DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE

MATEMĀTISKĀS ANALĪZES KATEDRA

Ināra Jermačenko

PAR DIVU OTRĀS KĀRTAS LINEĀRU DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMU SISTĒMU AR KONSTANTIEM KOEFICIENTIEM

2002. gada 21. jūnijs

2002

ANOTĀCIJA

Dotajā darbā tiek apskatīta speciāla veida divu otrās kārtas lineāru diferenciālvienādojumu ar konstantiem koeficientiem sistēmas risināšana. Iegūtās formulas ir apkopotas tabulā, pēc kuras (atkarībā no sistēmas koeficientiem) var noteikt dotās diferenciālvienādojumu sistēmas atrisinājumu veidu.

Doto darbu var izmantot studenti un maģistranti, to var izmantot arī pašmācībai.

Autore izsaka pateicību prof. F. Sadirbajevam par vērtīgiem priekšlikumiem.

Uzdevuma nostādne

Apskatīsim vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x'' &= ax + by, \\ y'' &= cx + dy, \end{cases} \tag{1}$$

kur $x = x(t),\ y = y(t)$, bet koeficienti $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Doto sistēmu var reducēt uz ceturtās kārtas diferenciālvienādojumu attiecībā pret vienu no funkcijām $x(t)$ vai $y(t)$. Ja $b \neq 0$, tad

$$x^{IV} - (a+d)x'' + (ad - bc)x = 0. \tag{2}$$

Savukārt, ja $c \neq 0$, tad

$$y^{IV} - (a+d)y'' + (ad - bc)y = 0. \tag{3}$$

Attiecīgajam raksturvienādojumam ir veids

$$\lambda^4 - (a+d)\lambda^2 + (ad - bc) = 0. \tag{4}$$

Apzīmējot $\lambda^2 = r$, iegūsim kvadrātvienādojumu

$$r^2 - (a+d)r + (ad - bc) = 0, \tag{5}$$

kura saknes un līdz ar to arī vienādojumu sistēmas (1) atrisinājumi ir atkarīgi no koeficientiem a, b, c, d.

Uzdevums: noteikt diferenciālvienādojumu sistēmas (1) ***atrisinājumus atkarībā no koeficientiem*** a, b, c ***un*** d***.***

Apskatīsim iespējamos gadījumus.

1. $ad - bc \neq 0$

Vienādojuma (5) sakņu raksturs ir atkarīgs no diskriminanta

$$D = (a+d)^2 - 4(ad-bc) = (a-d)^2 + 4bc.$$

1.1. $\begin{cases} (a-d)^2 + 4bc > 0, \\ ad - bc > 0, \\ a + d > 0. \end{cases}$

Pieņemsim, ka

$$\begin{cases} (a-d)^2 + 4bc > 0, \\ ad - bc > 0, \\ a + d > 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Vienādojumam (5) ir divas pozitīvas reālas saknes, tāpēc raksturvienādojumam (4) ir četras dažādas (pa pāriem ar dažādām zīmēm) reālas saknes λ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$. Tātad diferenciālvienādojumu (1) atrisinājumi ir funkcijas

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{i=1}^{4} A_i\, e^{\lambda_i t}, \\ y(t) &= \sum_{i=1}^{4} B_i\, e^{\lambda_i t}, \end{aligned} \tag{1.1*}$$

kur koeficienti A_i, B_i apmierina vienādības

$$\begin{aligned} B_i\, b + A_i\, (a - \lambda_i^2) &= 0, \\ A_i\, c + B_i\, (d - \lambda_i^2) &= 0. \end{aligned} \tag{1.1**}$$

Piemērs.

$$\begin{cases} x'' = 2x + y, \\ y'' = 2x + 3y. \end{cases}$$

Sistēmas koeficienti apmierina nosacījumus (1.1). Atbilstošajam kvadrātvienādojumam (5) ir veids

$$r^2 - 5r + 4 = 0,$$

tā saknes ir $r_1 = 1$, $r_2 = 4$. Tāpēc raksturvienādojuma (4) saknes ir $\lambda_{1,2} = \pm 1$ un $\lambda_{3,4} = \pm 2$. Saskaņā ar formulām (1.1*) un (1.1**) dotās vienādojumu sistēmas atrisinājumi ir funkcijas

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1\, e^{t} + A_2\, e^{-t} + A_3\, e^{2t} + A_4\, e^{-2t}, \\ y(t) &= -A_1\, e^{t} - A_2\, e^{-t} + 2A_3\, e^{2t} + 2A_4\, e^{-2t}. \end{aligned}$$

1.2. $\begin{cases} (a-d)^2 + 4bc > 0, \\ ad - bc > 0, \\ a + d < 0. \end{cases}$

Pieņemsim, ka

$$\begin{cases} (a-d)^2 + 4bc > 0, \\ ad - bc > 0, \\ a + d < 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Vienādojumam (5) ir divas negatīvas reālas saknes, tāpēc raksturvienādojumam (4) ir 4 kompleksas (pa pāriem saistītas) saknes $\lambda_{1,2} = \pm\, ik_1, \quad \lambda_{3,4} = \pm\, ik_2$. Tātad sistēmas (1) atrisinājumi ir funkcijas

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 \sin k_1 t + B_1 \cos k_1 t + C_1 \sin k_2 t + D_1 \cos k_2 t, \\ y(t) &= A_2 \sin k_1 t + B_2 \cos k_1 t + C_2 \sin k_2 t + D_2 \cos k_2 t, \end{aligned} \tag{1.2*}$$

kur koeficienti A_i, B_i apmierina vienādības

$$\begin{aligned} A_2 b + A_1(a + k_1^2) &= 0, & A_1 c + A_2(d + k_1^2) &= 0, \\ B_2 b + B_1(a + k_1^2) &= 0, & B_1 c + B_2(d + k_1^2) &= 0, \\ C_2 b + C_1(a + k_2^2) &= 0, & C_1 c + C_2(d + k_2^2) &= 0, \\ D_2 b + D_1(a + k_2^2) &= 0, & D_1 c + D_2(d + k_2^2) &= 0. \end{aligned} \tag{1.2**}$$

Piemērs.

$$\begin{cases} x'' = -2x + 2y, \\ y'' = x - 3y. \end{cases}$$

Sistēmas koeficienti apmierina nosacījumus (1.2). Atbilstošajam kvadrātvienādojumam (5) ir veids

$$r^2 + 5r + 4 = 0,$$

tā saknes ir $r_1 = -1$, $r_2 = -4$. Tāpēc raksturvienādojuma (4) saknes ir $\lambda_{1,2} = \pm i$ un $\lambda_{3,4} = \pm 2i$. Saskaņā ar formulām (1.2*) un (1.2**) dotās vienādojumu sistēmas atrisinājumi ir funkcijas

$$\begin{aligned} y(t) &= A \sin t + B \cos t + C \sin 2t + D \cos 2t, \\ x(t) &= 2A \sin t + 2B \cos t - C \sin 2t - D \cos 2t. \end{aligned}$$

Piezīme.

Gadījumi (1.1) un (1.2) pilnīgi apraksta situāciju, kad vienādojumu sistēmas (1) koeficienti apmierina nevienādības

$$\begin{cases} (a-d)^2 + 4bc > 0, \\ ad - bc > 0, \end{cases}$$

jo, izpildoties šiem nosacījumiem, ir spēkā $a + d \neq 0$. Tiešām, ja pieņemt, ka $a + d = 0$, izpildoties nosacījumam $ad - bc > 0$, tad kvadrātvienādojumam (5) nav reālu sakņu, kas ir pretrunā ar nosacījumu $D = (a-d)^2 + 4bc > 0$.

1.3. $\begin{cases} (a-d)^2+4bc>0, \\ ad-bc<0. \end{cases}$

Pieņemsim, ka

$$\begin{cases} (a-d)^2+4bc>0, \\ ad-bc<0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Vienādojumam (5) ir divas pretēju zīmju reālas saknes, tāpēc raksturvienādojumam (4) ir divas pretēju zīmju reālas saknes $\pm\,\lambda$ un divas kompleksi saistītas saknes $\pm\, ik$. Tātad vienādojumu sistēmas (1) atrisinājumi ir funkcijas

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1e^{\lambda t}+B_1e^{-\lambda t}+C_1\sin kt+D_1\cos kt, \\ y(t) &= A_2e^{\lambda t}+B_2e^{-\lambda t}+C_2\sin kt+D_2\cos kt, \end{aligned} \tag{1.3*}$$

kur koeficienti A_i, B_i, C_i, D_i apmierina vienādības

$$\begin{aligned} A_2b+A_1(a-\lambda^2)&=0, & A_1c+A_2(d-\lambda^2)&=0, \\ B_2b+B_1(a-\lambda^2)&=0, & B_1c+B_2(d-\lambda^2)&=0, \\ C_2b+C_1(a+k^2)&=0, & C_1c+C_2(d+k^2)&=0, \\ D_2b+D_1(a+k^2)&=0, & D_1c+D_2(d+k^2)&=0. \end{aligned} \tag{1.3**}$$

Piemērs.

$$\begin{cases} x''=x+y, \\ y''=-y. \end{cases}$$

Sistēmas koeficienti apmierina nosacījumus (1.3). Atbilstošajam kvadrātvienādojumam (5) ir veids

$$r^2-1=0,$$

tā saknes ir $r_1=1$, $r_2=-1$. Tāpēc raksturvienādojuma (4) saknes ir $\lambda_{1,2}=\pm 1$ un $\lambda_{3,4}=\pm i$. Saskaņā ar formulām (1.3*) un (1.3**) dotās vienādojumu sistēmas atrisinājumi ir funkcijas

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^t+Be^{-t}+C\sin t+D\cos t, \\ y(t) &= -2C\sin t-2D\cos t. \end{aligned}$$

Piezīme.

Nosacījums $(a-d)^2+4bc>0$ tika ieviests ērtības labad, lai noteiktu atbilstošā kvadrātvienādojuma sakņu raksturu (ja diskriminants ir pozitīvs, tad vienādojumam ir divas dažādas reālas saknes). Pietiekami bija pieprasīt tikai sistēmas (1.3) otrās nevienādības, t.i., $ad-bc<0$, izpildīšanos. Tiešām, ja $ad-bc<0$, tad

$$D=(a+d)^2-4(ad-bc)>0.$$

1.4. $\begin{cases} (a-d)^2+4bc=0, \\ a+d>0. \end{cases}$

Pieņemsim, ka

$$\begin{cases} (a-d)^2+4bc=0, \\ a+d>0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Vienādojumam (5) ir divas vienādas pozitīvas saknes, tāpēc raksturvienādojumam (4) ir reālas saknes $\lambda_{1,2}=s$ un $\lambda_{3,4}=-s$, kur $s=\sqrt{\frac{a+d}{2}}$. Tātad sistēmas (1) atrisinājumi ir funkcijas

$$\begin{aligned} x(t)&=(A_1+B_1t)e^{st}+(C_1+D_1t)e^{-st}, \\ y(t)&=(A_2+B_2t)e^{st}+(C_2+D_2t)e^{-st}, \end{aligned} \tag{1.4*}$$

kur koeficienti A_i, B_i, C_i, D_i apmierina vienādības

$$\begin{array}{rcl} A_2b+A_1(a-s^2)-2B_1s &=& 0, \\ B_2b+B_1(a-s^2) &=& 0, \\ C_2b+C_1(a-s^2)+2D_1s &=& 0, \\ D_2b+D_1(a-s^2) &=& 0, \\ \\ A_1c+A_2(d-s^2)-2B_2s &=& 0, \\ B_1c+B_2(d-s^2) &=& 0, \\ C_1c+C_2(d-s^2)+2D_2s &=& 0, \\ D_1c+D_2(d-s^2) &=& 0. \end{array} \tag{1.4**}$$

Piemērs.

$$\begin{cases} x''=3x+y, \\ y''=-x+5y. \end{cases}$$

Sistēmas koeficienti apmierina nosacījumus (1.4). Atbilstošajam kvadrātvienādojumam (5) ir veids

$$r^2-8r+16=0,$$

tā saknes $r_{1,2}=4$. Tāpēc raksturvienādojuma (4) saknes ir $\lambda_{1,2}=2$ un $\lambda_{3,4}=-2$. Saskaņā ar formulām (1.4*) un (1.4**) dotās sistēmas atrisinājumi ir funkcijas

$$\begin{aligned} x(t)&=(A+Bt)\,e^{2t}+(C+Dt)\,e^{-2t}, \\ y(t)&=(A+4B+Bt)\,e^{2t}+(C-4D+Dt)\,e^{-2t}. \end{aligned}$$

Jāatzīmē gadījuma (1.4) speciālgadījums, kad $a=d$. Šoreiz $s=\sqrt{a}$ un vienādības (1.4**) vienkāršojas, jo

$$a-s^2=d-s^2=0,$$

tāpēc arī atrisinājumiem (1.4*) ir cits veids.

Ja $a=d$ un $b\neq 0$, tad sistēmas (1) atrisinājumi ir funkcijas

$$\begin{aligned} x(t)&=(A+Bt)e^{\sqrt{a}\,t}+(C+Dt)e^{-\sqrt{a}\,t}, \\ y(t)&=\tfrac{2B\sqrt{a}}{b}\,e^{\sqrt{a}\,t}-\tfrac{2D\sqrt{a}}{b}\,e^{-\sqrt{a}\,t}. \end{aligned} \tag{1.4.1*}$$

Ja $a=d$ un $c\neq 0$, tad sistēmas (1) atrisinājumi ir funkcijas

$$\begin{aligned} y(t)&=(A+Bt)e^{\sqrt{a}\,t}+(C+Dt)e^{-\sqrt{a}\,t}, \\ x(t)&=\tfrac{2B\sqrt{a}}{c}\,e^{\sqrt{a}\,t}-\tfrac{2D\sqrt{a}}{c}\,e^{-\sqrt{a}\,t}. \end{aligned} \tag{1.4.2*}$$

Piemērs.

$$\begin{cases} x'' = x, \\ y'' = x + y. \end{cases}$$

Sistēmas koeficienti apmierina nosacījumus (1.4), pie tam $a = d$ un $c \neq 0$. Atbilstošajam kvadrātvienādojumam (5) ir veids

$$r^2 - 2r + 1 = 0,$$

tā saknes ir $r_{1,2} = 1$. Tāpēc raksturvienādojuma (4) saknes ir $\lambda_{1,2} = 1$ un $\lambda_{3,4} = -1$. Saskaņā ar formulām (1.4.2*) dotās sistēmas atrisinājumi ir funkcijas

$$\begin{aligned} &y(t) = (A + Bt)e^t + (C + Dt)e^{-t}, \\ &x(t) = 2Be^t - 2De^{-t}. \end{aligned}$$

1.5. $\begin{cases} (a-d)^2 + 4bc = 0, \\ a + d < 0. \end{cases}$

Pieņemsim, ka

$$\begin{cases} (a-d)^2 + 4bc = 0, \\ a + d < 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Vienādojumam (5) ir divas vienādas negatīvas saknes, tāpēc raksturvienādojumam (4) ir divkāršas kompleksi saistītas saknes $\lambda_{1,2} = ik$ un $\lambda_{3,4} = -ik$, kur $k = \sqrt{-\frac{a+d}{2}}$. Tātad sistēmas (1) atrisinājumi ir funkcijas

$$\begin{aligned} x(t) &= (A_1 + B_1 t)\sin kt + (C_1 + D_1 t)\cos kt, \\ y(t) &= (A_2 + B_2 t)\sin kt + (C_2 + D_2 t)\cos kt, \end{aligned} \tag{1.5*}$$

kur koeficienti A_i, B_i, C_i, D_i apmierina vienādības

$$\begin{array}{rcl} A_2 b + A_1(a+k^2) + 2D_1 k &=& 0, \\ B_2 b + B_1(a+k^2) &=& 0, \\ C_2 b + C_1(a+k^2) - 2B_1 k &=& 0, \\ D_2 b + D_1(a+k^2) &=& 0, \\ \\ A_1 c + A_2(d+k^2) + 2D_2 k &=& 0, \\ B_1 c + B_2(d+k^2) &=& 0, \\ C_1 c + C_2(d+k^2) - 2B_2 k &=& 0, \\ D_1 c + D_2(d+k^2) &=& 0. \end{array} \tag{1.5**}$$

Piemērs.

$$\begin{cases} x'' = -5x + y, \\ y'' = -x - 3y. \end{cases}$$

Sistēmas koeficienti apmierina nosacījumus (1.5). Atbilstošajam kvadrātvienādojumam (5) ir veids

$$r^2 + 8r + 16 = 0,$$

tā saknes $r_{1,2} = -4$. Tāpēc raksturvienādojuma (4) saknes ir $\lambda_{1,2} = 2i$ un $\lambda_{3,4} = -2i$. Saskaņā ar formulām (1.5*) un (1.5**) dotās vienādojumu sistēmas atrisinājumi ir funkcijas

$$\begin{aligned} x(t) &= (A + Bt)\,\sin 2t + (C + Dt)\,\cos 2t, \\ y(t) &= (A - 4D + Bt)\,\sin 2t + (C + 4B + Dt)\,\cos 2t. \end{aligned}$$

Vienādības (1.5**) vienkāršojas, ja $a = d$. Šajā gadījumā $k = \sqrt{-a}$, t.i., $a + k^2 = d + k^2 = 0$, tāpēc atrisinājumus (1.5*) var pierakstīt citā formā.

Ja $a = d$ un $b \neq 0$, tad sistēmas (1) atrisinājumi ir funkcijas

$$\begin{aligned} x(t) &= (A + Bt)\sin\sqrt{-a}t + (C + Dt)\cos\sqrt{-a}t, \\ y(t) &= \tfrac{2B\sqrt{-a}}{b}\,\cos\sqrt{-a}t - \tfrac{2D\sqrt{-a}}{b}\,\sin\sqrt{-a}t. \end{aligned} \tag{1.5.1*}$$

Ja $a = d$ un $c \neq 0$, tad sistēmas (1) atrisinājumi ir funkcijas

$$\begin{aligned} y(t) &= (A + Bt)\sin\sqrt{-a}t + (C + Dt)\cos\sqrt{-a}t, \\ x(t) &= \tfrac{2B\sqrt{-a}}{c}\,\cos\sqrt{-a}t - \tfrac{2D\sqrt{-a}}{c}\,\sin\sqrt{-a}t. \end{aligned} \tag{1.5.2*}$$

Piemērs.

$$\begin{cases} x'' = -x + 2y, \\ y'' = -y. \end{cases}$$

Sistēmas koeficienti apmierina nosacījumus (1.5), pie tam $a = d$ un $b \neq 0$. Atbilstošajam kvadrātvienādojumam (5) ir veids

$$r^2 + 2r + 1 = 0,$$

tā saknes $r_{1,2} = -1$. Tāpēc raksturvienādojuma (4) saknes ir $\lambda_{1,2} = i$ un $\lambda_{3,4} = -i$. Saskaņā ar formulām (1.5.1*) dotās vienādojumu sistēmas atrisinājumi ir funkcijas

$$\begin{aligned} x(t) &= (A + Bt)\sin t + (C + Dt)\cos t, \\ y(t) &= B\cos t - D\sin t. \end{aligned}$$

Piezīme.

Gadījumi (1.4) un (1.5) pilnīgi apraksta situāciju, kad $(a-d)^2 + 4bc = 0$. Tiešām, ja

$$(a-d)^2 + 4bc = (a+d)^2 - 4(ad - bc),$$

tad, pieņemot, ka $a + d = 0$, iegūsim pretrunu ar nosacījumu $ad - bc \neq 0$.

1.6. $(a-d)^2+4bc<0$.

Pieņemsim, ka

$$(a-d)^2+4bc<0. \tag{1.6}$$

Šajā gadījumā vienādojumam (5) ir divas kompleksas saknes

$$r_{1,2}=\frac{a+d\pm i\sqrt{-(a-d)^2-4bc}}{2}.$$

Lai aprēķinātu raksturvienādojuma (4) saknes, ir jāatrod komplekso skaitļu $r_{1,2}$ reālā un imaginārā sastāvdaļas, kā arī šo komplekso skaitļu viena argumenta vērtība:

$$\mathrm{Re}\ r_{1,2}=\tfrac{a+d}{2},$$

$$\mathrm{Im}\ r_{1,2}=\tfrac{\sqrt{-(a-d)^2-4bc}}{2},$$

$$\varphi_0=\mathrm{arctg}\left|\tfrac{\sqrt{-(a-d)^2-4bc}}{a+d}\right|.$$

Tad

$$|\ r_{1,2}\ |=\sqrt{\left(\frac{a+d}{2}\right)^2+\frac{-(a-d)^2-4bc}{4}}=\sqrt{ad-bc}$$

un raksturvienādojuma (4) saknes var pierakstīt formā $\lambda_n=\pm\alpha\pm i\beta\quad(n=1,2,3,4)$, kur

- ja $a+d>0$, tad

$$\alpha=\sqrt[4]{ad-bc}\,\cos\tfrac{\varphi_0}{2},$$
$$\beta=\sqrt[4]{ad-bc}\,\sin\tfrac{\varphi_0}{2};$$

- ja $a+d<0$, tad

$$\alpha=\sqrt[4]{ad-bc}\,\sin\tfrac{\varphi_0}{2},$$
$$\beta=\sqrt[4]{ad-bc}\,\cos\tfrac{\varphi_0}{2};$$

- ja $a+d=0$, tad

$$\alpha=\beta=\sqrt[4]{ad-bc}\,\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Tātad sistēmas (1) atrisinājumus var pierakstīt formā

$$\begin{aligned}x(t)&=e^{\alpha t}\left(A_1\sin\beta t+B_1\cos\beta t\right)+e^{-\alpha t}\left(C_1\sin\beta t+D_1\cos\beta t\right),\\ y(t)&=e^{\alpha t}\left(A_2\sin\beta t+B_2\cos\beta t\right)+e^{-\alpha t}\left(C_2\sin\beta t+D_2\cos\beta t\right),\end{aligned} \tag{1.6*}$$

kur koeficienti A_i, B_i, C_i, D_i apmierina vienādības

$$\begin{aligned}A_2b+A_1(a+\beta^2-\alpha^2)+2B_1\alpha\beta&=0,\\ B_2b+B_1(a+\beta^2-\alpha^2)-2A_1\alpha\beta&=0,\\ C_2b+C_1(a+\beta^2-\alpha^2)-2D_1\alpha\beta&=0,\\ D_2b+D_1(a+\beta^2-\alpha^2)+2C_1\alpha\beta&=0,\\ \\ A_1c+A_2(d+\beta^2-\alpha^2)+2B_2\alpha\beta&=0,\\ B_1c+B_2(d+\beta^2-\alpha^2)-2A_2\alpha\beta&=0,\\ C_1c+C_2(d+\beta^2-\alpha^2)-2D_2\alpha\beta&=0,\\ D_1c+D_2(d+\beta^2-\alpha^2)+2C_2\alpha\beta&=0.\end{aligned} \tag{1.6**}$$

Koeficientu A_i, B_i, C_i, D_i savstarpējo saistību var izteikt, izmantojot sistēmas (1) koeficientus a, b, c, d. Tiešām, ja $a + d = 0$, tad

$$\begin{array}{c} A_2 b + A_1 a + B_1 \sqrt{ad - dc} = 0, \\ B_2 b + B_1 a - A_1 \sqrt{ad - dc} = 0, \\ C_2 b + C_1 a - D_1 \sqrt{ad - dc} = 0, \\ D_2 b + D_1 a + C_1 \sqrt{ad - dc} = 0, \\ \\ A_1 c + A_2 d + B_2 \sqrt{ad - dc} = 0, \\ B_1 c + B_2 d - A_2 \sqrt{ad - dc} = 0, \\ C_1 c + C_2 d - D_2 \sqrt{ad - dc} = 0, \\ D_1 c + D_2 d + C_2 \sqrt{ad - dc} = 0. \end{array} \tag{1.6.1**}$$

Savukārt, ja $a + d > 0$, tad

$$\beta^2 - \alpha^2 = \sqrt{ad - bc} \left(\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \cos^2 \frac{\varphi_0}{2} \right) =$$
$$= -\sqrt{ad - bc} \cos \varphi_0 = -\frac{|a + d|}{2} = -\frac{a + d}{2};$$

analoģiski, ja $a + d < 0$, tad

$$\beta^2 - \alpha^2 = \sqrt{ad - bc} \left(\cos^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \right) =$$
$$= \sqrt{ad - bc} \cos \varphi_0 = \frac{|a + d|}{2} = -\frac{a + d}{2};$$

tāpēc abos pēdējos gadījumos

$$a + \beta^2 - \alpha^2 = \tfrac{a-d}{2},$$
$$d + \beta^2 - \alpha^2 = \tfrac{d-a}{2},$$

bez tam

$$2\alpha\beta = \sqrt{ad - bc} \sin \varphi_0 = \frac{\sqrt{-(a-d)^2 - 4bc}}{2}.$$

Tādējādi, ja $a + d \neq 0$, tad formulu (1.6*) koeficienti A_i, B_i, C_i, D_i apmierina vienādības

$$\begin{array}{c} 2A_2 b + A_1 (a - d) + B_1 \sqrt{-(a-d)^2 - 4bc} = 0, \\ 2B_2 b + B_1 (a - d) - A_1 \sqrt{-(a-d)^2 - 4bc} = 0, \\ 2C_2 b + C_1 (a - d) - D_1 \sqrt{-(a-d)^2 - 4bc} = 0, \\ 2D_2 b + D_1 (a - d) + C_1 \sqrt{-(a-d)^2 - 4bc} = 0, \\ \\ 2A_1 c + A_2 (d - a) + B_2 \sqrt{-(a-d)^2 - 4bc} = 0, \\ 2B_1 c + B_2 (d - a) - A_2 \sqrt{-(a-d)^2 - 4bc} = 0, \\ 2C_1 c + C_2 (d - a) - D_2 \sqrt{-(a-d)^2 - 4bc} = 0, \\ 2D_1 c + D_2 (d - a) + C_2 \sqrt{-(a-d)^2 - 4bc} = 0. \end{array} \tag{1.6.2**}$$

Piemērs.

$$\begin{cases} x'' = x + y, \\ y'' = -2x - y. \end{cases}$$

Sistēmas koeficienti apmierina nosacījumus (1.6). Raksturvienādojumam (4) ir kompleksas saknes $\lambda_{1,2,3,4} = \pm\alpha \pm i\beta$. Pie tam $a + d = 0$ un $ad - bc = 1$, tāpēc $\alpha = \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Saskaņā ar formulām (1.6*) un (1.6.1**) dotās sistēmas atrisinājumi ir funkcijas

$$x(t) = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t}\left(A\sin\frac{\sqrt{2}}{2}t + B\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t}\left(C\sin\frac{\sqrt{2}}{2}t + D\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t\right),$$

$$y(t) = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t}\left((-A - B)\sin\frac{\sqrt{2}}{2}t + (A - B)\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) +$$

$$+ e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t}\left((D - C)\sin\frac{\sqrt{2}}{2}t + (-C - D)\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t\right).$$

Piemērs.

$$\begin{cases} x'' = x + y, \\ y'' = -x. \end{cases}$$

Sistēmas koeficienti apmierina nosacījumus (1.6). Raksturvienādojumam (4) ir kompleksas saknes $\lambda_{1,2,3,4} = \pm\alpha \pm i\beta$. Lai atrastu α un β, aprēķināsim φ_0. Tā kā

$$(a - d)^2 + 4bc = -3,\ a + d = 1,\ ad - bc = 1,$$

tad $\varphi_0 = \operatorname{arctg}\sqrt{3}$, tāpēc

$$\alpha = \cos\frac{\varphi_0}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \beta = \sin\frac{\varphi_0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Saskaņā ar formulām (1.6*) un (1.6.2**) dotās sistēmas atrisinājumi ir funkcijas

$$x(t) = e^{\frac{\sqrt{3}}{2}t}\left(2A\sin\frac{t}{2} + 2B\cos\frac{t}{2}\right) + e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}t}\left(2C\sin\frac{t}{2} + 2D\cos\frac{t}{2}\right),$$

$$y(t) = e^{\frac{\sqrt{3}}{2}t}\left((-A - \sqrt{3}B)\sin\frac{t}{2} + (\sqrt{3}A - B)\cos\frac{t}{2}\right) +$$

$$+ e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}t}\left((\sqrt{3}D - C)\sin\frac{t}{2} + (-\sqrt{3}C - D)\cos\frac{t}{2}\right).$$

2. $ad - bc = 0$.

Ja $ad-bc=0$, tad vienādojuma (5) saknes ir $r_1=0$ un $r_2=a+d$. Atbilstošā raksturvienādojuma (4) sakņu raksturs ir atkarīgs no tā, vai sakne r_2 būs pozitīva, negatīva, vai vienāda ar 0. Apskatīsim iespējamos gadījumus.

2.1. $\begin{cases} ad-bc=0, \\ a+d>0. \end{cases}$

Pieņemsim, ka

$$\begin{cases} ad-bc=0, \\ a+d>0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Šajā gadījumā raksturvienādojumam (4) ir divkārša sakne $\lambda_{1,2}=0$ un divas pretēju zīmju reālas saknes $\lambda_{3,4}=\pm\sqrt{a+d}$. Tāpēc sistēmas (1) atrisinājumi ir šādas funkcijas:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 + B_1 t + C_1 e^{\sqrt{a+d}t} + D_1 e^{-\sqrt{a+d}t}, \\ y(t) &= A_2 + B_2 t + C_2 e^{\sqrt{a+d}t} + D_2 e^{-\sqrt{a+d}t}, \end{aligned} \tag{2.1*}$$

kur koeficienti A_i, B_i, C_i, D_i apmierina vienādības

$$\begin{aligned} A_2 b + A_1 a &= 0, & A_1 c + A_2 d &= 0, \\ B_2 b + B_1 a &= 0, & B_1 c + B_2 d &= 0, \\ C_2 b - C_1 d &= 0, & C_1 c - C_2 a &= 0, \\ D_2 b - D_1 d &= 0, & D_1 c - D_2 a &= 0. \end{aligned} \tag{2.1**}$$

Piemērs.

$$\begin{cases} x'' = 2x + y, \\ y'' = 4x + 2y. \end{cases}$$

Sistēmas koeficienti apmierina nosacījumus (2.1). Atbilstošajam kvadrātvienādojumam (5) ir veids

$$r^2 - 4r = 0,$$

tā saknes ir $r_1=0$ un $r_2=4$. Tāpēc raksturvienādojuma (4) saknes ir $\lambda_{1,2}=0$ un $\lambda_{3,4}=\pm 2$. Saskaņā ar formulām (2.1*) un (2.1**) dotās sistēmas atrisinājumi ir funkcijas

$$\begin{aligned} x(t) &= A + Bt + Ce^{2t} + De^{-2t}, \\ y(t) &= -2A - 2Bt + 2Ce^{2t} + 2De^{-2t}. \end{aligned}$$

2.2. $\begin{cases} ad - bc = 0, \\ a + d < 0. \end{cases}$

Pieņemsim, ka

$$\begin{cases} ad - bc = 0, \\ a + d < 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Šajā gadījumā raksturvienādojumam (4) ir divkārša sakne $\lambda_{1,2} = 0$ un kompleksi saistītas saknes $\lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{-(a+d)}$. Tāpēc sistēmas (1) atrisinājumi ir funkcijas

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 + B_1 t + C_1 \sin\sqrt{-(a+d)}t + D_1 \cos\sqrt{-(a+d)}t, \\ y(t) &= A_2 + B_2 t + C_2 \sin\sqrt{-(a+d)}t + D_2 \cos\sqrt{-(a+d)}t, \end{aligned} \tag{2.2*}$$

kur koeficienti A_i, B_i, C_i, D_i apmierina vienādības (2.1**).

Piemērs.

$$\begin{cases} x'' = -5x + 10y, \\ y'' = 2x - 4y. \end{cases}$$

Sistēmas koeficienti apmierina nosacījumus (2.2). Atbilstošajam kvadrātvienādojumam (5) ir veids

$$r^2 + 9r = 0,$$

tā saknes ir $r_1 = 0$ un $r_2 = -9$. Tāpēc raksturvienādojuma (4) saknes ir $\lambda_{1,2} = 0$ un $\lambda_{3,4} = \pm 3i$. Saskaņā ar formulām (2.2*) un (2.1**) dotās sistēmas atrisinājumi ir funkcijas

$$\begin{aligned} y(t) &= A + Bt + 2C \sin 3t + 2D \cos 3t, \\ x(t) &= 2A + 2Bt - 5C \sin 3t - 5D \cos 3t. \end{aligned}$$

2.3. $\begin{cases} ad - bc = 0, \\ a + d = 0. \end{cases}$

Pieņemsim, ka

$$\begin{cases} ad - bc = 0, \\ a + d = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Šajā gadījumā raksturvienādojumam (4) ir četrkārša sakne $\lambda_{1,2,3,4} = 0$, tāpēc sistēmas (1) atrisinājumi ir funkcijas

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 + B_1 t + C_1 t^2 + D_1 t^3, \\ y(t) &= A_2 + B_2 t + C_2 t^2 + D_2 t^3, \end{aligned} \tag{2.3*}$$

kur koeficienti A_i, B_i, C_i, D_i apmierina vienādības

$$\begin{aligned} A_2 b + A_1 a - 2C_1 &= 0, & A_1 c + A_2 d - 2C_2 &= 0, \\ B_2 b + B_1 a - 6D_1 &= 0, & B_1 c + B_2 d - 6D_2 &= 0, \\ C_2 b + C_1 a &= 0, & C_1 c + C_2 d &= 0, \\ D_2 b + D_1 a &= 0, & D_1 c + D_2 d &= 0. \end{aligned} \tag{2.3**}$$

Piemērs.

$$\begin{cases} x'' = -x - y, \\ y'' = x + y. \end{cases}$$

Sistēmas koeficienti apmierina nosacījumus (2.3). Atbilstošā raksturvienādojuma (4) saknes ir $\lambda_{1,2,3,4} = 0$. Saskaņā ar formulām (2.3*) un (2.3**) dotās sistēmas atrisinājumi ir funkcijas

$$\begin{aligned} y(t) &= A + Bt + Ct^2 + Dt^3, \\ x(t) &= (2C - A) + (6D - B)t - Ct^2 - Dt^3. \end{aligned}$$

Piezīme.

Vienādības (2.1**) un (2.3**) (kā arī vienādības (1.1**)-(1.6**)) ir spēkā arī tad, ja daži no koeficientiem a, b, c, d ir vienādi ar 0, kā arī speciālgadījumā, ja visi šie koeficienti ir vienādi ar 0.

Piemērs.

$$\begin{cases} x'' = 0, \\ y'' = 0. \end{cases}$$

Sistēmas koeficienti apmierina nosacījumus (2.3). No formulām (2.3**) izriet, ka $C_1 = C_2 = D_1 = D_2 = 0$, savukārt koeficienti A_1, A_2, B_1, B_2, vispārīgi runājot, var būt jebkuri, un tie nav savstarpēji saistīti ne ar kādām sakarībām. Tāpēc saskaņā ar formulām (2.3*) dotās sistēmas atrisinājumi ir funkcijas

$$\begin{aligned} x(t) &= A + Bt, \\ y(t) &= C + Dt. \end{aligned}$$

Formulu apkopojums

Zemāk tabulā ir sniegta apskatāmās diferenciālvienādojumu sistēmas risināšanas shēma. Paskaidrosim šīs shēmas lietošanu.

- Nosaka dotās sistēmas koeficientus a, b, c un d un aprēķina $ad - bc$. Atkarībā no tā, kāda ir izteiksme $ad - bc$ (pozitīva, negatīva vai vienāda ar 0), rīkojas šādi.

  1. Ja $ad - bc > 0$, tad aprēķina $(a - d)^2 + 4bc$.
     (a) Ja $(a-d)^2+4bc \geq 0$, tad aprēķina $a+d$. Atkarībā no tā, kāda ir izteiksme $(a-d)^2+4bc$ (pozitīva vai vienāda ar 0) un kāda ir izteiksme $a + d$ (pozitīva vai negatīva), iegūst vienu no gadījumiem (1.1), (1.2), (1.4) vai (1.5). Dotās sistēmas atrisinājumiem būs tāds veids, kāds tas ir uzrādīts tabulas pēdējā ailē un attiecīgajā rindiņā.
     (b) Ja $(a - d)^2 + 4bc < 0$, tad iegūst gadījumu (1.6). Dotās sistēmas atrisinājumiem būs tāds veids, kāds tas ir uzrādīts tabulas pēdējā ailē un attiecīgajā rindiņā.
  2. Ja $ad - bc = 0$, tad aprēķina $a + d$. Atkarībā no tā, kāda ir izteiksme $a + d$ (pozitīva, negatīva vai vienāda ar 0), iegūst vienu no gadījumiem (2.1), (2.2) vai (2.3). Dotās sistēmas atrisinājumiem būs tāds veids, kāds tas ir uzrādīts tabulas pēdējā ailē un attiecīgajā rindiņā.
  3. Ja $ad - bc < 0$, tad dotā sistēma atbilst gadījumam (1.3). Dotās sistēmas atrisinājumiem būs tāds veids, kāds tas ir uzrādīts tabulas pēdējā ailē un pēdējā rindiņā.

- Precizē nenoteiktos koeficientus, izmantojot atbilstošās vienādības: gadījumam (1.1) atbilst vienādības (1.1**), ... , gadījumam (2.3) atbilst vienādības (2.3**).

$ad-bc>0$	$(a-d)^2+4bc>0$	$a+d>0$ (1.1)	$x(t)=\sum_{i=1}^{4} A_i e^{\lambda_i t}, \quad y(t)=\sum_{i=1}^{4} B_i e^{\lambda_i t}$
		$a+d<0$ (1.2)	$x(t)=A_1\sin k_1t+B_1\cos k_1t+C_1\sin k_2t+D_1\cos k_2t$ $y(t)=A_2\sin k_1t+B_2\cos k_1t+C_2\sin k_2t+D_2\cos k_2t$
	$(a-d)^2+4bc=0$	$a+d>0$ (1.4)	$x(t)=(A_1+B_1t)e^{st}+(C_1+D_1t)e^{-st}$ $y(t)=(A_2+B_2t)e^{st}+(C_2+D_2t)e^{-st}$
		$a+d<0$ (1.5)	$x(t)=(A_1+B_1t)\sin kt+(C_1+D_1t)\cos kt$ $y(t)=(A_2+B_2t)\sin kt+(C_2+D_2t)\cos kt$
	$(a-d)^2+4bc<0$ (1.6)		$x(t)=e^{\alpha t}(A_1\sin\beta t+B_1\cos\beta t)+e^{-\alpha t}(C_1\sin\beta t+D_1\cos\beta t)$ $y(t)=e^{\alpha t}(A_2\sin\beta t+B_2\cos\beta t)+e^{-\alpha t}(C_2\sin\beta t+D_2\cos\beta t)$
$ad-bc=0$	$a+d>0$ (2.1)		$x(t)=A_1+B_1t+C_1e^{\sqrt{a+d}\,t}+D_1e^{-\sqrt{a+d}\,t}$ $y(t)=A_2+B_2t+C_2e^{\sqrt{a+d}\,t}+D_2e^{-\sqrt{a+d}\,t}$
	$a+d<0$ (2.2)		$x(t)=A_1+B_1t+C_1\sin\sqrt{-(a+d)}\,t+D_1\cos\sqrt{-(a+d)}\,t$ $y(t)=A_2+B_2t+C_2\sin\sqrt{-(a+d)}\,t+D_2\cos\sqrt{-(a+d)}\,t$
	$a+d=0$ (2.3)		$x(t)=A_1+B_1t+C_1t^2+D_1t^3$ $y(t)=A_2+B_2t+C_2t^2+D_2t^3$
$ad-bc<0$ (1.3)			$x(t)=A_1e^{\lambda t}+B_1e^{-\lambda t}+C_1\sin kt+D_1\cos kt$ $y(t)=A_2e^{\lambda t}+B_2e^{-\lambda t}+C_2\sin kt+D_2\cos kt$

Literatūra

[1] V. Stepanovs. Diferenciālvienādojumu kurss. - R.: LVI, 1953.

[2] I. Jermačenko. About the system of the second order linear differential equations with constant coefficients. - Abstracts of the 4th Latvian Mathematical Conference, Ventspils, 2002, p.20.

[3] Э. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - Москва: Наука, 1976.

[4] Н.М. Матвеев. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. - Москва: Высшая школа, 1963.

SATURS