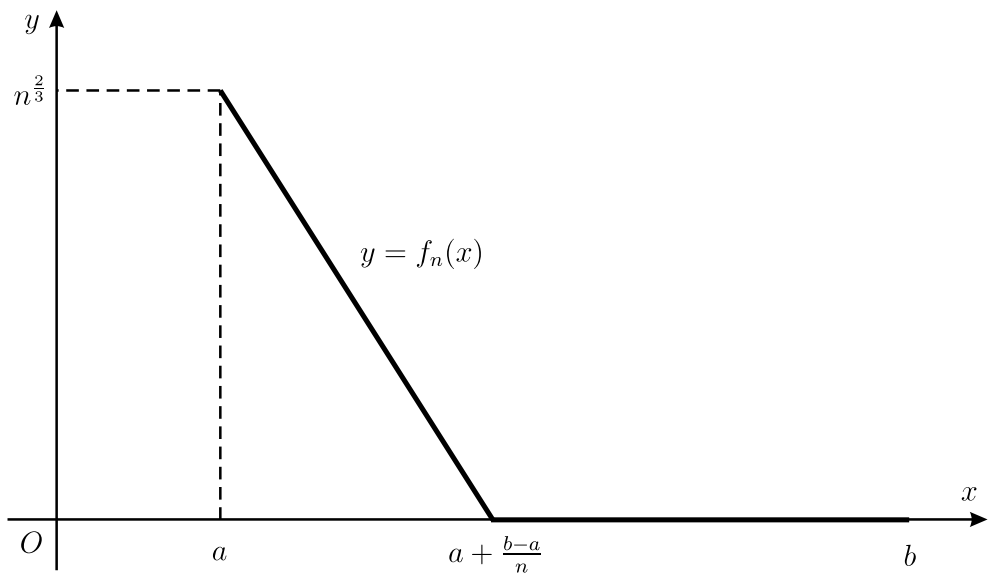
no kurienes seko

$$\|f_n - f\|_1 < \varepsilon. \tag{5.20}$$

Tātad jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē $n_0 \in \mathbb{N}$, ka visiem numuriem $n \ge n_0$ ir spēkā (5.20). Tas nozīmē, ka $(f_n) \xrightarrow{L_1(E)} f$.◄

5.7. piezīme.

• Ja $\mathrm{m}(E) = 0$, tad $L_1(E) = L_2(E)$ (skat. 5.5. piezīmi). Saskaņā ar 4.5. piemēru (skat. 4.3. paragrāfu) jebkura nulles mēra kopā definēta funkcija ir summējama šajā kopā, pie tam šīs funkcijas Lebega integrālis apskatāmajā nulles mēra kopā ir vienāds ar 0, tāpēc $\|f\|_1 = \|f\|_2 = 0$ jebkurai funkcijai $f \in L_1(E) = L_2(E)$. Līdz ar to, *ja* $\mathrm{m}(E) = 0$, *tad* $L_1(E) = L_2(E)$, *pie tam* $(f_n) \xrightarrow{L_1(E)} f$ *tad un tikai tad, kad* $(f_n) \xrightarrow{L_2(E)} f$, *t.i., nulles mēra kopā konverģence pēc vidējā ir ekvivalenta konverģencei pēc vidējā kvadrātiskā.* Tātad, ja $\mathrm{m}(E) = 0$, tad 5.8. teorēmas 2. apgalvojuma apgrieztais apgalvojums ir spēkā.



5.1. zīmējums. 5.7. piezīmē apskatītās funkciju virknes (f_n) locekļa f_n (n ir fiksēts naturāls skaitlis) grafiks.

• Savukārt, ja E ir galīga pozitīva mēra kopa, tad 5.8. teorēmas 2. apgalvojuma apgrieztais apgalvojums nav spēkā, jo *vispārīgā gadījumā no funkciju virknes* (f_n), *kur* $f_n \in L_2(E)$ $(n \in \mathbb{N})$, *konverģences pēc vidējā uz funkciju* $f \in L_2(E)$ ***galīga pozitīva*** *mēra kopā* E ***neseko*** *funkciju virknes* (f_n) *konverģence pēc vidējā kvadrātiskā uz funkciju* f *kopā* E. Ilustrēsim iepriekš teikto, apskatot kopā $E = [a; b]$, kur $a, b \in \mathbb{R}$ un $a < b$, ierobežotu mērojamu funkciju virkni (f_n) (skat. 10. uzdevumu 3. nodaļas beigās un 5.1. zīmējumu), ka

$$\forall x \in [a; b]: \; f_n(x) = \begin{cases} n^{\frac{2}{3}} \left(1 - \frac{x-a}{b-a} \cdot n\right), & \text{ja} \quad x \in \left[a; a + \frac{b-a}{n}\right], \\ 0, & \text{ja} \quad x \in \left(a + \frac{b-a}{n}; b\right], \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Acīmredzot, $f_n \in L_2\big([a; b]\big)$ $(n \in \mathbb{N})$, pie tam funkciju virkne (f_n) *konverģē pēc vidējā* uz nullfunkciju kopā $[a; b]$, jo

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - \mathbb{O}\|_1 = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^{a+\frac{b-a}{n}} n^{\frac{2}{3}} \left(1 - \frac{x-a}{b-a} \cdot n\right) dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2} \cdot n^{-\frac{1}{3}} = 0,$$

taču funkciju virkne (f_n) *nekonverģē pēc vidējā kvadrātiskā* uz nullfunkciju $\mathbb{O}$ kopā $[a; b]$, jo

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - \mathbb{O}\|_2 = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\int\limits_a^{a+\frac{b-a}{n}} n^{\frac{4}{3}} \left(1 - \frac{x-a}{b-a} \cdot n\right)^2 dx} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3(b-a)}}{3} \cdot n^{\frac{1}{6}} = +\infty.$$

5.8. piezīme. Ja E ir bezgalīga mēra kopa, tad, kā jau tika atzīmēts 5.5. piezīmē, $L_1(E) \not\subset L_2(E)$ un $L_2(E) \not\subset L_1(E)$. Reālu vektoru telpu $L_1(E)$ un $L_2(E)$ šķēlums $L_1(E) \cap L_2(E)$ arī ir reāla vektoru telpa. Tātad vektoru telpā $L_1(E) \cap L_2(E)$ ir

definētas divas normas $\|\cdot\|_1$ un $\|\cdot\|_2$. Kāda pastāv saistība starp konverģenci pēc vidējā un konverģenci pēc vidējā kvadrātiskā vektoru telpā $L_1(E)\cap L_2(E)$, ja E ir bezgalīga mēra kopa?

a) *Vispārīgā gadījumā no funkciju virknes (f_n), kur $f_n \in L_1(E)\cap L_2(E)$ $(n\in\mathbb{N})$, konverģences pēc vidējā uz funkciju $f \in L_1(E)\cap L_2(E)$* **bezgalīga** *mēra kopā E* ***neseko*** *funkciju virknes (f_n) konverģence pēc vidējā kvadrātiskā uz funkciju f kopā E.* Ilustrēsim iepriekš teikto, apskatot kopā $E=[a;+\infty)$, kur $a\in\mathbb{R}$, nepārtrauktu funkciju virkni (f_n), ka

$$\forall x\in[a;+\infty):\ f_n(x)=\begin{cases} n^{\frac{2}{3}}\left(1-\frac{x-a}{b-a}\cdot n\right), & \text{ja}\quad x\in\left[a;a+\frac{b-a}{n}\right],\\ 0, & \text{ja}\quad x\in\left(a+\frac{b-a}{n};+\infty\right),\end{cases}\qquad (n\in\mathbb{N}),$$

kur b ir kāds fiksēts reāls skaitlis, ka $b>a$. Izmantojot 5.7. piezīmes rezultātus, iegūsim, ka funkciju virkne (f_n) *konverģē pēc vidējā* uz nullfunkciju kopā $[a;+\infty)$, taču funkciju virkne (f_n) *nekonverģē pēc vidējā kvadrātiskā* uz nullfunkciju $\mathbb{O}$ kopā $[a;+\infty)$.

b) *Vispārīgā gadījumā no funkciju virknes (f_n), kur $f_n \in L_1(E)\cap L_2(E)$ $(n\in\mathbb{N})$, konverģences pēc vidējā kvadrātiskā uz funkciju $f\in L_1(E)\cap L_2(E)$* **bezgalīga** *mēra kopā E* ***neseko*** *funkciju virknes (f_n) konverģence pēc vidējā uz funkciju f kopā E.* Ilustrēsim iepriekš teikto, apskatot kopā $E=[a;+\infty)$ definētu funkciju virkni (f_n), ka

$$\forall x\in[a;+\infty):\ f_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}, & \text{ja}\quad a\le x\le a+n,\\ 0, & \text{ja}\quad x>a+n,\end{cases}\qquad (n\in\mathbb{N}).$$

Acīmredzot, $f_n\in L_1([-1;+\infty))\cap L_2([-1;+\infty))$ $(n\in\mathbb{N})$, pie tam funkciju virkne (f_n) *konverģē pēc vidējā kvadrātiskā* uz nullfunkciju kopā $[a;+\infty)$, jo

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-\mathbb{O}\|_2=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\int\limits_0^n\frac{dx}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0,$$

taču funkciju virkne (f_n) *nekonverģē pēc vidējā* uz nullfunkciju $\mathbb{O}$ kopā $[a;+\infty)$, jo

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-\mathbb{O}\|_1=\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^n\frac{dx}{n}=\lim_{n\to\infty}1=1.$$

5.9. piezīme. No 5.3. teorēmas un 5.8. teorēmas 2. apgalvojuma izriet: ja E ir galīga mēra kopa un $(f_n)\xrightarrow{L_2(E)} f$, tad $(f_n)\overset{E}{\Rightarrow} f$. Izrādās, ka pēdējais apgalvojums ir patiess arī tad, ja E ir bezgalīga mēra kopa.

5.9. teorēma. *Ja $(f_n)\xrightarrow{L_2(E)} f$, tad $(f_n)\overset{E}{\Rightarrow} f$, t.i., ja funkciju virkne (f_n) konverģē pēc vidējā kvadrātiskā uz funkciju f kopā E, tad funkciju virkne (f_n) konverģē pēc mēra uz funkciju f kopā E.*

► Teorēmas pierādījums ir analoģisks 5.3. teorēmas pierādījumam. Pieņemsim, ka $(f_n)\xrightarrow{L_2(E)} f$, t.i., skaitļu virkne

$$\left(\int\limits_E\left[f_n(x)-f(x)\right]^2dx\right)\tag{5.21}$$

konverģē uz 0. Pierādīsim, ka $(f_n) \overset{E}{\Rightarrow} f$. Pieņemsim pretējo, ka virkne (f_n) nekonverģē pēc mēra uz funkciju f kopā E. Tad saskaņā ar konverģences pēc mēra definīciju eksistē $\varepsilon > 0$ un $\delta > 0$, kā arī augoša indeksu virkne

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots , \tag{5.22}$$

ka

$$\mathrm{m}\Big(E\Big[\big|f_n(x) - f(x)\big| \geq \varepsilon\Big]\Big) \geq \delta \tag{5.23}$$

jebkuram $n = n_1, n_2, \dots$. Apskatīsim kopas

$$E_k = E\Big[\big|f_{n_k}(x) - f(x)\big| \geq \varepsilon\Big] \ \ (k = 1, 2, \dots).$$

Tā kā $E \supset E_k$ $(k \in \mathbb{N})$, tad no 4.2. paragrāfa 6° īpašības izriet

$$\int\limits_E \big[f_{n_k}(x) - f(x)\big]^2 dx \geq \int\limits_{E_k} \big[f_{n_k}(x) - f(x)\big]^2 dx \ \ (k = 1, 2, \dots). \tag{5.24}$$

Tā kā

$$\forall x \in E_k : \ \big[f_{n_k}(x) - f(x)\big]^2 \geq \varepsilon^2 \ \ (k = 1, 2, \dots),$$

tad no 4.2. paragrāfa 5° īpašības, ņemot vērā formulu (5.23) un 4.3. piemēru, seko

$$\int\limits_{E_k} \big[f_{n_k}(x) - f(x)\big]^2 dx \geq \varepsilon^2 \, \mathrm{m}(E_k) \geq \delta\varepsilon^2 \ \ (k = 1, 2, \dots). \tag{5.25}$$

Pieņemsim, ka $\varepsilon_1 = \delta\varepsilon^2$. No (5.24) un (5.25) iegūsim

$$\int\limits_E \big[f_{n_k}(x) - f(x)\big]^2 dx \geq \varepsilon_1 \ \ (k = 1, 2, \dots). \tag{5.26}$$

Tātad eksistē tāds $\varepsilon_1 > 0$, ka visiem indeksiem (5.22) ir spēkā (5.26), t.i.,

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_E \big[f_{n_k}(x) - f(x)\big]^2 dx \neq 0,$$

kas ir pretrunā ar to, ka jebkura konverģentās virknes (5.21) apakšvirkne

$$\left(\int\limits_E \big[f_{n_k}(x) - f(x)\big]^2 dx\right)$$

ir konverģenta un tās robeža ir vienāda ar 0. No iegūtās pretrunas secinām, ka $(f_n) \overset{E}{\Rightarrow} f$.◀

Nākamā piezīme ir analoģiska 5.1. piezīmei.

5.10. piezīme. 5.9. teorēmas apgrieztā teorēma nav spēkā, jo *vispārīgā gadījumā no funkciju virknes konverģences pēc mēra (tātad arī no konverģences gandrīz visur un punktveida konverģences)* ***neizriet*** *šīs funkciju virknes konverģence pēc vidējā kvadrātiskā uz attiecīgo robežfunkciju apskatāmajā kopā.* Iepriekš teikto ilustrē

5.1. piezīmē aplūkotā virkne (f_n), jo, no vienas puses, $(f_n) \xrightarrow{(0;1)} \mathbb{O}$, t.i., virkne (f_n) *konverģē* uz nullfunkciju $\mathbb{O}$ kopā $(0;1)$, tātad arī $(f_n) \overset{(0;1)}{\Longrightarrow} \mathbb{O}$, t.i., virkne (f_n) *konverģē pēc mēra* uz nullfunkciju $\mathbb{O}$ kopā $(0;1)$. No otras puses, tā kā $f_n \in L_2\big((0;1)\big)$ $(n \in \mathbb{N})$, $\mathbb{O} \in L_2\big((0;1)\big)$ un

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - \mathbb{O}\|_2 = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\int\limits_0^{\frac{1}{n}} n^2 dx} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty,$$

tad virkne (f_n) *nekonverģē pēc vidējā kvadrātiskā* uz nullfunkciju $\mathbb{O}$ kopā $(0;1)$.

5.11. piezīme. *Vispārīgā gadījumā no funkciju virknes konverģences pēc vidējā kvadrātiskā* ***neizriet*** *šīs funkciju virknes konverģence gandrīz visur (atsevišķā gadījumā punktveida konverģence un vienmērīgā konverģence) apskatāmajā kopā uz attiecīgo robežfunkciju. Vēl jo vairāk, funkciju virkne var konverģēt pēc vidējā kvadrātiskā, bet tajā pašā laikā diverģēt katrā apskatāmās kopas punktā.* Šādas virknes piemēru kopas $E = [0;1]$ gadījumā sniedz virkne (f_n), kura tika apskatīta 2.4. piemērā. Tiešām, viegli pārliecināties, ka, no vienas puses, $(f_n) \xrightarrow{L_2([0;1])} \mathbb{O}$, bet, no otras puses, kā jau tika pierādīts minētajā piemērā, virkne (f_n) diverģē katrā kopas E punktā.

5.10. teorēma. *Ja* $\mathrm{m}(E) < +\infty$, $f_n \in L_2(E)$ $(n \in \mathbb{N})$, $f \in L_2(E)$ *un* $(f_n) \overset{E}{\rightrightarrows} f$, *tad* $(f_n) \xrightarrow{L_2(E)} f$, *t.i., ja funkciju no* $L_2(E)$ *virkne* (f_n) *vienmērīgi konverģē uz funkciju* $f \in L_2(E)$ *galīga mēra kopā* E, *tad funkciju virkne* (f_n) *konverģē pēc vidējā kvadrātiskā uz funkciju* f *kopā* E.

► Pieņemsim, ka $\mathrm{m}(E) < +\infty$ un $(f_n) \overset{E}{\rightrightarrows} f$, pie tam $f_n, f \in L_2(E)$ $(n \in \mathbb{N})$. Apskatīsim divus gadījumus.

Pieņemsim, ka $\mathrm{m}(E) = 0$. Ņemot vērā 4.1. piemēru, atrodam

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\int\limits_E \big|f_n(x) - f(x)\big|^2 dx} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0,$$

t.i., $(f_n) \xrightarrow{L_2(E)} f$.

Pieņemsim, ka $0 < \mathrm{m}(E) < +\infty$. Tā kā $(f_n) \overset{E}{\rightrightarrows} f$, tad jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds $n_0 \in \mathbb{N}$, ka visiem numuriem $n \geq n_0$ un katram $x \in E$ ir spēkā

$$\big|f_n(x) - f(x)\big| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot \sqrt{\mathrm{m}(E)}} \quad \text{jeb} \quad \big|f_n(x) - f(x)\big|^2 < \frac{\varepsilon^2}{4 \cdot \mathrm{m}(E)},$$

no kurienes, izmantojot 4.2. paragrāfa 5° īpašību, atrodam

$$\int\limits_E \big|f_n(x) - f(x)\big|^2 dx \leq \frac{\varepsilon^2}{4 \cdot \mathrm{m}(E)} \cdot \mathrm{m}(E) = \frac{\varepsilon^2}{4}$$

jeb

$$\|f_n - f\|_2 = \sqrt{\int\limits_E \left|f_n(x) - f(x)\right|^2 dx} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Tātad $(f_n) \xrightarrow{L_2(E)} f$.◀

5.12. piezīme.

- Ja $\mathrm{m}(E) = +\infty$, tad pēdējā teorēma nav spēkā, t.i., *ja* $\mathrm{m}(E) = +\infty$, *tad vispārīgā gadījumā no funkciju virknes vienmērīgās konverģences* ***neizriet*** *šīs funkciju virknes konverģence pēc vidējā kvadrātiskā apskatāmajā kopā uz attiecīgo robežfunkciju.* Ilustrēsim iepriekš teikto. Aplūkosim kopā $\mathbb{R}$ definētu funkciju virkni (f_n) (skat. 5.3. piezīmi). No vienas puses, $(f_n) \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} \mathbb{O}$, t.i., virkne (f_n) *vienmērīgi konverģē* uz nullfunkciju $\mathbb{O}$ kopā $\mathbb{R}$. No otras puses, tā kā $f_n \in L_2(\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N})$, $\mathbb{O} \in L_2(\mathbb{R})$ un

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - \mathbb{O}\|_2 = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\int\limits_{-n}^{n} \frac{dx}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2} = \sqrt{2},$$

  tad virkne (f_n) *nekonverģē pēc vidējā kvadrātiskā* uz nullfunkciju $\mathbb{O}$ kopā $\mathbb{R}$.
- Ņemot vērā 5.11. piezīmē teikto, *vispārīgā gadījumā no funkciju virknes konverģences pēc vidējā kvadrātiskā* ***neizriet*** *šīs funkciju virknes vienmērīgā konverģence apskatāmajā kopā uz attiecīgo robežfunkciju.*

5.11. teorēma. *$L_2(E)$ ir pilna prehilberta telpa, t.i., $L_2(E)$ ir Hilberta telpa.*

▶ Izmantosim 5.5. teorēmas pierādījuma shēmu. Lai pierādītu, ka $L_2(E)$ ir Hilberta telpa, ir jāpierāda, ka jebkura telpas $L_2(E)$ fundamentālvirkne konverģē šajā telpā uz kādu telpas $L_2(E)$ elementu.

Apskatīsim patvaļīgu pozitīvu skaitļu virkni (ε_k), ka rinda $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon_n$ konverģē. Pieņemsim, ka (f_n) ir fundamentālvirkne normētā telpā $L_2(E)$. Tad funkcijas f_n $(n \in \mathbb{N})$ ir mērojamas kopā E, bet to kvadrāti f_n^2 $(n \in \mathbb{N})$ ir summējamas kopā E, pie tam jebkuram $k \in \mathbb{N}$ eksistē tāds $n_k \in \mathbb{N}$, ka visiem numuriem $n, m \geq n_k$ ir spēkā

$$\|f_n - f_m\|_2 < \varepsilon_k. \tag{5.27}$$

Var redzēt, ka numurus n_k var izvēlēties tā, lai $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$. Tātad jebkuram $k \in \mathbb{N}$ ir spēkā

$$\left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_2 < \varepsilon_k. \tag{5.28}$$

Pieņemsim, ka E *ir galīga mēra kopa*. No (5.28), izmantojot 5.8. teorēmu un formulu (5.27), iegūsim, ka jebkuram $k \in \mathbb{N}$ ir spēkā

$$\left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_1 \leq \sqrt{\mathrm{m}(E)} \cdot \left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_2 \leq \sqrt{\mathrm{m}(E)} \cdot \varepsilon_k$$

jeb

$$\left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_1 \leq \sqrt{\mathrm{m}(E)} \cdot \varepsilon_k, \tag{5.29}$$

kur ar indeksiem 1 un 2 tiek apzīmētas funkcijas no $L_2(E)$ normas attiecīgi telpās $L_1(E)$ un $L_2(E)$ (atgādināsim, ka $L_2(E) \subset L_1(E)$, jo E ir galīga mēra kopa). Tā kā rinda $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon_n$ konverģē, tad rinda $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sqrt{\mathrm{m}(E)} \cdot \varepsilon_n$ arī konverģē. Tāpēc no (5.28), ņemot vērā rindu ar nenegatīviem locekļiem salīdzināšanas pazīmi, secinām, ka rinda

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\| f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \right\|_1 \quad \text{jeb} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_E \left| f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) \right| dx$$

arī konverģē. No 4.6. teorēmas izriet, ka rinda

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) \right|$$

konverģē gandrīz visiem $x \in E$, t.i., rinda

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) \right] \tag{5.30}$$

absolūti konverģē gandrīz visiem $x \in E$. Tātad rinda (5.30) konverģē gandrīz visiem $x \in E$.

Pieņemsim, ka E *ir bezgalīga mēra kopa.* Apskatīsim galīga mēra kopas

$$E_s = E \cap \{x : s - 1 \leq |x| < s\} \ \ (s \in \mathbb{N}).$$

Atzīmēsim, ka kopas E_s $(s \in \mathbb{N})$ savstarpēji nešķeļas, bet to apvienojums ir vienāds ar kopu E. Funkcijas $g \in L_2(E)$ sašaurinājumu kopā E_s apzīmēsim ar $g|_{E_s}$, t.i.,

$$\forall x \in E_s : g|_{E_s}(x) = g(x) \ \ (s \in \mathbb{N}).$$

Tā kā $g \in L_2(E)$, t.i., funkcija g ir mērojama kopā E, bet tās kvadrāts g^2 ir summējama funkcija kopā E, tad no mērojamu funkciju 3° īpašības seko, ka *funkcija* $g|_{E_s}$ *ir mērojama kopā* E_s $(s \in \mathbb{N})$, bet no 4.2. paragrāfa 6° īpašības izriet, ka *funkcija* $\left(g|_{E_s}\right)^2 = g^2|_{E_s}$ *ir summējama kopā* E_s $(s \in \mathbb{N})$, pie tam, ņemot vērā funkcijas sašaurinājuma īpašības, iegūsim

$$\int\limits_{E_s} \left(g|_{E_s}\right)^2(x)dx = \int\limits_{E_s} \left(g^2|_{E_s}\right)(x)dx = \int\limits_{E_s} g^2(x)dx \leq \int\limits_{E} g^2(x)dx \ \ (s \in \mathbb{N}),$$

no kurienes izriet

$$\left\| g|_{E_s} \right\|_2 = \sqrt{\int\limits_{E_s} \left(g|_{E_s}\right)^2(x)dx} \leq \sqrt{\int\limits_{E} g^2(x)dx} = \|g\|_2 \ \ (s \in \mathbb{N}), \tag{5.31}$$

kur norma telpā $L_2(E_s)$ $(s \in \mathbb{N})$ tiek apzīmēta tāpat kā norma telpā $L_2(E)$. Tātad $g|_{E_s} \in L_2(E_s)$ $(s \in \mathbb{N})$, pie tam izpildās nevienādība (5.31). Tā kā $(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) \in L_2(E)$ $(k \in \mathbb{N})$, jo $L_2(E)$ ir vektoru telpa, tad no (5.28) un (5.31), ņemot vērā funkcijas sašaurinājuma īpašības, seko, ka jebkuriem $n, s \in \mathbb{N}$ ir spēkā

$$\left\| \left(f_{n_{k+1}}|_{E_s}\right) - \left(f_{n_k}|_{E_s}\right) \right\|_2 = \left\| \left(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right)|_{E_s} \right\|_2 \leq \left\| f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \right\|_2 < \varepsilon_k$$

jeb

$$\left\|\left(f_{n_{k+1}}|_{E_s}\right) - \left(f_{n_k}|_{E_s}\right)\right\|_2 < \varepsilon_k.$$

Spriežot līdzīgi kā iepriekš, tikai šoreiz telpā $L_2(E_s)$ $(s \in \mathbb{N})$, iegūsim, ka rinda

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(f_{n_{k+1}}|_{E_s}\right)(x) - \left(f_{n_k}|_{E_s}\right)(x)\right]$$

konverģē gandrīz visiem $x \in E_s$ $(s \in \mathbb{N})$. Tā kā $\bigcup\limits_{s=1}^{\infty} E_s = E$, $E_s \cap E_t = \emptyset$ $(s \neq t;\ s, t \in \mathbb{N})$ un nulles mēra kopu sanumurējams apvienojums arī ir nulles mēra kopa, secinām, ka rinda (5.30) konverģē gandrīz visiem $x \in E$.

Tātad, neatkarīgi no tā, vai kopas E mērs ir galīgs vai bezgalīgs, rinda (5.30) konverģē gandrīz visiem $x \in E$. Atkārtojot 5.5. teorēmas pierādījumā veiktos spriedumus, iegūsim, ka eksistē kopā E mērojama funkcija f, ka $(f_{n_k}) \xrightarrow[\text{g.v.}]{E} f$.

Pierādīsim, ka $f \in L_2(E)$ un $(f_n) \xrightarrow{L_2(E)} f$. Tā kā (f_n) ir fundamentālvirkne telpā $L_2(E)$, tad jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds $N \in \mathbb{N}$, ka visiem numuriem $n, m \geq N$ ir spēkā

$$\|f_n - f_m\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.32}$$

Tā kā virkne (n_k) ir stingri augoša, tad eksistē tāds $K \in \mathbb{N}$, ka $n_k \geq N$ visiem $k \geq K$. No (5.32) seko, ka visiem $n \geq N$ un $k \geq K$ ir spēkā

$$\|f_n - f_{n_k}\|_2^2 = \int\limits_E \left[f_n(x) - f_{n_k}(x)\right]^2 dx < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2. \tag{5.33}$$

Tātad kopa

$$\left\{\int\limits_E \left[f_n(x) - f_{n_k}(x)\right]^2 dx : n \geq N,\ k \geq K\right\}$$

ir ierobežota no augšas ar konstanti $\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2$. Spriežot analoģiski kā 5.5. teorēmas pierādījumā, iegūsim, ka

$$\left(|f_n - f_{n_k}|\right) \xrightarrow[\text{g.v.}]{E} |f_n - f|,$$

ja $k \to \infty$, bet n ir fiksēts naturāls skaitlis. Tā kā funkcija φ, ka $\varphi(x) = x^2$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$, ir nepārtraukta, tad

$$\left([f_n - f_{n_k}]^2\right) \xrightarrow[\text{g.v.}]{E} [f_n - f]^2,$$

ja $k \to \infty$, bet n ir fiksēts naturāls skaitlis. Tāpēc arī

$$\left([f_n - f_{n_k}]^2\right)_{k=K}^{\infty} \xrightarrow[\text{g.v.}]{E} [f_n - f]^2,$$

kur $k \geq K$ un $k \to \infty$, bet n ir fiksēts naturāls skaitlis, ka $n \geq N$. No Fatu teorēmas izriet, ka funkcijas $[f_n - f]^2$ $(n \geq N)$ ir summējamas kopā E, pie tam, ņemot vērā (5.33), iegūsim

$$\int\limits_E \left[f_n(x) - f(x)\right]^2 dx \leq \sup_{\substack{n \geq N \\ k \geq K}} \int\limits_E \left[f_n(x) - f_{n_k}(x)\right]^2 dx \leq \frac{\varepsilon^2}{4} < \varepsilon^2 \quad (n \geq N),$$

no kurienes izriet

$$\|f_n - f\|_2 < \varepsilon \quad (n \geq N). \tag{5.34}$$

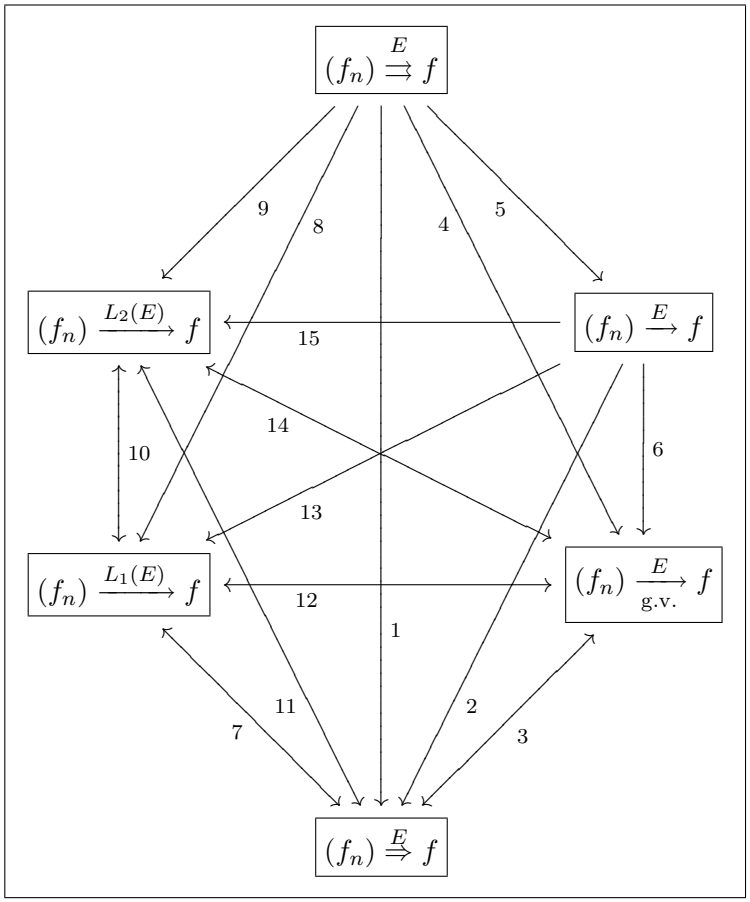
Tā kā funkcijas $[f_n - f]^2$ $(n \geq N)$ ir summējamas kopā E, bet funkcijas $f_n - f$ $(n \geq N)$ ir mērojamas kopā E, tad $(f_n - f) \in L_2(E)$ $(n \geq N)$. Saskaņā ar doto $f_n \in L_2(E)$ $(n \geq N)$. Tā kā $L_2(E)$ ir vektoru telpa, tad $f = f_n - (f_n - f) \in L_2(E)$, kur $n \geq N$. Tādējādi eksistē $f \in L_2(E)$, ka jebkuram $\varepsilon > 0$ var atrast $N \in \mathbb{N}$, ka visiem numuriem $n \geq N$ ir spēkā (5.34). Tas nozīmē, ka $(f_n) \xrightarrow{L_2(E)} f$.◀

Paragrāfa noslēgumā ir sniegta saistība (skat. 5.2., 5.3. un 5.4. zīmējumu) starp iepriekš apskatītajiem funkciju virkņu konverģences veidiem:

- konverģenci (punktveida konverģenci),
- konverģenci gandrīz visur,
- vienmērīgo konverģenci,
- konverģenci pēc mēra,
- konverģenci pēc vidējā,
- konverģenci pēc vidējā kvadrātiskā,

apskatot trīs gadījumus:

1. E ir nulles mēra kopa (5.2. zīmējums),
2. E ir galīga pozitīva mēra kopa (5.3. zīmējums),
3. E ir bezgalīga mēra kopa (5.4. zīmējums).



5.2. zīmējums. Shēmā ir apkopots 5.3., 5.4., 5.8., 5.9., 5.10. teorēmā, 2.8., 5.1., 5.2., 5.3., 5.7., 5.9., 5.10., 5.11., 5.12. piezīmē teiktais par saistību starp dažādiem funkciju virkņu konverģences veidiem ***nulles mēra kopā***, ņemot vērā 2.1. zīmējuma (a) shēmu.

- Apgalvojumi, kuri atbilst 1., 2. un 3. bultiņai, ir spēkā, ja f_n $(n \in \mathbb{N})$ ir mērojamas funkcijas kopā E (funkcijas f mērojamība izriet no Lebega teorēmas).
- Apgalvojumi, kuri atbilst 4., 5. un 6. bultiņai, ir spēkā, ja f_n $(n \in \mathbb{N})$ un f patvaļīgas funkcijas kopā E, pie tam kopai E ne obligāti ir jābūt mērojamai.
- Apgalvojumi, kuri atbilst 7., 8., 12. un 13. bultiņai, ir spēkā, ja funkcijas f_n $(n \in \mathbb{N})$ un f pieder telpai $L_1(E)$, t.i., šīs funkcijas ir summējamas kopā E.
- Apgalvojumi, kuri atbilst 9., 10., 11., 14. un 15. bultiņai, ir spēkā, ja funkcijas f_n $(n \in \mathbb{N})$ un f pieder telpai $L_2(E)$, t.i., šīs funkcijas ir mērojamas kopā E, bet to kvadrāti ir summējamas funkcijas kopā E.

Ņemot vērā iepriekš minētajās piezīmēs, kā arī 2.1. zīmējuma komentārā teikto, vispārīgā gadījumā shēmā nedrīkst pievienot nevienu citu divus "taisnstūrus" savienojošu bultiņu.

$$
\begin{tikzcd}
 & \boxed{(f_n) \overset{E}{\rightrightarrows} f} \arrow[dl, "9"'] \arrow[dl, shift right=6, "8"] \arrow[dr, shift left=6, "4"'] \arrow[dr, "5"] \arrow[dd, "1"] & \\
\boxed{(f_n) \xrightarrow{L_2(E)} f} \arrow[d, "10"'] \arrow[ddr, shift left=6, "11"] & & \boxed{(f_n) \xrightarrow{E} f} \arrow[d, "6"] \arrow[ddl, shift right=6, "2"'] \\
\boxed{(f_n) \xrightarrow{L_1(E)} f} \arrow[dr, "7"'] & & \boxed{(f_n) \xrightarrow[\text{g.v.}]{E} f} \arrow[dl, "3"] \\
 & \boxed{(f_n) \overset{E}{\rightrightarrows} f} &
\end{tikzcd}
$$

5.3. zīmējums. Shēmā ir apkopots 5.3., 5.4., 5.8., 5.9., 5.10. teorēmā, 5.1., 5.2., 5.3., 5.7., 5.9., 5.10., 5.11., 5.12. piezīmē teiktais par saistību starp dažādiem funkciju virkņu konverģences veidiem ***galīga pozitīva mēra kopā***, ņemot vērā 2.1. zīmējuma (b) shēmu.

- Apgalvojumi, kuri atbilst 1., 2. un 3. bultiņai, ir spēkā, ja f_n $(n \in \mathbb{N})$ ir mērojamas funkcijas kopā E (funkcijas f mērojamība izriet no Lebega teorēmas).
- Apgalvojumi, kuri atbilst 4., 5. un 6. bultiņai, ir spēkā, ja f_n $(n \in \mathbb{N})$ un f patvaļīgas funkcijas kopā E, pie tam kopai E ne obligāti ir jābūt mērojamai.
- Apgalvojumi, kuri atbilst 7. un 8. bultiņai, ir spēkā, ja funkcijas f_n $(n \in \mathbb{N})$ un f pieder telpai $L_1(E)$, t.i., šīs funkcijas ir summējamas kopā E.
- Apgalvojumi, kuri atbilst 9., 10. un 11. bultiņai, ir spēkā, ja funkcijas f_n $(n \in \mathbb{N})$ un f pieder telpai $L_2(E)$, t.i., šīs funkcijas ir mērojamas kopā E, bet to kvadrāti ir summējamas funkcijas kopā E.

Ņemot vērā iepriekš minētajās piezīmēs, kā arī 2.1. zīmējuma komentārā teikto, vispārīgā gadījumā shēmā nedrīkst pievienot nevienu citu divus "taisnstūrus" savienojošu bultiņu.

$$
\begin{tikzcd}
 & \boxed{(f_n) \overset{E}{\rightrightarrows} f} \arrow[dd, "1"] \arrow[dr, "5"] \arrow[ddr, "4"] & \\
\boxed{(f_n) \xrightarrow{L_2(E)} f} \arrow[ddr, "11"] & & \boxed{(f_n) \xrightarrow{E} f} \arrow[d, "6"] \\
 & & \boxed{(f_n) \xrightarrow[\text{g.v.}]{E} f} \\
\boxed{(f_n) \xrightarrow{L_1(E)} f} \arrow[dr, "7"] & & \\
 & \boxed{(f_n) \overset{E}{\rightrightarrows} f} &
\end{tikzcd}
$$

5.4. zīmējums. Shēmā ir apkopots 5.3., 5.9. teorēmā, 5.1., 5.2., 5.3., 5.8., 5.9., 5.10., 5.11., 5.12. piezīmē teiktais par saistību starp dažādiem funkciju virkņu konverģences veidiem ***bezgalīga mēra kopā***, ņemot vērā 2.1. zīmējuma (c) shēmu.

- Apgalvojums, kurš atbilst 1. bultiņai, ir spēkā, ja f_n $(n \in \mathbb{N})$ ir mērojamas funkcijas kopā E (funkcijas f mērojamība izriet no Lebega teorēmas).

- Apgalvojumi, kuri atbilst 4., 5. un 6. bultiņai, ir spēkā, ja f_n $(n \in \mathbb{N})$ un f patvaļīgas funkcijas kopā E, pie tam kopai E ne obligāti ir jābūt mērojamai.

- Apgalvojums, kurš atbilst 7. bultiņai, ir spēkā, ja funkcijas f_n $(n \in \mathbb{N})$ un f pieder telpai $L_1(E)$, t.i., šīs funkcijas ir summējamas kopā E.

- Apgalvojums, kurš atbilst 11. bultiņai, ir spēkā, ja funkcijas f_n $(n \in \mathbb{N})$ un f pieder telpai $L_2(E)$, t.i., šīs funkcijas ir mērojamas kopā E, bet to kvadrāti ir summējamas funkcijas kopā E.

Ņemot vērā iepriekš minētajās piezīmēs, kā arī 2.1. zīmējuma komentārā teikto, vispārīgā gadījumā shēmā nedrīkst pievienot nevienu citu divus "taisnstūrus" savienojošu bultiņu.

5.3. Uzdevumi

1. Pieņemsim, ka E ir galīga mēra kopa. Apskatīsim kopu $S(E)$, kas sastāv no visām mērojamām kopā E funkcijām. Bez tam uzskatīsim, ka kopā E ekvivalentas funkcijas reprezentē vienu un to pašu kopas $S(E)$ elementu.

   (a) Pierādīt, ka kopa $S(E)$ ir definēta korekti, t.i., ja $f \in S(E)$ un $f \overset{E}{\sim} f_1$, tad $f_1 \in S(E)$.

   (b) Pierādīt, ka formula
   $$\forall f, g \in S(E): \ \rho(f;g) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_E \frac{\big|f(x)-g(x)\big|}{1+\big|f(x)-g(x)\big|}dx$$
   korekti definē attēlojumu $\rho : S(E) \times S(E) \to \mathbb{R}$, t.i.,

   i. jebkuriem $f, g \in S(E)$ ir spēkā $\rho(f;g) \in \mathbb{R}$;

   ii. ja $f \overset{E}{\sim} f_1$ un $g \overset{E}{\sim} g_1$, kur $f, g, f_1, g_1 \in S(E)$, tad $\rho(f;g) = \rho(f_1;g_1)$.

   (c) Pierādīt, ka $\big(S(E);\rho\big)$ ir pilna metriska telpa.

   (d) Pierādīt, ka konverģence metriskā telpā $\big(S(E);\rho\big)$ ir ekvivalenta konverģencei kopā E pēc mēra.

2. Apskatīsim kopu $L_p(E)$, kur $p \geq 1$, kas sastāv no visām kopā E mērojamām funkcijām f, ka $|f|^p$ ir kopā E summējama funkcija. Bez tam uzskatīsim, ka kopā E ekvivalentas funkcijas reprezentē vienu un to pašu kopas $L_p(E)$ elementu.

   (a) Pierādīt, ka kopa $L_p(E)$ ir definēta korekti, t.i., ja $f \in L_p(E)$ un $f \overset{E}{\sim} f_1$, tad $f_1 \in L_p(E)$.

   (b) Pierādīt, ka kopa $L_p(E)$ ir reāla vektoru telpa attiecībā pret dabiskajām funkciju saskaitīšanas un reizināšanas ar reāliem skaitļiem operācijām, vispirms pārliecinoties, ka šīs operācijas ir korekti definētas kopā $L_p(E)$, t.i., jebkuriem $f, g \in L_p(E)$ un patvaļīgam $\alpha \in \mathbb{R}$ no $f \overset{E}{\sim} f_1$ un $g \overset{E}{\sim} g_1$ seko, ka $f+g \overset{E}{\sim} f_1+g_1$ un $\alpha f \overset{E}{\sim} \alpha f_1$.

   (c) Pierādīt, ka formula
   $$\forall f \in L_p(E): \ \|f\|_p \overset{\text{def}}{=} \left(\int\limits_E \big|f(x)\big|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$
   korekti definē attēlojumu $\|\cdot\|_p : L_p(E) \to \mathbb{R}$, t.i.,

   i. jebkuram $f \in L_p(E)$ ir spēkā $\|f\|_p \in \mathbb{R}$;

   ii. ja $f \overset{E}{\sim} f_1$, kur $f, f_1 \in L_p(E)$, tad $\|f\|_p = \|f_1\|_p$.

   (d) Pieņemsim, ka $p, q > 1$ un $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pierādīt, ka, ja $f \in L_p(E)$ un $g \in L_q(E)$, tad $fg \in L_1(E)$, pie tam ir spēkā **Heldera**[2] **nevienādība** $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$.

   (e) Pierādīt, ka, ja $f, g \in L_p(E)$, tad $f+g \in L_p(E)$, pie tam ir spēkā **Minkovska**[3] **nevienādība** $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

[2] O. Helders (*Otto Ludwig Hölder*, 1859-1937) - vācu matemātiķis.
[3] H. Minkovskis (*Hermann Minkowski*, 1864-1909) - vācu matemātiķis.

(f) Pierādīt, ka $\big(L_p(E); \|\cdot\|_p\big)$ ir normēta telpa.

(g) Pierādīt, ka $\big(L_p(E); \|\cdot\|_p\big)$ ir pilna normēta telpa, t.i., $\big(L_p(E); \|\cdot\|_p\big)$ ir Banaha telpa.

(h) Pieņemsim, ka $\mathrm{m}(E) < +\infty$. Pierādīt, ka, ja $1 \le p < q$, tad $L_q(E) \subset L_p(E)$, pie tam

$$\forall f \in L_q(E): \ \|f\|_p \le \big[\mathrm{m}(E)\big]^{\frac{q-p}{qp}} \|f\|_q .$$

(i) Pieņemsim, ka $f \in L_p(E)$ un $f_n \in L_p(E)$ $(n \in \mathbb{N})$. Saka, ka **funkciju virkne** (f_n) **konverģē pēc** p**-tās kārtas vidējā uz funkciju** f **kopā** E, ja funkciju virkne (f_n) konverģē uz funkciju f normētā telpā $L_p(E)$. Raksta: $(f_n) \xrightarrow{L_p(E)} f$. Pierādīt:

i. ja $(f_n) \xrightarrow{L_p(E)} f$, tad $(f_n) \overset{E}{\Rightarrow} f$;

ii. ja $\mathrm{m}(E) < +\infty$, $f_n \in L_p(E)$ $(n \in \mathbb{N})$, $f \in L_p(E)$ un $(f_n) \overset{E}{\rightrightarrows} f$, tad $(f_n) \xrightarrow{L_p(E)} f$;

iii. ja $\mathrm{m}(E) < +\infty$ un $(f_n) \xrightarrow{L_q(E)} f$, tad $(f_n) \xrightarrow{L_p(E)} f$, kur $p, q > 1$ un $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

3. (a) Pierādīt, ka telpā $L_2(E)$ ir spēkā **paralelograma likums**:

$$\forall f, g \in L_2(E): \ \|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2$$

jeb

$$\forall f, g \in L_2(E): \ \int\limits_E (f+g)^2(x)dx + \int\limits_E (f-g)^2(x)dx = 2\int\limits_E f^2(x)dx + 2\int\limits_E g^2(x)dx.$$

(b) Pierādīt, ka telpā $L_p(E)$, kur $p \ge 1$ un $p \ne 2$, paralelograma likums nav spēkā.

(c) Pierādīt, ka telpā $L_p(E)$, kur $p \ge 1$ un $p \ne 2$, neeksistē skalārais reizinājums, kas inducētu iepriekšējā uzdevumā apskatīto normu $\|\cdot\|$.

6. nodaļa

PIELIKUMS

6.1. Infīms un suprēms

Ar dotā paragrāfa materiālu detalizētāk var iepazīties, piemēram, pēc [2].

6.1.1. Reālu skaitļu intervāli

Kopas $\mathbb{R}$ šādas apakškopas sauc par **intervāliem**:

1) $(a;b) = \{x : \ x \in \mathbb{R}, \ a < x < b\}$ - **vaļējs intervāls ar sākumpunktu** a **un beigupunktu** b,

2) $[a;b] = \{x : \ x \in \mathbb{R}, \ a \leq x \leq b\}$ - **slēgts intervāls (jeb nogrieznis) ar sākumpunktu** a **un beigupunktu** b,

3) $(a;b] = \{x : \ x \in \mathbb{R}, \ a < x \leq b\}$ - **pusvaļējs no kreisās puses intervāls ar sākumpunktu** a **un beigupunktu** b,

4) $[a;b) = \{x : \ x \in \mathbb{R}, \ a \leq x < b\}$ - **pusvaļējs no labās puses intervāls ar sākumpunktu** a **un beigupunktu** b,

5) $(-\infty;a) = \{x : \ x \in \mathbb{R}, \ x < a\}$ - **kreisais vaļējais stars ar sākumpunktu** a,

6) $(a;+\infty) = \{x : \ x \in \mathbb{R}, \ x > a\}$ - **labais vaļējais stars ar sākumpunktu** a,

7) $(-\infty;a] = \{x : \ x \in \mathbb{R}, \ x \leq a\}$ - **kreisais slēgtais stars ar sākumpunktu** a,

8) $[a;+\infty) = \{x : \ x \in \mathbb{R}, \ x \geq a\}$ - **labais slēgtais stars ar sākumpunktu** a,

9) $(-\infty;+\infty) = \mathbb{R}$ - **skaitļu taisne**.

Intervālus 1)-4) sauc par **ierobežotiem intervāliem**, bet 5)-9) - **neierobežotiem intervāliem**. Intervālus 1)-9) apzīmē ar $\langle a;b\rangle$, uzskatot, ka a un b ir reāli skaitļi vai simboli $\pm\infty$ atkarībā no intervāla veida. Ja $\langle a;b\rangle$ - ierobežots intervāls, tad skaitli a sauc par **intervāla** $\langle a;b\rangle$ **sākumpunktu**, b - **beigupunktu**, a un b - **galapunktiem**, $\frac{a+b}{2}$ - **viduspunktu**, $b-a$ - **garumu**. Ierobežota intervāla $\langle a;b\rangle$ garumu apzīmē ar $|\langle a;b\rangle|$, t.i., $|\langle a;b\rangle| = b-a \geq 0$.

Ierobežotus intervālus, kuriem $a = b$, sauc par **deģenerētiem intervāliem**. Deģenerēti intervāli ir $(a;a) = \emptyset$, $[a;a) = \emptyset$, $(a;a] = \emptyset$ un $[a;a] = \{a\}$, kur $a \in \mathbb{R}$. Deģenerēta intervāla $\langle a;b\rangle$ garums $|\langle a;b\rangle| = b-a = 0$. Savukārt ierobežotus intervālus $\langle a;b\rangle$, kuriem $a < b$, un neierobežotus intervālus 5)-9) sauc par **nedeģenerētiem intervāliem**. Ierobežota nedeģenerēta intervāla $\langle a;b\rangle$ garums $|\langle a;b\rangle| = b-a > 0$.

6.1.2. Paplašinātā reālo skaitļu kopa

Par **paplašināto reālo skaitļu kopu** $\widetilde{\mathbb{R}}$ sauc reālo skaitļu kopu $\mathbb{R}$, kura ir papildināta ar simboliem $+\infty$ un $-\infty$, t.i.,

$$\widetilde{\mathbb{R}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}.$$

Uzskata, ka $-\infty < +\infty$ un $-\infty < a < +\infty$ jebkuram $a \in \mathbb{R}$. Reālos skaitļus sauc par kopas $\widetilde{\mathbb{R}}$ sauc par kopas $\widetilde{\mathbb{R}}$ **galīgiem elementiem**, bet simbolus $-\infty$ un $+\infty$ sauc par **kopas $\widetilde{\mathbb{R}}$ bezgalīgiem elementiem**.

Reālo skaitļu saskaitīšanas, atņemšanas, reizināšanas un dalīšanas operācijas var *daļēji* turpināt paplašinātajā reālo skaitļu kopā $\widetilde{\mathbb{R}}$ ar šādām formulām (visās zemāk minētajās formulās $a \in \mathbb{R}$):

$$\begin{gathered}
a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty; \\
a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty; \\
(+\infty) + (+\infty) = (+\infty) - (-\infty) = +\infty; \\
(-\infty) - (+\infty) = (-\infty) + (-\infty) = -\infty; \\
(+\infty)(+\infty) = (-\infty)(-\infty) = +\infty; \\
(+\infty)(-\infty) = (-\infty)(+\infty) = -\infty; \\
a(+\infty) = (+\infty)a = \begin{cases} +\infty, & \text{ja} \quad a > 0, \\ -\infty, & \text{ja} \quad a < 0, \\ 0, & \text{ja} \quad a = 0; \end{cases} \qquad a(-\infty) = (-\infty)a = \begin{cases} -\infty, & \text{ja} \quad a > 0, \\ +\infty, & \text{ja} \quad a < 0, \\ 0, & \text{ja} \quad a = 0; \end{cases} \\
\frac{\pm\infty}{a} = (\pm\infty)\frac{1}{a}\ (a \neq 0); \ \frac{a}{\pm\infty} = 0; \ |+\infty| = |-\infty| = +\infty.
\end{gathered}$$

Nedefinētas ir šādas operācijas:

$$\begin{gathered}
(-\infty) - (-\infty),\ (+\infty) - (+\infty),\ (+\infty) + (-\infty),\ (-\infty) + (+\infty), \\
\frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ \frac{\pm\infty}{0},\ \frac{a}{0}.
\end{gathered}$$

6.1.3. Kopas $E \subset \mathbb{R}$ infīms un suprēms kopā $\mathbb{R}$

Elementu $a \in \mathbb{R}$ sauc par kopas $E \subset \mathbb{R}$ **vismazāko elementu** vai **minimumu**, ja

$$a \in E \ \text{ un } \ \forall x \in E : x \geq a.$$

Elementu $b \in \mathbb{R}$ sauc par kopas $E \subset \mathbb{R}$ **vislielāko elementu** vai **maksimumu**, ja

$$b \in E \ \text{ un } \ \forall x \in E : x \leq b.$$

- Ne katrai kopai $E \subset \mathbb{R}$ eksistē minimums (maksimums), piemēram, tukšajai kopai $\emptyset$ un visu reālo skaitļu kopai $\mathbb{R}$ neeksistē ne minimums, ne maksimums. Taču, ja kopai $E \subset \mathbb{R}$ eksistē minimums (maksimums), tad tas ir noteikts viennozīmīgi.

- Kopas $E \subset \mathbb{R}$ minimums (maksimums), ja tas eksistē, vienmēr pieder kopai E!

Elementu $a \in \mathbb{R}$ sauc par kopas $E \subset \mathbb{R}$ **apakšējo robežu** vai **minoranti**, ja

$$\forall x \in E : x \geq a.$$

Elementu $b \in \mathbb{R}$ sauc par kopas $E \subset \mathbb{R}$ **augšējo robežu** vai **mažoranti**, ja

$$\forall x \in E : x \leq b.$$

Kopu $E \subset \mathbb{R}$ sauc par **ierobežotu no apakšas** (**ierobežotu no augšas**), ja tai eksistē vismaz viena minorante (mažorante). Kopu $E \subset \mathbb{R}$ sauc par **ierobežotu**, ja tai eksistē vismaz viena minorante un vismaz viena mažorante.

- Kopa $E \subset \mathbb{R}$ ir ierobežota tad un tikai tad, kad

$$\exists M > 0 \, \forall x \in E : |x| \leq M.$$

Elementu $\alpha \in \mathbb{R}$ sauc par kopas $E \subset \mathbb{R}$ **apakšējo slieksni** vai **infīmu** un apzīmē ar $\inf E$, ja α ir vislielākā kopas E minorante (t.i., α ir visu kopas E minoranšu kopas maksimums).

Elementu $\beta \in \mathbb{R}$ sauc par kopas $E \subset \mathbb{R}$ **augšējo slieksni** vai **suprēmu** un apzīmē ar $\sup E$, ja β ir vismazākā kopas E mažorante (t.i., β ir visu kopas E mažoranšu kopas minimums).

- Kopas $E \subset \mathbb{R}$ infīms (suprēms), ja tas eksistē, var piederēt kopai E, bet var arī tai nepiederēt.
- Kopas $E \subset \mathbb{R}$ minimums (maksimums), ja tas eksistē, ir kopas E infīms (suprēms).
- Kopas $E \subset \mathbb{R}$ infīms (suprēms), ja tas eksistē, ir kopas E minimums (maksimums) tad un tikai tad, kad tas pieder kopai E.
- Ne katrai kopai $E \subset \mathbb{R}$ eksistē infīms (suprēms), piemēram, tukšajai kopai $\emptyset$ neeksistē ne infīms, ne suprēms, jo kopas $\emptyset$ visu minoranšu (mažoranšu) kopa ir vienāda ar $\mathbb{R}$, bet kopai $\mathbb{R}$ neeksistē minimums (maksimums). Taču, ja kopai $E \subset \mathbb{R}$ eksistē infīms (suprēms), tad tas ir noteikts viennozīmīgi.
- Ja kopa $E \subset \mathbb{R}$ ir neierobežota no apakšas (augšas), tad kopai E neeksistē infīms (suprēms), jo kopas E visu minoranšu (mažoranšu) kopa ir vienāda ar $\emptyset$, bet kopai $\emptyset$ neeksistē minimums (maksimums). Piemēram, tā kā visu reālo skaitļu kopa $\mathbb{R}$ ir neierobežota gan no apakšas, gan no augšas, tad kopai $\mathbb{R}$ neeksistē ne infīms, ne suprēms.
- Lai kopai $E \subset \mathbb{R}$ eksistētu infīms (suprēms), ir nepieciešami, lai kopa E būtu netukša un ierobežota no apakšas (augšas).

Pieņemsim, ka $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{R}$. Kopu saimi $\{\mathcal{A}; \mathcal{B}\}$ sauc par **šķēlumu kopā** $\mathbb{R}$ un apzīmē ar $(\mathcal{A}; \mathcal{B})$, ja

1. $\mathcal{A} \neq \emptyset, \ \mathcal{B} \neq \emptyset$;
2. $\forall a \in \mathcal{A} \, \forall b \in \mathcal{B} : a \leq b$.

Kopas $\mathcal{A}$ un $\mathcal{B}$ sauc par **šķēluma** $(\mathcal{A};\mathcal{B})$ **attiecīgi apakšējo un augšējo klasi**. Skaitli $c \in \mathbb{R}$ sauc par **šķēluma** $(\mathcal{A};\mathcal{B})$ **atdalītājskaitli**, ja

$$\forall a \in \mathcal{A}\ \forall b \in \mathcal{B} : a \leq c \leq b.$$

Reālo skaitļu teorijā pieņem, ka izpildās

Nepārtrauktība aksioma: *jebkuram šķēlumam kopā* $\mathbb{R}$ *eksistē vismaz viens tā atdalītājskaitlis.*

Izmantojot šo aksiomu, var pierādīt, ka iepriekš minētie infīma (suprēma) eksistences nepieciešamie nosacījumi ir arī pietiekami.

- Kopai $E \subset \mathbb{R}$ eksistē infīms (suprēms) tad un tikai tad, kad kopa E ir netukša un ierobežota no apakšas (augšas).
- Kopai $E \subset \mathbb{R}$ vienlaicīgi eksistē infīms un suprēms tad un tikai tad, kad kopa E ir netukša un ierobežota.

Ir spēkā šādas infīma un suprēma īpašības.

- **Atdalītājnogriežņa princips:** ja $(\mathcal{A};\mathcal{B})$ ir šķēlums kopā $\mathbb{R}$, tad
  1. eksistē $\sup \mathcal{A}$ un $\inf \mathcal{B}$, pie tam $\sup \mathcal{A} \leq \inf \mathcal{B}$;
  2. skaitlis $c \in \mathbb{R}$ ir šķēluma $(\mathcal{A};\mathcal{B})$ atdalītājskaitlis tad un tikai tad, kad $c \in [\sup \mathcal{A}; \inf \mathcal{B}]$;
  3. šķēlumam $(\mathcal{A};\mathcal{B})$ eksistē vienīgs atdalītājskaitlis (t.i., $c = \sup \mathcal{A} = \inf \mathcal{B}$) tad un tikai tad, kad jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē $a \in \mathcal{A}$ un $b \in \mathcal{B}$, ka $b - a < \varepsilon$.
- Ja kopai $E \subset \mathbb{R}$ eksistē infīms un suprēms, tad $\inf E \leq \sup E$.
- Ja $E_1 \subset E_2$ un kopām E_1 un E_2 eksistē infīms (suprēms), tad

$$\inf E_1 \geq \inf E_2\ (\sup E_1 \leq \sup E_2).$$

- Šādi apgalvojumi ir ekvivalenti:
  1. $\alpha = \inf E$ (saskaņā ar definīciju tas nozīmē, ka α ir kopas E minorante un $\alpha \geq a$, kur a ir patvaļīga kopas E minorante);
  2. α ir kopas E minorante un jebkuram $\alpha' \in \mathbb{R}$, ka $\alpha' > \alpha$, eksistē $x \in E$, ka $x < \alpha'$;
  3. α ir kopas E minorante un jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē $x \in E$, ka $x < \alpha + \varepsilon$;
  4. α ir vismazākais kopas E kontaktpunkts (skat. 6.2.1. apakšparagrāfu).
- Šādi apgalvojumi ir ekvivalenti:
  1. $\beta = \sup E$ (saskaņā ar definīciju tas nozīmē, ka β ir kopas E mažorante un $\beta \leq b$, kur b ir patvaļīga kopas E mažorante);
  2. β ir kopas E mažorante un jebkuram $\beta' \in \mathbb{R}$, ka $\beta' < \beta$, eksistē $x \in E$, ka $x > \beta'$;
  3. β ir kopas E mažorante un jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē $x \in E$, ka $x > \beta - \varepsilon$;
  4. β ir vislielākais kopas E kontaktpunkts (skat. 6.2.1. apakšparagrāfu).

Pieņemsim, ka $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}$. Par **kopu E_1 un E_2 aritmētisko summu** sauc kopu

$$E_1 + E_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{x_1 + x_2 : x_1 \in E_1,\ x_2 \in E_2\}.$$

- Ja kopām E_1 un E_2 eksistē infīms (suprēms), tad

$$\inf(E_1 + E_2) = \inf E_1 + \inf E_2 \ \ \big(\sup(E_1 + E_2) = \sup E_1 + \sup E_2\big).$$

Pieņemsim, ka $E \subset \mathbb{R}$, bet $\lambda \in \mathbb{R}$. Par **kopas E reizinājumu ar skaitli λ** sauc kopu

$$\lambda E \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda x : x \in E\}.$$

- Ja kopai $E \subset \mathbb{R}$ eksistē infīms (suprēms) un λ ir nenegatīvs skaitlis, tad arī kopai λE eksistē infīms (suprēms), pie tam

$$\inf(\lambda E) = \lambda \inf E \ \ \big(\sup(\lambda E) = \lambda \sup E\big).$$

- Ja kopai $E \subset \mathbb{R}$ eksistē infīms (suprēms) un λ ir negatīvs skaitlis, tad kopai λE eksistē suprēms (infīms), pie tam

$$\sup(\lambda E) = \lambda \inf E \ \ \big(\inf(\lambda E) = \lambda \sup E\big).$$

- Ja kopai $E \subset \mathbb{R}$ eksistē infīms un suprēms, bet λ ir reāls skaitlis, tad kopai λE arī eksistē infīms un suprēms, pie tam

$$\inf(\lambda E) = \begin{cases} \lambda \inf E, & \text{ja} \quad \lambda \geq 0, \\ \lambda \sup E, & \text{ja} \quad \lambda < 0; \end{cases} \qquad \sup(\lambda E) = \begin{cases} \lambda \sup E, & \text{ja} \quad \lambda \geq 0, \\ \lambda \inf E, & \text{ja} \quad \lambda < 0. \end{cases}$$

Pieņemsim, ka $E \subset X \subset \mathbb{R}$. Funkciju $f : X \to \mathbb{R}$ sauc par **ierobežotu no apakšas (ierobežotu no augšas) kopā** E, ja kopas E attēls attēlojumā f, t.i., kopa

$$f(E) = \{f(x) : x \in E\} \subset \mathbb{R},$$

ir ierobežota no apakšas (ierobežota no augšas), t.i.,

$$\exists m \in \mathbb{R}\, \forall x \in E :\ m \leq f(x) \quad \big(\exists M \in \mathbb{R}\, \forall x \in E :\ f(x) \leq M\big).$$

Funkciju $f : X \to \mathbb{R}$ sauc par **ierobežotu kopā** $E \subset X$, ja tā šajā kopā ir ierobežota gan no apakšas, gan no augšas, t.i.,

$$\exists m \in \mathbb{R}\, \exists M \in \mathbb{R}\, \forall x \in E :\ m \leq f(x) \leq M.$$

- Funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ ir ierobežota kopā $E \subset X$ tad un tikai tad, kad

$$\exists K > 0\, \forall x \in E :\ \big|f(x)\big| \leq K.$$

Par **funkcijas $f : X \to \mathbb{R}$ infīmu (suprēmu) kopā** $E \subset X$ sauc kopas E attēla $f(E)$ infīmu (suprēmu) un apzīmē to ar

$$\inf_E f \ \ \left(\sup_E f\right) \quad \text{vai} \quad \inf_{x \in E} f(x) \ \ \left(\sup_{x \in E} f(x)\right).$$

Tātad

$$\inf_E f \stackrel{\text{def}}{=} \inf f(E), \quad \sup_E f \stackrel{\text{def}}{=} \sup f(E).$$

Ja $E = X$, tad piebildi "kopā E" parasti izlaiž, piemēram, "funkcijas $f : X \to \mathbb{R}$ infīms kopā X" vietā saka "funkcijas $f : X \to \mathbb{R}$ infīms".

Ir spēkā šādas funkciju infīma un suprēma īpašības.

- Funkcijai $f : X \to \mathbb{R}$ eksistē infīms (suprēms) kopā $E \subset X$ tad un tikai tad, kad
  1. E ir netukša kopa;
  2. funkcija f ir ierobežota no apakšas (ierobežota no augšas) kopā $E \subset X$.
- Ja funkcijai $f : X \to \mathbb{R}$ eksistē infīms un suprēms kopā $E \subset X$, tad
$$\inf_E f \le \sup_E f.$$
- Ja funkcijai $f : X \to \mathbb{R}$ eksistē infīms (suprēms) kopā $E \subset X$, tad funkcijai $f : X \to \mathbb{R}$ eksistē infīms (suprēms) arī jebkurā netukšā apakškopā $F \subset E$, pie tam
$$\inf_F f \ge \inf_E f \qquad \left(\sup_F f \le \sup_E f\right).$$
- Ja funkcijām $f : X \to \mathbb{R}$ un $g : X \to \mathbb{R}$ eksistē infīms (suprēms) kopā $E \subset X$, tad funkcijai $f + g$ arī eksistē infīms (suprēms) kopā E, pie tam
$$\inf_E (f+g) \ge \inf_E f + \inf_E g \qquad \left(\sup_E (f+g) \le \sup_E f + \inf_E g\right).$$
- Ja funkcijai $f : X \to \mathbb{R}$ un eksistē infīms (suprēms) kopā $E \subset X$ un λ ir patvaļīgs nenegatīvs skaitlis, tad funkcijai λf arī eksistē infīms (suprēms) kopā E, pie tam
$$\inf_E (\lambda f) = \lambda \inf_E f \qquad \left(\sup_E (\lambda f) = \lambda \sup_E f\right).$$
- Ja funkcijai $f : X \to \mathbb{R}$ un eksistē infīms (suprēms) kopā $E \subset X$ un λ ir patvaļīgs negatīvs skaitlis, tad funkcijai λf arī eksistē suprēms (infīms) kopā E, pie tam
$$\inf_E (\lambda f) = \lambda \sup_E f \qquad \left(\sup_E (\lambda f) = \lambda \inf_E f\right).$$
- Ja funkcijai $f : X \to \mathbb{R}$ eksistē infīms un suprēms kopā $E \subset X$, bet λ ir patvaļīgs reāls skaitlis, tad funkcijai λf arī eksistē infīms un suprēms kopā E, pie tam
$$\inf_E (\lambda f) = \begin{cases} \lambda \inf\limits_E f, & \text{ja} \quad \lambda \ge 0, \\ \lambda \sup\limits_E f, & \text{ja} \quad \lambda < 0; \end{cases} \qquad \sup_E (\lambda f) = \begin{cases} \lambda \sup\limits_E f, & \text{ja} \quad \lambda \ge 0, \\ \lambda \inf\limits_E f, & \text{ja} \quad \lambda < 0. \end{cases}$$
- Ja funkcijām $f : X \to \mathbb{R}$ un $g : X \to \mathbb{R}$ eksistē infīms (suprēms) kopā $E \subset X$, pie tam $f(x) \le g(x)$ jebkuram $x \in E$, tad
$$\inf_E f \le \inf_E g \qquad \left(\sup_E f \le \sup_E g\right).$$
- Ja funkcijai $f : X \to \mathbb{R}$ eksistē infīms un suprēms kopā $E \subset X$, tad
$$\sup_{x\in E} f(x) - \inf_{x\in E} f(x) = \sup_{x',x''\in E} \big(f(x') - f(x'')\big) = \sup_{x',x''\in E} \big|f(x') - f(x'')\big| \ge$$
$$\ge \sup_{x',x''\in E} \Big|\big|f(x')\big| - \big|f(x'')\big|\Big| = \sup_{x',x''\in E} \Big(\big|f(x')\big| - \big|f(x'')\big|\Big) = \sup_{x\in E} \big|f(x)\big| - \inf_{x\in E} \big|f(x)\big|.$$

6.1.4. Kopas $E \subset \mathbb{R}$ infīms un suprēms kopā $\widetilde{\mathbb{R}}$

Jebkuru kopu $E \subset \mathbb{R}$ var aplūkot arī kā paplašinātās reālo skaitļu kopas $\widetilde{\mathbb{R}}$ apakškopu. Šajā gadījumā kopai $E \subset \mathbb{R}$ vienmēr eksistē bezgalīga minorante $-\infty$ un bezgalīga mažorante $+\infty$, jo jebkuram $x \in \mathbb{R}$ ir spēkā $-\infty < x < +\infty$. Vēl jo vairāk, *ja kopu $E \subset \mathbb{R}$ uzlūkot kā paplašinātās reālo skaitļu kopas $\widetilde{\mathbb{R}}$ apakškopu, tad kopai $E \subset \mathbb{R}$ vienmēr eksistē infīms un suprēms:*

1. ja $E = \emptyset$, tad $\inf E = +\infty$ un $\sup E = -\infty$;

2. ja $E \neq \emptyset$ un kopa E ir ierobežota no apakšas (t.i., kopai E eksistē vismaz viena galīga minorante), tad kopai E eksistē galīgs infīms, t.i., $\inf E \in \mathbb{R}$;

3. ja $E \neq \emptyset$ un kopa E nav ierobežota no apakšas (t.i., kopai E neeksistē neviena galīga minorante), tad kopai E eksistē bezgalīgs infīms $-\infty$, t.i., $\inf E = -\infty$;

4. ja $E \neq \emptyset$ un kopa E ir ierobežota no augšas (t.i., kopai E eksistē vismaz viena galīga mažorante), tad kopai E eksistē galīgs suprēms, t.i., $\sup E \in \mathbb{R}$;

5. ja $E \neq \emptyset$ un kopa E nav ierobežota no augšas (t.i., kopai E neeksistē neviena galīga mažorante), tad kopai E eksistē bezgalīgs suprēms $+\infty$, t.i., $\sup E = +\infty$.

Tātad tukšā kopa $\emptyset$ ir vienīgā kopas $\mathbb{R}$ apakškopa, kuras infīms ir lielāks par tās suprēmu. Visām pārējām kopas $\mathbb{R}$ apakškopām E (t.i., $E \subset \mathbb{R}$ un $E \neq \emptyset$) ir spēkā $\inf E \leq \sup E$.

Saskaņā ar iepriekšējā apakšparagrāfā teikto ne katrai funkcijai $f : X \to \mathbb{R}$ eksistē infīms (suprēms) kopā $E \subset X$. Taču, *ja funkcijas $f : X \to \mathbb{R}$ infīmu (suprēmu) kopā $E \subset X$ definēt kā kopas $f(E) \subset \mathbb{R}$ infīmu (suprēmu) kopā $\widetilde{\mathbb{R}}$, tad jebkurai funkcijai $f : X \to \mathbb{R}$ eksistē infīms (suprēms) patvaļīgā kopā $E \subset X$*:

1. ja $E = \emptyset$, tad $\inf\limits_E f = +\infty$, $\sup\limits_E f = -\infty$;

2. ja $E \neq \emptyset$ un funkcija f ir ierobežota no apakšas kopā E (t.i., kopai $f(E)$ eksistē vismaz viena galīga minorante), tad $\inf\limits_E f \in \mathbb{R}$;

3. ja $E \neq \emptyset$ un funkcija f nav ierobežota no apakšas kopā E (t.i., kopai $f(E)$ neeksistē neviena galīga minorante), tad $\inf\limits_E f = -\infty$;

4. ja $E \neq \emptyset$ un funkcija f ir ierobežota no augšas kopā E (t.i., kopai $f(E)$ eksistē vismaz viena galīga mažorante), tad $\sup\limits_E f \in \mathbb{R}$;

5. ja $E \neq \emptyset$ un funkcija f nav ierobežota no augšas kopā E (t.i., kopai $f(E)$ neeksistē neviena galīga mažorante), tad $\sup\limits_E f = +\infty$.

Tātad, ja funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ ir ierobežota netukšā kopā $E \subset X$, tad tās infīms un suprēms ir galīgi.

6.1.5. Kopas $E \subset \widetilde{\mathbb{R}}$ infīms un suprēms kopā $\widetilde{\mathbb{R}}$

Jebkurai kopai $E \subset \widetilde{\mathbb{R}}$ eksistē infīms un suprēms:

1. ja $-\infty \in E$ un $+\infty \in E$, tad $\inf E = -\infty$ un $\sup E = +\infty$;
2. pieņemsim, ka $-\infty \in E$ un $+\infty \notin E$;
   (a) ja kopa E nesatur galīgus elementus, t.i., $E = \{-\infty\}$, tad $\sup E = -\infty$;
   (b) ja kopa E satur galīgus elementus un kopai E eksistē vismaz viena galīga mažorante, tad $\sup E \in \mathbb{R}$;
   (c) ja kopa E satur galīgus elementus un kopai E nav nevienas galīgas mažorantes, tad $\sup E = +\infty$;
3. pieņemsim, ka $-\infty \notin E$ un $+\infty \in E$;
   (a) ja kopa E nesatur galīgus elementus, t.i., $E = \{+\infty\}$, tad $\inf E = +\infty$;
   (b) ja kopa E satur galīgus elementus un kopai E eksistē vismaz viena galīga minorante, tad $\inf E \in \mathbb{R}$;
   (c) ja kopa E satur galīgus elementus un kopai E nav nevienas galīgas minorantes, tad $\inf E = -\infty$.

6.2. Skaitļu taisnes topoloģija

6.2.1. Iekšējie punkti un kontaktpunkti

Pieņemsim, ka $\varepsilon > 0$. Par **punkta** $x \in \mathbb{R}$ **ε-apkārtni** sauc vaļēju intervālu

$$U(x;\varepsilon) = (x-\varepsilon; x+\varepsilon).$$

Punktu $x \in \mathbb{R}$ sauc par **kopas** $E \subset \mathbb{R}$ **iekšējo punktu**, ja kopa E satur kādu šī punkta apkārtni. Visu kopas E iekšējo punktu kopu apzīmē ar $\operatorname{int} E$ (vai arī ar vienu no simboliem $\mathring{E}$, $]E[$, $\langle E \rangle$) un sauc par **kopas** E **iekšieni**.

$$\boxed{\big(x \in \operatorname{int} E\big) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \big(\exists \varepsilon > 0 : U(x;\varepsilon) \subset E\big)}$$

Punktu $x \in \mathbb{R}$ sauc par **kopas** $E \subset \mathbb{R}$ **kontaktpunktu** (**pieskaršanās punktu**), ja punkta x patvaļīga apkārtne satur vismaz vienu kopas E punktu. Visu kopas E kontaktpunktu kopu apzīmē ar $\overline{E}$ (vai arī ar vienu no simboliem $\operatorname{cl} E$, $[E]$) un sauc par **kopas** E **slēgumu**.

$$\boxed{\big(x \in \overline{E}\big) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \big(\forall \varepsilon > 0 : U(x;\varepsilon) \cap E \neq \emptyset\big)}$$

Iekšienes īpašības	***Slēguma īpašības***
1. Jebkurai kopai $E \subset \mathbb{R}$ ir spēkā $\operatorname{int} E \subset E$.	1. Jebkurai kopai $E \subset \mathbb{R}$ ir spēkā $E \subset \overline{E}$.
2. Jebkurai kopai $E \subset \mathbb{R}$ ir spēkā $\operatorname{int}(\operatorname{int} E) = \operatorname{int} E$.	2. Jebkurai kopai $E \subset \mathbb{R}$ ir spēkā $\overline{\overline{E}} = \overline{E}$.
3. Jebkurām kopām $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}$, ka $E_1 \subset E_2$, ir spēkā $\operatorname{int} E_1 \subset \operatorname{int} E_2$.	3. Jebkurām kopām $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}$, ka $E_1 \subset E_2$, ir spēkā $\overline{E_1} \subset \overline{E_2}$.
4. Jebkurām kopām $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}$ ir spēkā $\operatorname{int}(E_1 \cap E_2) = (\operatorname{int} E_1) \cap (\operatorname{int} E_2)$.	4. Jebkurām kopām $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}$ ir spēkā $\overline{E_1 \cup E_2} = \overline{E_1} \cup \overline{E_2}$.
5. Jebkurām kopām $E_1, E_2, \ldots, E_n \subset \mathbb{R}$ ir spēkā $\operatorname{int}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} E_k\right) = \bigcap\limits_{k=1}^{n} \operatorname{int} E_k$.	5. Jebkurām kopām $E_1, E_2, \ldots, E_n \subset \mathbb{R}$ ir spēkā $\overline{\bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k} = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \overline{E_k}$.
6. Jebkurām kopām $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}$ ir spēkā $(\operatorname{int} E_1) \cup (\operatorname{int} E_2) \subset \operatorname{int}(E_1 \cup E_2)$.	6. Jebkurām kopām $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}$ ir spēkā $\overline{E_1 \cap E_2} \subset \overline{E_1} \cap \overline{E_2}$.
7. $\operatorname{int} \emptyset = \emptyset$, $\operatorname{int} \mathbb{R} = \mathbb{R}$.	7. $\overline{\emptyset} = \emptyset$, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$.
8. Kopas $E \subset \mathbb{R}$ iekšieni un slēgumu saista šādas sakarības: $$\operatorname{int}\big(\complement E\big) = \complement \overline{E},\ \operatorname{int} E = \complement \overline{\complement E},\ \overline{E} = \complement\left(\operatorname{int}\big(\complement E\big)\right),\ \overline{\complement E} = \complement\left(\operatorname{int} E\right),$$ kur $\complement E = \mathbb{R} \setminus E$ ir kopas E papildkopa kopā $\mathbb{R}$.	

- Punkts $x \in \mathbb{R}$ ir kopas $E \subset \mathbb{R}$ kontaktpunkts tad un tikai tad, kad eksistē kopas E punktu virkne, kas konverģē uz punktu x.

6.2.2. Vaļējas un slēgtas kopas

Kopu $E \subset \mathbb{R}$ sauc par **vaļēju kopu**, ja katrs tās punkts ir tās iekšējais punkts.

$$\boxed{\big(E \text{ ir vaļēja kopa}\big) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \big(E \subset \operatorname{int} E\big)}$$

Kopu $E \subset \mathbb{R}$ sauc par **slēgtu kopu**, ja tā satur visus savus kontaktpunktus.

$$\boxed{\big(E \text{ ir slēgta kopa}\big) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \big(E \supset \overline{E}\big)}$$

Vaļēju kopu īpašības	***Slēgtu kopu īpašības***
1. Kopa $E \subset \mathbb{R}$ ir vaļēja tad un tikai tad, kad tā ir vienāda ar savu iekšieni, t.i., $\operatorname{int} E = E$.	1. Kopa $E \subset \mathbb{R}$ ir slēgta tad un tikai tad, kad tā ir vienāda ar savu slēgumu, t.i., $\overline{E} = E$.
2. Jebkuras kopas $E \subset \mathbb{R}$ iekšiene ir vaļēja kopa.	2. Jebkuras kopas $E \subset \mathbb{R}$ slēgums ir slēgta kopa.
3. $\emptyset$ un $\mathbb{R}$ ir vaļējas kopas.	3. $\emptyset$ un $\mathbb{R}$ ir slēgtas kopas.
4. Jebkurš galīga skaita vaļēju kopu šķēlums ir vaļēja kopa.	4. Jebkurš galīga skaita slēgtu kopu apvienojums ir slēgta kopa.
5. Jebkurš vaļēju kopu apvienojums ir vaļēja kopa.	5. Jebkurš slēgtu kopu šķēlums ir slēgta kopa.
6. Kopa $E \subset \mathbb{R}$ ir vaļēja tad un tikai tad, kad tās papildkopa $\complement E$ ir slēgta.	6. Kopa $E \subset \mathbb{R}$ ir slēgta tad un tikai tad, kad tās papildkopa $\complement E$ ir vaļēja.
7. Kopas $E \subset \mathbb{R}$ iekšiene ir vislielākā vaļējā kopa, kas iekļaujas kopā E.	7. Kopas $E \subset \mathbb{R}$ slēgums ir vismazākā slēgtā kopa, kas satur kopu E.
8. Kopas $E \subset \mathbb{R}$ iekšiene ir visu vaļējo kopu, kas iekļaujas kopā E, apvienojums.	8. Kopas $E \subset \mathbb{R}$ slēgums ir visu slēgto kopu, kas satur kopu E, šķēlums.
9. Ja $G \subset \mathbb{R}$ ir vaļēja kopa, bet $F \subset \mathbb{R}$ ir slēgta kopa, tad $G \setminus F$ ir vaļēja kopa, bet $F \setminus G$ ir slēgta kopa.	

- Jebkurai kopai $E \subset \mathbb{R}$ eksistē iekšiene, taču ne katra kopa ir vaļēja. Kopa $E \subset \mathbb{R}$ ir vaļēja tad un tikai tad, kad tā ir vienāda ar savu iekšieni.
- Jebkurai kopai $E \subset \mathbb{R}$ eksistē slēgums, taču ne katra kopa ir slēgta. Kopa $E \subset \mathbb{R}$ ir slēgta tad un tikai tad, kad tā ir vienāda ar savu slēgumu.
- Patvaļīga kopa $E \subset \mathbb{R}$ var būt:
  - vaļēja, taču nebūt slēgta, piemēram, intervāli $(a; b)$, kur $a, b \in \mathbb{R}$ un $a < b$, kā arī intervāli $(a; +\infty)$ un $(-\infty; a)$, kur $a \in \mathbb{R}$, ir vaļējas kopas, taču tās nav slēgtas kopas;
  - slēgta, taču nebūt vaļēja, piemēram, intervāli $[a; b]$, kur $a, b \in \mathbb{R}$ un $a < b$, intervāli $[a; +\infty)$ un $(-\infty; a]$, kur $a \in \mathbb{R}$, kā arī jebkura kopas $\mathbb{R}$ netukša galīga apakškopa, ir slēgtas kopas, taču tās nav vaļējas kopas;

– ne slēgta, ne vaļēja kopa, piemēram, intervāli $[a;b)$ un $[a;b)$, kur $a,b \in \mathbb{R}$ un $a < b$, nav ne vaļējas, ne slēgtas kopas;
– gan slēgta, gan vaļēja kopa; skaitļu taisne $\mathbb{R} = (-\infty;+\infty)$ un tukšā kopa $\emptyset$ ir vienīgās skaitļu taisnes apakškopas, kuras ir vienlaicīgi slēgtas un vaļējas.

- Bezgalīga skaita vaļēju kopu šķēlums var būt vaļēja kopa, bet var arī nebūt vaļēja kopa. Piemēram,
  - vaļēju kopu $\left(0;\frac{1}{n}\right)$ $(n \in \mathbb{N})$ šķēlums $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(0;\frac{1}{n}\right) = \emptyset$ ir vaļēja kopa;
  - savukārt vaļēju kopu $\left(-\frac{1}{n};\frac{1}{n}\right)$ $(n \in \mathbb{N})$ šķēlums $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n};\frac{1}{n}\right) = \{0\}$ nav vaļēja kopa.
- Bezgalīga skaita slēgtu kopu apvienojums var būt slēgta kopa, bet var arī nebūt slēgta kopa. Piemēram,
  - slēgtu kopu $[-n;n]$ $(n \in \mathbb{N})$ apvienojums $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[-n;n] = \mathbb{R}$ ir slēgta kopa;
  - savukārt slēgtu kopu $\left[0;1-\frac{1}{2^n}\right]$ $(n \in \mathbb{N})$ apvienojums $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left[0;1-\frac{1}{2^n}\right] = [0;1)$ nav slēgta kopa.

6.2.3. Kompaktas kopas

Kopu $E \subset \mathbb{R}$ sauc par **kompaktu kopu**, ja jebkura kopas E punktu virkne satur konverģentu apakšvirkni, kas konverģē uz kādu kopas E punktu.

- Kopa $E \subset \mathbb{R}$ ir kompakta kopa tad un tikai tad, kad tā ir slēgta un ierobežota kopa.
- Jebkurš kompaktu kopu šķēlums ir kompakta kopa. Jebkurš kompaktu kopu galīgs apvienojums ir kompakta kopa. Kompaktu kopu bezgalīgs apvienojums var arī nebūt kompakta kopa.
- Kopa $E \subset \mathbb{R}$ ir kompakta kopa tad un tikai tad, kad jebkurai vaļēju kopu saimei $\{G_\alpha\}_{\alpha\in T}$ (indekss α pieņem vērtības no patvaļīgas netukšas kopas T), kas pārklāj kopu E, t.i., $E \subset \bigcup\limits_{\alpha\in T} G_\alpha$, eksistē šīs saimes galīga apakšsaime, kas arī pārklāj kopu E, t.i., eksistē indeksi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in T$, ka $E \subset G_{\alpha_1} \cup G_{\alpha_2} \cup \cdots \cup G_{\alpha_n}$.

6.2.4. Akumulācijas un izolētie punkti

Punktu $x \in \mathbb{R}$ sauc par **kopas** $E \subset \mathbb{R}$ **akumulācijas punktu**, ja punkta x patvaļīga apkārtne satur vismaz vienu kopas E punktu, kas ir atšķirīgs no x. Visu kopas E akumulācijas punktu kopu apzīmē ar E' un sauc par **kopas** E **atvasināto kopu**.

$$\boxed{\left(x \in E'\right) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \left(\forall \varepsilon > 0 : U(x;\varepsilon) \cap (E \setminus \{x\}) \neq \emptyset\right)}$$

Punktu $x \in \mathbb{R}$ sauc par **kopas** $E \subset \mathbb{R}$ **izolēto punktu**, ja eksistē punkta x apkārtne, kuras šķēlums ar kopu E sastāv tikai no viena punkta x. Visu kopas E izolēto punktu kopu apzīmē ar $\operatorname{iso} E$.

$$\boxed{\left(x \in \operatorname{iso} E\right) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \left(\exists \varepsilon > 0 : U(x;\varepsilon) \cap E = \{x\}\right)}$$

- Jebkurai kopai $E \subset \mathbb{R}$ ir spēkā $\operatorname{iso} E \subset E$, t.i., patvaļīgs kopas E izolētais punkts vienmēr pieder kopai E, un tātad ir šīs kopas kontaktpunkts.
- Jebkurai kopai $E \subset \mathbb{R}$ ir spēkā $E' \subset \overline{E}$, t.i., patvaļīgs kopas E akumulācijas punkts ir šīs kopas kontaktpunkts.
- Jebkurai kopai $E \subset \mathbb{R}$ ir spēkā $\overline{E} = E' \cup \operatorname{iso} E$ un $E' \cap \operatorname{iso} E = \emptyset$, t.i., patvaļīgs kopas E kontaktpunkts ir vai nu kopas E izolētais punkts, vai arī šīs kopas akumulācijas punkts.
- Punkts $x \in \mathbb{R}$ ir kopas $E \subset \mathbb{R}$ akumulācijas punkts tad un tikai tad, kad eksistē savstarpēji dažādu kopas E punktu virkne, kas konverģē uz punktu x.
- Punkts $x \in \mathbb{R}$ ir kopas $E \subset \mathbb{R}$ akumulācijas punkts tad un tikai tad, kad eksistē kopas $E \setminus \{x\}$ punktu virkne, kas konverģē uz punktu x.
- Punkts $x \in \mathbb{R}$ ir kopas $E \subset \mathbb{R}$ akumulācijas punkts tad un tikai tad, kad punkta x patvaļīga apkārtne satur bezgalīgi daudz dažādu kopas E punktu.

6.2.5. Blīvas sevī un perfektas kopas

Kopu $E \subset \mathbb{R}$ sauc par **blīvu sevī kopu**, ja jebkurš kopas E punkts ir šīs kopas akumulācijas punkts.

$$\boxed{\big(E \text{ ir blīva sevī kopa}\big) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \big(E \subset E'\big)}$$

Kopu $E \subset \mathbb{R}$ sauc par **perfektu kopu**, ja kopa E ir vienāda ar savu atvasināto kopu.

$$\boxed{\big(E \text{ ir perfekta kopa}\big) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \big(E' = E\big)}$$

Ir spēkā šādi apgalvojumi.

- Kopa $E \subset \mathbb{R}$ ir blīva sevī kopa tad un tikai tad, kad $\operatorname{iso} E = \emptyset$, t.i., kopai E nav neviena izolētā punkta.
- Kopa $E \subset \mathbb{R}$ ir perfekta kopa tad un tikai tad, kad tā ir slēgta un blīva sevī kopa. Citiem vārdiem sakot, kopa $E \subset \mathbb{R}$ ir perfekta kopa tad un tikai tad, kad tā ir slēgta un tai nav neviena izolētā punkta.
- Jebkura perfekta kopa $E \subset \mathbb{R}$ vai nu ir vienāda ar tukšo kopu $\emptyset$, vai arī ir nesanumurējama kopa.

6.2.6. Visur blīvas un nekur neblīvas kopas

Kopu $E \subset \mathbb{R}$ sauc par **visur blīvu kopu**, ja jebkurš skaitļu taisnes $\mathbb{R}$ punkts ir kopas E kontaktpunkts.

$$\boxed{\big(E \text{ ir visur blīva kopa}\big) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \big(\mathbb{R} \subset \overline{E}\big)}$$

Kopu $E \subset \mathbb{R}$ sauc par **nekur neblīvu kopu**, ja tās slēguma papildkopa ir visur blīva kopa.

$$\boxed{\big(E \text{ ir nekur neblīva kopa}\big) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \big(\mathbb{R} \subset \overline{\complement E}\big)}$$

Ir spēkā šādi apgalvojumi.

- Kopa $E \subset \mathbb{R}$ ir visur blīva kopa tad un tikai tad, kad tās slēgums $\overline{E}$ ir visur blīva kopa.
- Ja $E_1 \subset E_2 \subset \mathbb{R}$ un E_1 ir visur blīva kopa, tad arī E_2 ir visur blīva kopa.
- Jebkurš visur blīvu kopu apvienojums ir visur blīva kopa. Galīga skaita visur blīvu kopu šķēlums var arī nebūt visur blīva kopa. Taču galīga skaita visur blīvu vaļēju kopu šķēlums ir visur blīva kopa.
- Kopa $E \subset \mathbb{R}$ ir nekur neblīva kopa tad un tikai tad, kad tās slēgums $\overline{E}$ ir nekur neblīva kopa.
- Ja $E_1 \subset E_2 \subset \mathbb{R}$ un E_2 ir nekur neblīva kopa, tad arī E_1 ir nekur neblīva kopa.
- Jebkurš nekur neblīvu kopu šķēlums ir nekur neblīva kopa.
- Jebkurš galīga skaita nekur neblīvu kopu apvienojums ir nekur neblīva kopa.
- Pieņemsim, ka $E \subset \mathbb{R}$ ir slēgta kopa. Šādi apgalvojumi ir ekvivalenti:
  1. E ir nekur neblīva kopa;
  2. kopas E papildkopa ir visur blīva kopa;
  3. kopai E nav neviena iekšējā punkta;
  4. jebkura kopas E punkta patvaļīga apkārtne satur vismaz vienu kopai E nepiederošu punktu;
  5. jebkura kopas E punkta patvaļīga apkārtne satur sevī apkārtni, kurai nepieder neviens kopas E punkts.

6.2.7. Ārējie un robežas punkti

Punktu $x \in \mathbb{R}$ sauc par **kopas** $E \subset \mathbb{R}$ **ārējo punktu**, ja eksistē šī punkta apkārtne, kurai nepieder neviens kopas E punkts. Visu kopas E ārējo punktu kopu apzīmē ar $\operatorname{ext} E$ un sauc par **kopas** E **ārieni**.

$$\boxed{\big(x \in \operatorname{ext} E\big) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \big(\exists \varepsilon > 0 : U(x;\varepsilon) \cap E = \emptyset\big)}$$

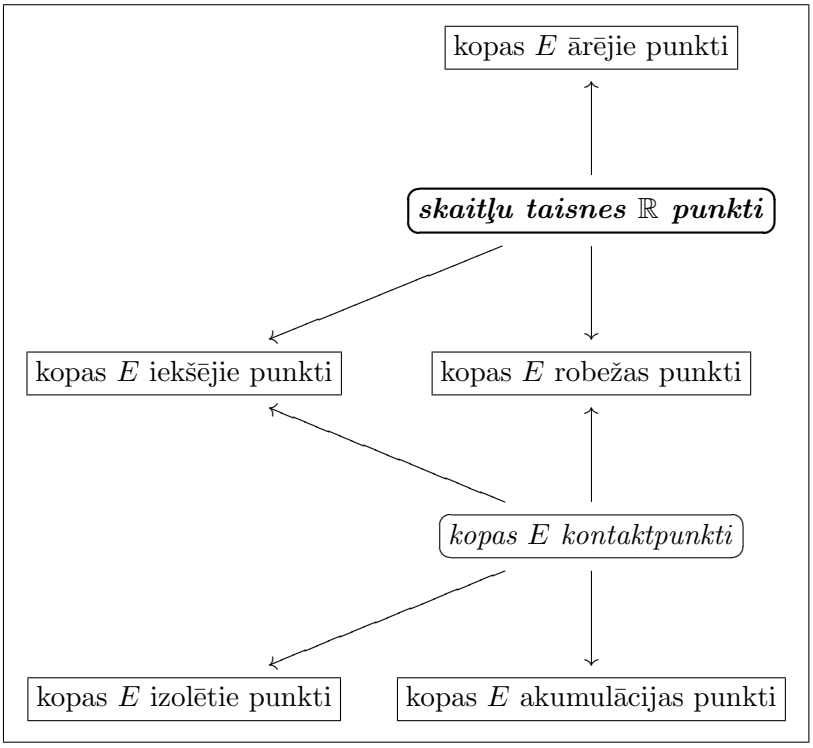
Punktu $x \in \mathbb{R}$ sauc par **kopas** $E \subset \mathbb{R}$ **robežas punktu**, ja punkta x patvaļīga apkārtne satur vismaz vienu punktu, kas pieder kopai E, un vismaz vienu punktu, kas nepieder kopai E. Visu kopas E robežas punktu kopu apzīmē ar ∂E (vai ar $\operatorname{fr} E$) un sauc par **kopas** E **robežu**.

$$\boxed{\big(x \in \partial E\big) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \big(\forall \varepsilon > 0 : U(x;\varepsilon) \cap E \neq \emptyset,\ U(x;\varepsilon) \cap \complement E \neq \emptyset\big)}$$

Jebkurai kopai $E \subset \mathbb{R}$ ir spēkā šādas sakarības:

$$\partial E \subset \overline{E}, \quad \operatorname{ext} E \cap E = \emptyset,$$
$$\mathbb{R} = \operatorname{int} E \cup \partial E \cup \operatorname{ext} E, \quad \overline{E} = \operatorname{int} E \cup \partial E,$$
$$\operatorname{int} E \cap \partial E = \emptyset, \ \operatorname{int} E \cap \operatorname{ext} E = \emptyset, \ \partial E \cap \operatorname{ext} E = \emptyset.$$

6.2.8. Skaitļu taisnes punktu klasifikācija attiecībā pret tās apakškopu



6.1. zīmējums. Shēmā ir attēlota skaitļu taisnes $\mathbb{R}$ punktu klasifikācija attiecībā pret tās apakškopu E: *jebkurš skaitļu taisnes $\mathbb{R}$ punkts x ir vai nu kopas E iekšējais punkts, vai arī kopas E robežas punkts, vai arī kopas E ārējais punkts*, kā arī divas kopas E kontaktpunktu klasifikācijas:

- *jebkurš kopas E kontaktpunkts ir vai nu kopas E iekšējais punkts, vai arī kopas E robežas punkts*;
- *jebkurš kopas E kontaktpunkts ir vai nu kopas E izolētais punkts, vai arī kopas E akumulācijas punkts.*

6.2.9. Kondensācijas punkti

Punktu $x \in \mathbb{R}$ sauc par **kopas $E \subset \mathbb{R}$ kondensācijas punktu**, ja punkta x patvaļīga apkārtne satur nesanumurējamu kopas E punktu apakškopu. Visu kopas E kondensācijas punktu kopu apzīmē ar $E^\bullet$.

$$\boxed{\big(x \in E^\bullet\big) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \big(\forall \varepsilon > 0 : U(x;\varepsilon) \cap E \text{ ir nesanumurējama kopa}\big)}$$

Ir spēkā šādi apgalvojumi.

- $E^\bullet \subset E'$, t.i., jebkurš kopas E kondensācijas punkts ir kopas E akumulācijas punkts.
- Ja kopa $E \subset \mathbb{R}$ ir ne vairāk kā sanumurējama, tad $E^\bullet = \emptyset$. Citiem vārdiem sakot, ne vairāk kā sanumurējamai kopai $E \subset \mathbb{R}$ nav kondensācijas punktu.
- Visu kopas $E \subset \mathbb{R}$ kondensācijas punktu kopa $E^\bullet$ ir perfekta kopa.

- Jebkura kopa $E \subset \mathbb{R}$ ir vai nu ne vairāk kā sanumurējama, vai arī nesanumurējamas kopas $E \cap E^\bullet$ un ne vairāk kā sanumurējamas kopas $E \setminus E^\bullet$ apvienojums.
- **Kantora-Bendiksona teorēma.** Jebkura slēgta kopa $E \subset \mathbb{R}$ ir vai nu ne vairāk kā sanumurējama, vai arī nesanumurējamas perfektas kopas $E^\bullet$ un ne vairāk kā sanumurējamas kopas $E \setminus E^\bullet$ apvienojums.

6.3. Lineāru vaļēju, slēgtu un perfektu kopu uzbūve

6.3.1. Lineāru vaļēju kopu uzbūve

6.1. teorēma. *Lineāra kopa G ir vaļēja tad un tikai tad, kad vai nu tā ir vienāda ar tukšo kopu $\emptyset$, vai arī tā ir vienāda ar ne vairāk kā sanumurējamu savstarpēji nešķeļošos vaļēju intervālu apvienojumu.*

▶ *Nepieciešamība.* Pieņemsim, ka G ir netukša lineāra vaļēja kopa. Definēsim attieksmi $\sim$ kopā G pēc šāda likuma:

$$\forall x, y \in G : x \sim y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \Big(\big[\min\{x; y\}; \max\{x; y\}\big] \subset G \Big),$$

t.i., $x \sim y$ tad un tikai tad, kad nogrieznis ar galapunktiem x un y iekļaujas kopā G. Viegli pārliecināties, ka attieksme $\sim$ ir refleksīva, simetriska un transitīva, t.i., *attieksme $\sim$ ir ekvivalence.* Pieņemsim, ka ekvivalences $\sim$ klases ir δ_k, kur indekss k pieņem vērtības no kādas indeksu kopas $\mathfrak{J}$. Tātad δ_k $(k \in \mathfrak{J})$ sastāv no visiem savstarpēji ekvivalentiem kopas G elementiem. No ekvivalences īpašībām izriet:

1. *kopa G ir vienāda ar ekvivalences klašu δ_k $(k \in \mathfrak{J})$ apvienojumu, t.i.,*
$$G = \bigcup_{k \in \mathfrak{J}} \delta_k; \tag{6.1}$$
2. *ekvivalences klases δ_k $(k \in \mathfrak{J})$ savstarpēji nešķeļas, t.i.,*
$$\delta_k \cap \delta_n = \emptyset \ (k \neq n;\ k, n \in \mathfrak{J}); \tag{6.2}$$
3. *ekvivalences klases δ_k $(k \in \mathfrak{J})$ ir netukšas, t.i.,*
$$\delta_k \neq \emptyset \ (k \in \mathfrak{J}). \tag{6.3}$$

Pierādīsim, ka δ_k ir vaļēja kopa jebkuram $k \in \mathfrak{J}$. Apskatīsim patvaļīgu punktu $x \in \delta_k$. No (6.1) izriet, ka $x \in G$. Tā kā G ir vaļēja kopa, tad eksistē tāds $\varepsilon > 0$, ka

$$U(x; \varepsilon) = (x - \varepsilon; x + \varepsilon) \subset G. \tag{6.4}$$

Apskatīsim patvaļīgu $y \in U(x; \varepsilon)$. Ja $y = x$, tad $y \in \delta_k$. Ja $y < x$, tad no (6.4) izriet, ka $[y; x] \subset G$, t.i., $y \sim x$. Tā kā $x \in \delta_k$, tad arī $y \in \delta_k$. Analoģiski pierāda, ka $y \in \delta_k$, ja $y > x$. Tātad $U(x; \varepsilon) \subset \delta_k$, t.i., x ir kopas δ_k iekšējais punkts. Tā kā x ir patvaļīgs kopas δ_k punkts, tad δ_k ir vaļēja kopa.

Pieņemsim, ka $\alpha_k = \inf \delta_k$ un $\beta_k = \sup \delta_k$. Tā kā $\delta_k \neq \emptyset$, tad $\inf \delta_k \leq \sup \delta_k$, t.i., $\alpha_k \leq \beta_k$, pie tam α_k var būt $-\infty$, bet β_k var būt $+\infty$. Pierādīsim, ka $\alpha_k \neq \beta_k$. Pieņemsim pretējo, ka $\alpha_k = \beta_k = c$. Tad, acīmredzot, $\delta_k = \{c\}$ ir vienelementa kopa. Taču vienelementa kopa nav vaļēja kopa. Ieguvām pretrunu. Tātad pieņēmums nav patiess un $\alpha_k \neq \beta_k$. Tā kā $\alpha_k \leq \beta_k$ un $\alpha_k \neq \beta_k$, tad $\alpha_k < \beta_k$.

Pierādīsim, ka $\alpha_k \notin \delta_k$. Pieņemsim pretējo, ka $\alpha_k \in \delta_k$. Tā kā δ_k ir vaļēja kopa, tad eksistē tāds $\varepsilon > 0$, ka

$$U(\alpha_k; \varepsilon) = (\alpha_k - \varepsilon; \alpha_k + \varepsilon) \subset \delta_k. \tag{6.5}$$

Ja $\alpha_k - \varepsilon < y < \alpha_k$, tad no (6.5) izriet, ka $y \in \delta_k$. Tā kā $\alpha_k = \inf \delta_k$, tad $y \geq \alpha_k$. Ieguvām pretrunu. Tātad pieņēmums nav patiess un $\alpha_k \notin \delta_k$. Analoģiski pierāda, ka $\beta_k \notin \delta_k$.

Pierādīsim, ka $\delta_k = (\alpha_k; \beta_k)$, t.i., δ_k *ir vaļējs intervāls ar sākumpunktu α_k un beigupunktu β_k.*

1. Ja $x \in \delta_k$, tad, ņemot vērā infīma un suprēma īpašības, iegūsim
$$\alpha_k = \inf \delta_k \leq x \leq \sup \delta_k = \beta_k.$$
Atzīmēsim, ka $x \neq \alpha_k$ un $x \neq \beta_k$, jo $\alpha_k \notin \delta_k$ un $\beta_k \notin \delta_k$, bet $x \in \delta_k$. Tātad $\delta_k \subset (\alpha_k; \beta_k)$.

2. Pieņemsim, ka $x \in (\alpha_k; \beta_k)$, t.i., $\alpha_k < x < \beta_k$. Tā kā $x > \alpha_k$, bet $\alpha_k = \inf \delta_k$, tad eksistē $x_1 \in \delta_k$, ka $\alpha_k \leq x_1 < x$. Tā kā $x < \beta_k$, bet $\beta_k = \sup \delta_k$, tad eksistē $x_2 \in \delta_k$, ka $x < x_2 \leq \beta_k$. No tā, ka $x_1 \in \delta_k$ un $x_2 \in \delta_k$, izriet, ka $x_1 \sim x_2$. Ņemot vērā, ka $x_1 < x < x_2$, iegūsim, ka $[x_1; x_2] \subset G$. Taču tad arī $[x_1; x] \subset G$, t.i., $x_1 \sim x$. Tā kā $x_1 \in \delta_k$, tad arī $x \in \delta_k$. Līdz ar to ir pierādīts, ka $(\alpha_k; \beta_k) \subset \delta_k$.

No 1. un 2. seko, ka $\delta_k = (\alpha_k; \beta_k)$.

Pierādīsim, ka *intervālu saime* $\{\delta_k\}_{k \in \mathfrak{J}}$ *ir ne vairāk kā sanumurējama*, t.i., indeksu kopa $\mathfrak{J}$ ir ne vairāk kā sanumurējama. Šim nolūkam katrā intervālā δ_k fiksēsim[1] racionālu skaitli r_k. Līdz ar to ir definēts attēlojums $\varphi : \mathfrak{J} \to \mathbb{Q}$, pie tam, tā kā intervāli δ_k savstarpēji nešķeļas, tad attēlojums φ ir injekcija. Tas nozīmē, ka kopas $\mathfrak{J}$ apjoms nepārsniedz visu racionālo skaitļu kopas $\mathbb{Q}$ apjomu, t.i., kopa $\mathfrak{J}$ ir ne vairāk kā sanumurējama.

Pietiekamība ir acīmredzama, ja ņemt vērā, ka tukšā kopa, kā arī jebkurš vaļēju intervālu (kuri ir vaļējas kopas!) apvienojums ir vaļēja kopa.◀

6.1. piezīme.

1. Ja G ir netukša vaļēja kopa, tad var uzskatīt, ka vai nu $\mathfrak{J} = \{1; 2; \ldots; n\}$, kur $n \in \mathbb{N}$, vai arī $\mathfrak{J} = \mathbb{N}$.
2. Ja G ir netukša vaļēja kopa, tad 6.1. teorēmā minētos vaļējos intervālus δ_k sauc par **kopas G veidotājintervāliem**. Tātad, ja G ir netukša vaļēja kopa, tad
   - kopas G veidotājintervāli iekļaujas kopā G;
   - kopas G veidotājintervāli savstarpēji nešķeļas;
   - kopas G veidotājintervālu galapunkti nepieder kopai G;
   - ja kāds vaļējs intervāls $(a; b)$ iekļaujas kopā G, tad eksistē tāds kopas G veidotājintervāls δ_k, ka $(a; b) \subset \delta_k$, citiem vārdiem sakot, *veidotājintervāli ir vislielākie vaļējie intervāli, kas iekļaujas kopā G.*

6.3.2. Lineāru slēgtu kopu uzbūve

6.2. teorēma. *Lineāra kopa F ir slēgta tad un tikai tad, kad tā vai nu ir vienāda ar skaitļu taisni $\mathbb{R}$, vai arī ir iegūta no skaitļu taisnes $\mathbb{R}$, izmetot ne vairāk kā sanumurējamu savstarpēji nešķeļošos vaļēju intervālu apvienojumu.*

▶ Teorēmas patiesums izriet no 6.1. teorēmas, ja ņemt vērā, ka slēgtas kopas F papildkopa $G = \complement F$ ir vaļēja kopa, bet skaitļu taisnes $\mathbb{R}$ papildkopa ir tukšā kopa $\emptyset$, t.i., $\complement\mathbb{R} = \emptyset$.◀

[1] Izmantojam šādu reālo skaitļu īpašību: *starp jebkuriem diviem dažādiem reāliem skaitļiem atrodas vismaz viens racionāls skaitlis.* Mūsu gadījumā $\alpha_k < \beta_k$, tāpēc arī eksistē racionāls skaitlis r_k, ka $\alpha_k < r_k < \beta_k$, t.i., $r_k \in \delta_k$.

6.2. piezīme. Ja slēgta kopa F nav vienāda ar skaitļu taisni $\mathbb{R}$, tad 6.2. teorēmā minētos vaļējos intervālus (- vaļējās kopas $G = \complement F$ veidotājintervālus!) sauc par **kopas F blakusintervāliem**. Tātad, ja F ir slēgta kopa, pie tam $F \neq \mathbb{R}$, tad

- kopas F blakusintervāliem nav kopīgu punktu ar kopu F;
- kopas F blakusintervāli savstarpēji nešķeļas;
- kopas F blakusintervālu, ja tie nav bezgalīgi, galapunkti pieder kopai F;
- ja $(a; b)$ ir vaļējs intervāls, kas nesatur nevienu kopas F punktu, tad eksistē kopas F blakusintervāls δ_k, ka $(a; b) \subset \delta_k$, citiem vārdiem sakot, *kopas F blakusintervāli ir vislielākie vaļējie intervāli, kas nesatur nevienu kopas F punktu.*

6.3. teorēma. *Lineāra ierobežota kopa F ir slēgta tad un tikai tad, kad vai nu tā ir vienāda ar tukšo kopu $\emptyset$, vai arī tā ir vienāda ar nogriezni $[\alpha; \beta]$, vai arī tā ir iegūta no nogriežņa $[\alpha; \beta]$, izmetot ne vairāk kā sanumurējamu savstarpēji nešķeļošos vaļēju ierobežotu intervālu apvienojumu.*

► *Nepieciešamība.* Apskatīsim netukšu ierobežotu slēgtu kopu F. Pieņemsim, ka $\alpha = \inf F$ un $\beta = \sup$. Tā kā $F \neq \emptyset$, tad $\alpha \leq \beta$. No infīma un suprēma īpašībām izriet, ka $F \subset [\alpha; \beta]$, pie tam, tā kā F ir slēgta, tad $\alpha, \beta \in F$. Atzīmēsim, ka $(-\infty; \alpha)$ un $(\beta; +\infty)$ ir kopas F blakusintervāli. Pieņemsim, ka $F \neq [\alpha; \beta]$. Tad saskaņā ar 6.2. teorēmu kopu F iegūst no skaitļu taisnes $\mathbb{R}$, izmetot ne vairāk kā sanumurējamu kopas F blakusintervālu apvienojumu. Starp šiem izmestajiem blakusintervāliem būs arī intervāli $(-\infty; \alpha)$ un $(\beta; +\infty)$. Visi pārējie kopas F blakusintervāli ir ierobežoti un iekļaujas nogrieznī $[\alpha; \beta]$. Tāpēc kopu F var iegūt no nogriežņa $[\alpha; \beta]$, izmetot ne vairāk kā sanumurējamu kopas F ierobežotu blakusintervālu apvienojumu.

Pietiekamība ir acīmredzama, ja ņemt vērā, ka tukšā kopa, nogrieznis, kā arī slēgtas un vaļējas kopas starpība ir slēgta kopa.◄

6.3.3. Lineāru perfektu kopu uzbūve

Lemma. *Punkts $x \in \mathbb{R}$ ir lineāras slēgtas kopas F izolēts punkts tad un tikai tad, kad x ir divu kopas F blakusintervālu kopīgs galapunkts.*

► *Nepieciešamība.* Pieņemsim, ka $x \in \mathbb{R}$ ir lineāras slēgtas kopas F izolēts punkts. Tad eksistē tāds $\varepsilon > 0$, ka $U(x; \varepsilon) \cap F = \{x\}$. Seko, ka

$$(x - \varepsilon; x) \cap F = \emptyset, \quad (x; x + \varepsilon) \cap F = \emptyset.$$

Tāpēc eksistē tādi kopas F blakusintervāli $(a; b)$ un $(c; d)$, ka

$$(x - \varepsilon; x) \subset (a; b), \quad (x; x + \varepsilon) \subset (c; d).$$

Tā kā slēgtas kopas F blakusintervāli ir vislielākie vaļējie intervāli, kas nesatur nevienu kopas F punktu, tad $b = x$ un $c = x$, jo $x \in F$. Tātad punkts x ir divu kopas F blakusintervālu kopīgs galapunkts.

Pietiekamība. Pieņemsim, ka $(a; x)$ un $(x; d)$ ir kopas F blakusintervāli. No blakusintervālu īpašībām izriet, ka $x \in F$, bet

$$(a; x) \cap F = \emptyset, \quad (x; d) \cap F = \emptyset.$$

Atradīsim tādu $\varepsilon > 0$, ka $x - \varepsilon \in (a; x)$ un $x + \varepsilon \in (x; d)$. Tad $U(x; \varepsilon) \cap F = \{x\}$, t.i., punkts x ir kopas F izolētais punkts.◀

No 6.2. un 6.3. teorēmas, ņemot vērā lemmu, iegūsim šādas teorēmas, kuras raksturo perfektu kopu uzbūvi.

6.4. teorēma. *Lineāra kopa F ir perfekta tad un tikai tad, kad tā vai nu ir vienāda ar skaitļu taisni $\mathbb{R}$, vai arī ir iegūta no skaitļu taisnes $\mathbb{R}$, izmetot ne vairāk kā sanumurējamu savstarpēji nešķeļošos vaļēju intervālu, kuriem nav kopīgu galapunktu, apvienojumu.*

6.5. teorēma. *Lineāra ierobežota kopa F ir perfekta tad un tikai tad, kad vai nu tā ir vienāda ar tukšo kopu $\emptyset$, vai arī tā ir vienāda ar nogriezni $[\alpha; \beta]$, vai arī tā ir iegūta no nogriežņa $[\alpha; \beta]$, izmetot ne vairāk kā sanumurējamu savstarpēji nešķeļošos vaļēju ierobežotu intervālu, kuriem nav kopīgu galapunktu ne vienam ar otru, ne ar nogriezni $[\alpha; \beta]$, apvienojumu.*

6.4. Rindas ar nenegatīviem locekļiem

Apskatīsim rindu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots , \tag{6.6}$$

kuras locekļi a_n ($n \in \mathbb{N}$) ir nenegatīvi reāli skaitļi. Tad rindas (6.6) parciālsummu virkne (S_n), kur

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

ir augoša, t.i.,

$$S_1 \leq S_2 \leq \cdots \leq S_n \leq \cdots .$$

Pavisam ir iespējami divi gadījumi.

1. Ja virkne (S_n) ir ierobežota no augšas ar kādu reālu skaitli (šim skaitlim ir jābūt nenegatīvam), tad saskaņā ar **Veierštrāsa**[2] **teorēmu**: *ja augoša virkne ir ierobežota no augšas ar kādu reālu skaitli, tad tā ir konverģenta*, parciālsummu virknei (S_n) eksistē galīga robeža $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

2. Ja virkne (S_n) nav ierobežota no augšas ne ar vienu reālu skaitli, tad $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, kur $S = +\infty$.

Šo robežu S sauc par **rindas** (6.6) **summu** un raksta

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Atzīmēsim, ka abos iepriekš minētajos gadījumos $a_n \leq S_n \leq S$ jebkuram $n \in \mathbb{N}$. Ja vismaz viens rindas (6.6) loceklis ir pozitīvs, tad rindas (6.6) summa ir lielāka par nulli. Pasvītrosim, ka

- *jebkurai rindai ar nenegatīviem locekļiem vienmēr eksistē summa, kura ir vai nu nenegatīvs skaitlis, vai arī* $+\infty$!

Ja rindas (6.6) summa S ir galīga, t.i., $0 \leq S < +\infty$, tad rindu (6.6) sauc par **konverģentu** (saka arī, ka **rinda (6.6) konverģē uz summu** S). Savukārt, ja rindas (6.6) summa S ir bezgalīga, t.i., $S = +\infty$, tad rindu (6.6) sauc par **diverģentu**.

Dotajam $n \in \mathbb{N}$ apzīmēsim:

$$a_{n+1} = b_1, a_{n+2} = b_2, \ldots, a_{n+k} = b_k, \ldots .$$

Rindu

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = b_1 + b_2 + \cdots$$

jeb

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots \tag{6.7}$$

[2] K. Veierštrāss (*Karl Theodor Wilhelm Weierstrass*, 1815-1897) - vācu matemātiķis.

sauc par **rindas** (6.6) **n-to atlikumu**.

Ir spēkā šādas rindu ar nenegatīviem locekļiem īpašības.

1. Pieņemsim, ka rinda (6.6) konverģē uz summu S. Tad
   (a) jebkuram $n \in \mathbb{N}$ rindas (6.6) n-tais atlikums (6.7) konverģē uz summu $R_n = S - S_n$, t.i., $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n+k} = R_n$;
   (b) jebkuram $n \in \mathbb{N}$ ir spēkā $S = S_n + R_n$;
   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$.

   Otrādi, ja vismaz viens rindas (6.6) n-tais atlikums konverģē, tad arī rinda (6.6) konverģē.

2. **Konverģentas rindas nepieciešamā pazīme**. Ja rinda (6.6) konverģē, tad $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

3. **Salīdzināšanas pazīme**.
   (a) Ja eksistē $n_0 \in \mathbb{N}$, ka $a_n \le b_n$ visiem $n \ge n_0$, tad no rindas $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverģences izriet rindas $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverģence, bet no rindas $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverģences seko rindas $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ diverģence.
   (b) Ja $a_n \le b_n$ visiem $n \in \mathbb{N}$, tad no rindas $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverģences izriet rindas $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverģence, pie tam šo rindu summas saista nevienādība $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

4. **Konverģentu rindu saskaitīšanas linearitāte**. Ja rindas $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ un $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverģē attiecīgi uz summām A un B, tad jebkuriem nenegatīviem skaitļiem α un β rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ konverģē uz summu $\alpha A + \beta B$, t.i.,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha A + \beta B$$

   jeb

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

5. **Konverģentas rindas asociatīvā īpašība**. Ja rindas $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ blakus esošos locekļus apvienot grupās, nemainot locekļu secību, t.i.,

$$(\underbrace{a_1 + \cdots + a_{n_1}}_{b_1}) + (\underbrace{a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}}_{b_2}) + \cdots,$$

un atrast katras grupas locekļu summas $b_1, b_2, \dots$, tad rinda $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ konverģē un tās summa ir vienāda ar dotās rindas summu. Otrādi, ja konverģentas rindas $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ katru locekli izteikt kā galīga skaita nenegatīvu skaitļu summu un atmest iekavas, tad iegūtā rinda ir konverģenta un tās summa ir vienāda ar rindas $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ summu.

6. Rindas konverģence vai diverģence nemainās, ja tai pievieno vai atmet galīgu skaitu locekļu.

Jebkuru galīgu summu

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

var uzlūkot kā konverģentu rindu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$$

ar summu S, ja uzskatīt, ka $a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = 0$.

Apskatot Lebega mēra teoriju, ir jāsastopas ar rindām $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, kur a_n ir nenegatīvs skaitlis vai $+\infty$. Ja $a_n = +\infty$ vismaz vienam indeksam n, tad $S_m = +\infty$ jebkuram $m \geq n$. Uzskata, ka $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \overset{\text{def}}{=} +\infty$ un $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \overset{\text{def}}{=} +\infty$. No iepriekš teiktā izriet, ka

- *jebkurai rindai $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, kur a_n ir nenegatīvs skaitlis vai $+\infty$, vienmēr eksistē summa, kura ir vai nu nenegatīvs skaitlis, vai arī $+\infty$, t.i., $0 \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \leq +\infty$.*

Formulēsim šādu noderīgu īpašību.

- Pieņemsim, ka $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ un $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ir rindas ar nenegatīviem locekļiem, starp kuriem var būt arī $+\infty$. Ja $a_n \leq b_n$ visiem $n \in \mathbb{N}$, tad doto rindu summas saista nevienādība $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Ar rindu teoriju detalizētāk var iepazīties [26], [34].

6.5. Atkārtotās rindas ar nenegatīviem locekļiem

Pieņemsim, ka a_k^i $(i, k \in \mathbb{N})$ ir nenegatīvi reāli skaitļi. Pierakstīsim šos skaitļus bezgalīgas pa labi un uz leju taisnstūrveida matricas veidā

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^i & \dots \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^i & \dots \\ a_3^1 & a_3^2 & \dots & a_3^i & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_k^1 & a_k^2 & \dots & a_k^i & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \tag{6.8}$$

Ja matricā (6.8) summēt katru rindiņu atsevišķi, tad iegūsim rindas

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_k^i \ (k \in \mathbb{N}). \tag{6.9}$$

Savukārt, summējot rindas (6.9), iegūsim **atkārtoto rindu** (saka arī **rindu rindu**)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_k^i. \tag{6.10}$$

Atkārtoto rindu (6.10) sauc par **konverģentu**, ja

1. katra no rindām (6.9) konverģē; pieņemsim, ka $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_k^i = A_k$ $(k \in \mathbb{N})$;
2. rinda $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ konverģē; pieņemsim, ka $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k = A$.

Skaitli A sauc par **atkārtotās rindas (6.10) summu** un raksta

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_k^i = A.$$

Tātad, ja A ir konverģentas atkārtotās rindas (6.10) summa, tad

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_k^i = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_k^i \right) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k = A.$$

Ir spēkā šādas atkārtoto rindu ar nenegatīviem locekļiem īpašības.

1. Sanumurēsim matricas (6.8) locekļus virknē $u_1, u_2, \dots, u_r, \dots$ (to var izdarīt bezgalīgi daudz veidos) un apskatīsim rindu $\sum\limits_{r=1}^{\infty} u_r$. Ja atkārtotā rinda $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_k^i$ konverģē uz summu A, tad arī rinda $\sum\limits_{r=1}^{\infty} u_r$ konverģē uz to pašu summu A.
2. Pieņemsim, ka $\sum\limits_{r=1}^{\infty} u_r$ ir rinda ar nenegatīviem locekļiem. Sakārtosim rindas $\sum\limits_{r=1}^{\infty} u_r$ locekļus matricas (6.8) veidā (to var izdarīt bezgalīgi daudz veidos) un apskatīsim atkārtoto rindu $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_k^i$. Ja rinda $\sum\limits_{r=1}^{\infty} u_r$ konverģē uz summu U, tad arī atkārtotā rinda $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_k^i$ konverģē uz to pašu summu U.

3. Sanumurēsim matricas (6.8) locekļus virknē $u_1, u_2, \ldots, u_r, \ldots$ (to var izdarīt bezgalīgi daudz veidos) un apskatīsim rindu $\sum\limits_{r=1}^{\infty} u_r$. Ja iegūtā rinda $\sum\limits_{r=1}^{\infty} u_r$ konverģē uz summu U, tad arī atkārtotā rinda $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_k^i$ konverģē uz to pašu summu U.

4. Ja atkārtotā rinda $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_k^i$ konverģē, tad

   (a) katra no rindām $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^i$ $(i \in \mathbb{N})$ konverģē; pieņemsim, ka

   $$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^i = B_i \quad (i \in \mathbb{N});$$

   (b) rinda $\sum\limits_{i=1}^{\infty} B_i$ konverģē.

   Tātad, ja atkārtotā rinda $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_k^i$ konverģē, tad

   $$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_k^i\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^i\right).$$

Ar atkārtoto rindu teoriju detalizētāk var iepazīties [19, 1. daļa], [34].

LITERATŪRA

[1] M. Grebenča, S. Novoselovs. Matemātiskās analīzes kurss. 1. daļa. - R.: LVI, 1952.

[2] A. Gricāns. Kopu teorijas elementi. - Daugavpils: DPU izdevniecība "Saule", 1997.

[3] I. Kārkliņš. Ievads integrāļa teorijā. - R: LU, 1990.

[4] I. Kārkliņš. Lebega integrāļi. - R: LU, 1991.

[5] Kontroldarbu krājums matemātiskajā analīzē un funkciju teorijā neklātienes nodaļas studentiem (V. Starceva redakcijā). - Daugavpils: DPI, 1976.

[6] Elliott H. Lieb, Michael Loss. Analysis: Second Edition. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2001.

[7] S. Ņikoļskis. Matemātiskā analīze. 1. daļa - R: Zvaigzne, 1976., 2. daļa - R: Zvaigzne, 1977.

[8] Martin Schechter. Principles of Functional Analysis: Second Edition. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2002.

[9] V. Starcevs. Mērojamas kopas un integrālis. - R: LVU, 1982.

[10] D. Taimiņa. Matemātikas vēsture. - R: Zvaigzne, 1990.

[11] Ю.М. Березанский, Г.Ф. Ус, З.Г. Шефтель. Функциональный анализ. - Киев: Вища школа, 1990.

[12] А.Н. Боголюбов. Математики. Механики. Биографический справочник. - Киев: Наукова Думка, 1983.

[13] Н.Я. Виленкин, М.Б. Балк, В.А. Петров. Математический анализ. Мощность. Метрика. Интеграл. - М: Просвещение, 1980.

[14] Б.З. Вулих. Краткий курс теории функций вещественной переменной. - М: Наука, 1965.

[15] Р.С. Гутер, Л.Д. Кудрявцев, Б.М. Левитан. Элементы теории функций. - М: ГИФМЛ, 1963.

[16] А.И. Ильин, Э.Г. Позняк. Основы математического анализа. Часть 2. - М: Наука, 1980.

[17] А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. - М: Наука, 1976.

[18] К.В. Лащенов. Дополнительные главы математического анализа. Часть вторая. Мера и интеграл Лебега. - Ленинград, 1977.

[19] И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г. Гай, А.Ф. Калайда. Математический анализ. Часть 1. - Киев: Вища школа, 1983; часть 2. - Киев: Вища школа, 1985.

[20] И.И. Ляшко, В.Ф. Емельянов, А.К. Боярчук. Основы классического и современного математического анализа. - Киев: Вища школа, 1988.

[21] И.П. Макаров. Дополнительные главы математического анализа. - М: Просвещение, 1968.

[22] Б.П. Макаров, Л.В. Флоринская, В.П. Теория меры и интеграла. Выпуск 1. Мера. Измеримые функции. - Ленинград: изд. Ленинградского университета, 1974.

[23] И.П. Натансон. Теория функций вещественной переменной. - М: Наука, 1974.

[24] Ю.С. Очан. Сборник задач и теорем теории функций действительного переменного. - М: Просвещение, 1965.

[25] Ю.С. Очан. Сборник задач по математическому анализу. - М: Просвещение, 1981.

[26] У. Рудин. Основы математического анализа. - М: Мир, 1976.

[27] В.И. Соболев. Лекции по дополнительным главам математического анализа. - М: Наука, 1968.

[28] В.А. Старцев. Измеримые множества и интеграл. Часть 2. - Р: ЛГУ, 1986.

[29] В.А. Старцев. Измеримые множества и интеграл. Часть 3. - Р: ЛГУ, 1987.

[30] В.А. Старцев. Введение в математический анализ. Часть 1. Теория пределов. - Даугавпилс: изд. ДПУ "Сауле", 1996.

[31] С.А. Теляковский. Сборник задач по теории функций действительного переменного. - М.: Наука, 1980.

[32] Е. Титчмарш. Теория функций. - М.-Л.: ГИТТЛ, 1951.

[33] Э.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон. Курс современного анализа. Часть 1. - М: ГИФМЛ, 1963.

[34] Г.М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Ч.2. - М: ГИФМЛ, 1962.

[35] Л.В. Флоринская, В.П. Хавин. Теория меры и интеграла. Выпуск 2. Интеграл. - Ленинград: изд. Ленинградского университета, 1975.

[36] Н.Я. Фролов. Теория функций действительного переменного. - М: УЧПЕДГИЗ, 1953.

[37] П. Халмош. Теория меры. - М: изд-во иностр. лит., 1953.

[38] Г.Е. Шилов. Математический анализ. Функции одного переменного. Части 1-2. - М: Наука, 1969.

[39] Г.Е. Шилов, Б.А. Гуревич. Интеграл, мера и производная. - М: Наука, 1967.

ALFABĒTISKAIS RĀDĪTĀJS

atdalītājnogriežņa princips, 262
atdalītājskaitlis, 262
attālums starp kopām, 13

blakusintervāls, 276

C-īpašība, 76

Darbū-Lebega summa
  apakšējā, 92
  augšējā, 92
Darbū-Rīmaņa summa
  apakšējā, 90
  augšējā, 90

figūra
  elementāra, 37
  vienkāršākā, 37
funkcija
  Q-integrējama, 231
  c-konstanta, 56
  absolūti nepārtraukta, 228
  Bēra
    apakšējā, 133
    augšējā, 133
  Dirihlē, 58
  ekvivalentas funkcijas, 58
  funkcijas griezums, 155
  funkcijas infīms, 263
  funkcijas suprēms, 263
  funkcijas svārstība, 133
  funkcijas svārstība kopā, 95
  funkcijas svārstība nogrieznī, 91
  funkcijas svārstība punktā, 133
  gandrīz visur galīga, 83
  integrējama Rīmaņa nozīmē, 90
  integrējama Lebega nozīmē, 95, 159, 161, 181, 182, 186, 189
  integrējama neīstā nozīmē intervālā, 217, 222
  kāpņveida, 57
  mērojama, 55
  mērojama Karateodori nozīmē, 51
  nullfunkcija, 60
  raksturfunkcija, 57
  summējama, 159, 181, 186
  visur galīga, 83

Heines-Borela-Lebega lemma, 10

integrālis
  Lebega, 95, 159, 181, 182, 186
    apakšējais, 95
    augšējais, 95
  neīstais
    otrā veida, 221
    pirmā veida, 217
  Rīmaņa, 90
    apakšējais, 91
    augšējais, 91

konverģence
  gandrīz visur, 65
  Jegorova nozīmē, 86
  pēc p-tās kārtas vidējā, 257
  pēc mēra, 65
  pēc vidējā, 235
  pēc vidējā kvadrātiskā, 243
  punktveida, 64
  vienmērīgā, 64
kopa
  F_σ-kopa, 22
  G_δ-kopa, 22

atvasinātā, 269
blīva sevī, 270
Borela, 24
Kantora, 35
kompakta, 269
kongruentas kopas, 41
kopas infīms, 261
kopas mažorante, 261
kopas maksimums, 260
kopas minorante, 261
kopas minimums, 260
kopas suprēms, 261
Lebega, 53
lineāra, 7
mērojama Žordāna nozīmē, 38
mērojama Lebega nozīmē, 14
nekur neblīva, 270
nulles mēra, 15
perfekta, 270
slēgta, 268
vaļēja, 268
visur blīva, 270
kustība, 41

mērs
Žordāna, 38
ārējais, 38
iekšējais, 38
Lebega, 14
ārējais, 8
iekšējais, 33

nepārtrauktības aksioma, 262
nevienādība
Čebišova, 113, 169
Heldera, 256
Košī-Buņakovska, 243
Minkovska, 256

pārklājums, 7
μ-pārklājums, 9
galīgs, 7
ne vairāk kā sanumurējams, 7
pārklājuma garums, 8
sanumurējams, 7
punkts
ārējais punkts, 271
akumulācijas punkts, 269
iekšējais punkts, 267
izolēts punkts, 269
kondensācijas punkts, 272
kontaktpunkts, 267
pieskaršanās punkts, 267
robežas punkts, 271

sadalījums, 92
sasmalcinājums, 89

telpa
$L_1(E)$, 233
$L_2(E)$, 240
$L_p(E)$, 256
$S(E)$, 256

veidotājintervāls, 275

SATURS

IEVADS **3**

1. MĒROJAMAS KOPAS **7**

1.1. Ārējais Lebega mērs . . . 7
1.2. Mērojamas Lebega nozīmē kopas definīcija. Nulles mēra kopas . . . 14
1.3. Mērojamu Lebega nozīmē kopu īpašības . . . 16
1.4. Kopu mērojamības Lebega nozīmē kritēriji . . . 20
1.5. Lebega mēra īpašības . . . 24
1.6. Iekšējais un ārējais Lebega mērs . . . 32
1.7. Vaļēju un slēgtu kopu Lebega mērs . . . 34
1.7.1. Vaļēju kopu Lebega mērs . . . 34
1.7.2. Slēgtu kopu Lebega mērs . . . 35
1.7.3. Kantora kopas Lebega mērs . . . 35
1.8. Ierobežotu kopu Lebega mērs . . . 36
1.9. Mērojamība Žordāna nozīmē . . . 37
1.9.1. Mērojamas Žordāna nozīmē kopas (īss atkārtojums) . . . 37
1.9.2. Mērojamas Žordāna nozīmē kopas mērojamība Lebega nozīmē . . . 39
1.10. Noslēguma piezīmes par lineāru kopu mērojamību . . . 41
1.10.1. Lineāru kopu mērojamība un Lebega mērs kā skaitļu taisnes $\mathbb{R}$ visu kustību grupas invarianti . . . 41
1.10.2. Nemērojamu Lebega nozīmē kopu eksistence . . . 42
1.10.3. Mērojamības problēma . . . 45
1.11. Uzdevumi . . . 47

2. MĒROJAMAS FUNKCIJAS **53**

2.1. Lebega kopas un to īpašības . . . 53
2.2. Mērojamas funkcijas jēdziens . . . 55
2.3. Mērojamu funkciju īpašības . . . 56
2.4. Mērojamu funkciju klases . . . 58
2.5. Darbības ar mērojamām funkcijām . . . 61
2.6. Mērojamu funkciju virknes . . . 64
2.6.1. Daži funkciju virkņu konverģences veidi . . . 64
2.6.2. Lebega teorēma . . . 67
2.6.3. Risa teorēma . . . 70

2.6.4. Jegorova teorēma . . . 72
2.7. Mērojamu funkciju struktūra . . . 74
2.7.1. Mērojamu funkciju tuvināšana ar kāpņveida funkcijām . . . 74
2.7.2. Luzina teorēma . . . 76
2.7.3. Frešē teorēma . . . 79
2.7.4. Mērojamas funkcijas kritēriji . . . 81
2.8. Noslēguma piezīmes par funkciju mērojamību . . . 82
2.9. Uzdevumi . . . 84

3. LEBEGA INTEGRĀLIS 89
3.1. Integrējamas Rīmaņa nozīmē funkcijas (īss atkārtojums) . . . 89
3.2. Darbū-Lebega summas un to īpašības . . . 92
3.3. Lebega integrāļa jēdziens . . . 94
3.4. Integrējamas Rīmaņa nozīmē funkcijas integrējamība Lebega nozīmē . . . 96
3.5. Mērojamas funkcijas integrējamība Lebega nozīmē . . . 97
3.6. Lebega integrāļa īpašības . . . 102
3.6.1. Lebega integrāļa linearitāte . . . 102
3.6.2. Nevienādību integrēšana . . . 106
3.6.3. Lebega integrāļa sanumurējamā aditivitāte . . . 110
3.6.4. Lebega integrāļa sanumurējamās aditivitātes sekas . . . 113
3.7. Robežpāreja zem Lebega integrāļa zīmes . . . 123
3.8. Integrējamības Rīmaņa nozīmē Lebega kritērijs . . . 132
3.8.1. Funkcijas nepārtrauktības punktā Bēra definīcija . . . 132
3.8.2. Bēra funkciju mērojamība . . . 137
3.8.3. Lebega teorēma par funkcijas integrējamību Rīmaņa nozīmē . . . 141
3.9. Primitīvās funkcijas atrašana ierobežota atvasinājuma gadījumā . . . 144
3.10. Noslēguma piezīmes par galīga mēra kopā ierobežotu funkciju Lebega integrāli . . . 146
3.11. Uzdevumi . . . 148

4. SUMMĒJAMAS FUNKCIJAS 155
4.1. Patstāvīgas zīmes funkciju summējamība . . . 155
4.1.1. Nenegatīvas funkcijas griezumi un to īpašības . . . 155
4.1.2. Nenegatīvu funkciju summējamība . . . 157
4.1.3. Nepozitīvu funkciju summējamība . . . 161
4.2. Nenegatīvu summējamu funkciju īpašības . . . 162
4.2.1. Nenegatīvu summējamu funkciju linearitāte . . . 162
4.2.2. Nevienādību integrēšana . . . 167
4.2.3. Nenegatīvu summējamu funkciju sanumurējamā aditivitāte . . . 169
4.2.4. Sekas no nenegatīvu summējamu funkciju sanumurējamās aditivitātes 175
4.2.5. Vēlreiz par nenegatīvas funkcijas Lebega integrāļa definīciju . . . 179
4.2.6. Nenegatīvu summējamu funkciju integrāļa absolūtā nepārtrauktība 182
4.3. Summējamas funkcijas jēdziens . . . 186
4.4. Summējamu funkciju īpašības . . . 190
4.5. Robežpāreja zem Lebega integrāļa zīmes . . . 203
4.5.1. Fatu teorēma . . . 203
4.5.2. Levi teorēma . . . 207
4.5.3. Lebega teorēma . . . 211

4.6. Summējamība un neīstais integrālis . . . 216
4.6.1. Summējamība un pirmā veida neīstais integrālis . . . 216
4.6.2. Summējamība un otrā veida neīstais integrālis . . . 221
4.7. Noslēguma piezīmes par summējamām funkcijām . . . 224
4.7.1. Gandrīz visur galīgu funkciju summējamība . . . 224
4.7.2. Summējamu funkciju diferencējamība . . . 227
4.8. Uzdevumi . . . 228

5. FUNKCIJU TELPAS $L_1(E)$ un $L_2(E)$ 233
5.1. Banaha telpa $L_1(E)$ . . . 233
5.2. Hilberta telpa $L_2(E)$ . . . 240
5.3. Uzdevumi . . . 256

6. PIELIKUMS 259
6.1. Infīms un suprēms . . . 259
6.1.1. Reālu skaitļu intervāli . . . 259
6.1.2. Paplašinātā reālo skaitļu kopa . . . 260
6.1.3. Kopas $E \subset \mathbb{R}$ infīms un suprēms kopā $\mathbb{R}$ . . . 260
6.1.4. Kopas $E \subset \mathbb{R}$ infīms un suprēms kopā $\widetilde{\mathbb{R}}$ . . . 265
6.1.5. Kopas $E \subset \widetilde{\mathbb{R}}$ infīms un suprēms kopā $\widetilde{\mathbb{R}}$ . . . 266
6.2. Skaitļu taisnes topoloģija . . . 267
6.2.1. Iekšējie punkti un kontaktpunkti . . . 267
6.2.2. Vaļējas un slēgtas kopas . . . 268
6.2.3. Kompaktas kopas . . . 269
6.2.4. Akumulācijas un izolētie punkti . . . 269
6.2.5. Blīvas sevī un perfektas kopas . . . 270
6.2.6. Visur blīvas un nekur neblīvas kopas . . . 270
6.2.7. Ārējie un robežas punkti . . . 271
6.2.8. Skaitļu taisnes punktu klasifikācija attiecībā pret tās apakškopu . . . 272
6.2.9. Kondensācijas punkti . . . 272
6.3. Lineāru vaļēju, slēgtu un perfektu kopu uzbūve . . . 274
6.3.1. Lineāru vaļēju kopu uzbūve . . . 274
6.3.2. Lineāru slēgtu kopu uzbūve . . . 275
6.3.3. Lineāru perfektu kopu uzbūve . . . 276
6.4. Rindas ar nenegatīviem locekļiem . . . 278
6.5. Atkārtotās rindas ar nenegatīviem locekļiem . . . 281

LITERATŪRA 283

ALFABĒTISKAIS RĀDĪTĀJS 286