DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra

Daugavpils Universitātes
Jauno matemātiķu skola

Grafu teorija - 2 (10.-12.kl)

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2008./2009.studiju gads

Saturs

1. Sakarīgums

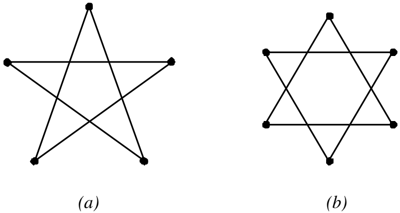
1.1. Sakarīgums neorientētos grafos

Grafu sauksim par *sakarīgu*, ja eksistē ķēde starp jebkurām divām virsotnēm.

Maksimālu sakarīgu apakšgrafu sauksim par grafa *sakarības komponenti*.

Var redzēt, ka grafs ir sakarīgs tad un tikai tad, ja eksistē virsotne v tāda, ka jebkurai citai virsotnei u eksistē maršruts $(u, ..., v)$.

1.1. piemērs. 3.12.attēla grafs (a) ir sakarīgs un grafs (b) nav sakarīgs un satur 2 komponentes.



3.12. attēls. Sakarīga un nesakarīga grafa piemēri

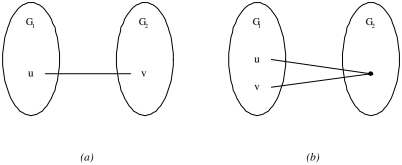
1.1. teorēma. Grafs ar n virsotnēm un mazāk kā $n-1$ šķautni nav sakarīgs.

PIERĀDĪJUMS Fiksēsim grafā kādu virsotni v. Ja grafs ir sakarīgs, tad eksistē ķēde no v līdz jebkurai no pārējām $n-1$ virsotnēm, tātad grafā ir vismaz $n-1$ šķautne. ■

1.2. teorēma. Ja grafs nav sakarīgs, tad tā papildgrafs ir sakarīgs.

PIERĀDĪJUMS Pieņemsim, ka grafs Γ nav sakarīgs. Tad tam eksistē vismaz divas komponentes Γ_1 un Γ_2. Mums ir jāpierāda, ka jebkuras divas virsotnes var savienot ar ķēdi papildgrafā $\overline{\Gamma}$.

Ja virsotnes pieder dažādām komponentēm, tad papildgrafā tās var savienot ar vienu šķautni vai, citiem vārdiem sakot, eksistē šīs virsotnes savienojošā ķēde ar garumu 1 (skatīt 3.13.(a) attēlā).



3.13. attēls. Ilustrācija pierādījumam

Ja abas virsotnes pieder vienai komponentei, tad tās papildgrafā var savienot ar divām šķautnēm un vienu virsotni citā komponentē, tātad eksistē šīs virsotnes savienojošā ķēde ar garumu 2 (skatīt 3.13.(b) attēlā). ■

1.2. piemērs. Valstī ir 15 pilsētas, katra no kurām ir savienota ar ne mazāk kā 7 citām pilsētām. Pierādīt, ka no jebkuras pilsētas var aizbraukt uz jebkuru citu (iespējams, ar pārsēšanos).

(Vispārinājums: n virsotnes, katras virsotnes pakāpe nav mazāka kā $[\frac{n-1}{2}]$.)

1.3. piemērs. Kādā valstī jebkuras divas pilsētas ir savienotas vai nu ar zemes ceļu, vai arī ar dzelzceļu. Pierādīt, ka var izvēlēties vienu transporta veidu (auto vai vilcienu) tā, lai no jebkuras pilsētas varētu aizbraukt uz jebkuru citu pilsētu izmantojot tikai šo transporta veidu.

Kādā valstī no galvaspilsētas iziet 2009 ceļi, no pilsētas A - 1 ceļš, no visām pārējām 5000 pilsētām - 1000 ceļi no katras. Katrs ceļš savieno divas pilsētas. Pierādīt, ka no galvaspilsētas var aizbraukt uz A.

Virsotni sauksim par *šarnīru*, ja tās izdzēšana palielina grafa komponenšu skaitu.

Šķautni sauksim par *tiltu*, ja tās izdzēšana palielina grafa komponenšu skaitu.

1.3. teorēma. Jebkurā sakarīgā grafā ar vismaz divām virsotnēm ir vismaz divas virsotnes, kas nav šarnīri.

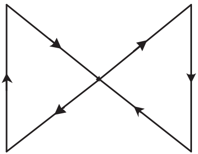
PIERĀDĪJUMS Jebkuras diametrālas ķēdes gali nevar būt šarnīri. ■

1.4. piemērs. Uzzīmējiet grafu ar 3 šarnīriem un 33 tiltiem, 33 šarnīriem un 3 tiltiem.

Uzzīmējiet grafu, kurā eksistē šarnīrs un katras virsotnes pakāpe ir vienāda ar 3.

Kādā valstī no katras pilsētas iziet 100 ceļi, no jebkuras pilsētas var aizbraukt uz jebkuru citu. Pierādīt, ka var slēgt jebkuru vienu ceļu un joprojām no jebkuras pilsētas varēs aizbraukt uz jebkuru citu pilsētu.

Kādā valstī ir vairāk kā 101 pilsēta, dažas pilsētas ir savienotas ar (divvirziena) ceļiem. Galvaspilsēta ir savienota ar 100 pilsētām, katra pilsēta, kas nav galvaspilsēta, ir savienota ar tieši 10 citām pilsētām. No jebkuras pilsētas var aizbraukt uz jebkuru citu pilsētu. Pierādīt, ka var slēgt vismaz pusi no visiem ceļiem, kas iziet no galvaspilsētas tā, lai joprojām no jebkuras pilsētas varētu aizbraukt uz jebkuru citu.



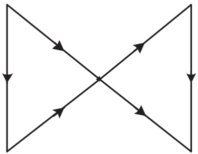
3.37. attēls. Stingri sakarīga grafa piemērs

1.2. Sakarīgums orientētos grafos

$\Gamma = (V, E)$ - orientēts grafs. Virsotnes v un w sauksim par *stingri sakarīgām*, ja eksistē virzītas ķēdes, kas saista v un w (abos virzienos), v un w sauksim par *vienpusīgi sakarīgām*, ja eksistē virzīta ķēde, kas saista v un w vismaz vienā virzienā.

Orientētu grafu sauksim par stingri sakarīgu, ja jebkuras divas virsotnes ir stingri sakarīgas.

Orientētu grafu sauksim par vienpusīgi sakarīgu, ja jebkuras divas vir-



3.38. attēls. Vienpusīgi sakarīga grafa piemērs

sotnes ir vienpusīgi sakarīgas.

Orientētu grafu sauksim par *vāji sakarīgu (sakarīgu)*, ja tam atbilstošais neorientētais grafs ir sakarīgs.

Par orientēta grafa *stingri sakarīgu komponenti* sauksim maksimālu stingri sakarīgu apakšgrafu.

Par orientēta grafa *vājās sakarības komponentēm* sauksim sakarības komponentes grafā, ko iegūst no dotā orientētā grafa, aizmirstot par šķautņu orientāciju.

1.5. piemērs. Kādā valstī jebkuras divas pilsētas ir savienotas ar vienvirziena ceļu. Pierādīt, ka eksistē pilsēta, no kuras var aizbraukt uz jebkuru citu pilsētu.

(Ar vienas šķautnes pārorientāciju pilnu orientētu grafu var pārvērst par stingri sakarīgu) Kādā valstī jebkuras divas pilsētas ir savienotas ar vienvirziena ceļu. Pierādīt, ka eksistē ceļš, kurā nomainot virzienu uz pretējo var panākt, ka no jebkuras pilsētas var aizbraukt uz jebkuru citu pilsētu

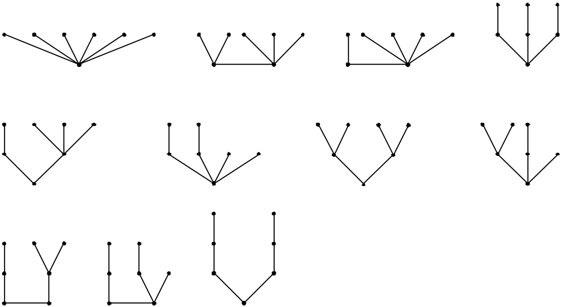
2. Koki

Par *koku* sauksim sakarīgu grafu bez cikliem.

Grafa apakšgrafu, kas satur visas virsotnes un ir koks, sauksim par grafa *pārklājošo koku*.

Vienkāršākās koku īpašības:

- katra koka virsotne, kuras pakāpe ir lielāka nekā 1, ir šarnīrs,
- katra koka šķautne ir tilts,
- katrs koks ir pārklājošais koks attiecībā uz sevi.



3.41. attēls. Visi koku izomorfisma tipi ar 7 virsotnēm

2.1. teorēma. $\Gamma = (V, E)$ - grafs ar $|V|$ virsotnēm un $|E|$ šķautnēm. Šādi apgalvojumi ir ekvivalenti:

1) Γ - koks;
2) Γ - sakarīgs grafs un $|E| = |V| - 1$;
3) Γ - aciklisks grafs un $|E| = |V| - 1$;
4) grafā Γ jebkuras divas dažādas virsotnes savieno tieši viena ķēde;
5) Γ - aciklisks grafs, kuram pievienojot vienu jaunu šķautni iegūst grafu ar tieši vienu ciklu.

PIERĀDĪJUMS Pierādīsim teorēmu, izmantojot ciklisko pierādīšanas tehniku. Ir jāpierāda, ka $(1) \rightarrow (2) \rightarrow (3) \rightarrow (4) \rightarrow (5) \rightarrow (1)$.

$(1) \rightarrow (2)$: izmantosim matemātisko indukciju ar argumentu $|V|$. Indukcijas bāze: ja $|V| = 1$, tad izteikums ir acīmredzams. Ja $|V| > 1$, tad jebkurai šķautnei e grafs $\Gamma - e$ satur 2 komponentes - kokus (grafā Γ nav ciklu) T_1 un T_2. Pieņemsim, ka šajās komponentēs ir $|V_1|$

vai $|V_2|$ virsotnes un $|E_1|$ vai $|E_2|$ šķautnes, kas saskaņā ar induktīvo pieņēmumu apmierina nosacījumus $|E_i| = |V_i| - 1$. Iegūstam, ka

$$|E| = |E_1| + |E_2| + 1 = (|V_1| - 1) + (|V_2| - 1) + 1 = (|V_1| + |V_2|) - 1 = |V| - 1.$$

(2) → (3): Γ ir sakarīgs grafs un $|E| = |V| - 1$. Jāpierāda, ka grafā nav ciklu. Pieņemsim, ka eksistē cikls, kas satur šķautni e. Grafs $\Gamma - e$ ir sakarīgs un satur $|V| - 2$ šķautnes. Tāds grafs nevar būt sakarīgs, jo tam šķautņu skaits ir par 2 mazāks nekā virsotņu skaits.

(3) → (4): pieņemsim, ka Γ ir aciklisks un $|E| = |V| - 1$. Pieņemsim, ka grafa komponenšu skaits ir C un i-tās komponentes virsotņu un šķautņu skaits ir $|V_i|$ un $|E_i|$. Tā kā katra komponente ir koks, tad $|E_i| = |V_i| - 1$ un

$$|E| = \sum_{i=1}^{C} (|V_i| - 1) = |V| - C.$$

Redzam, ka $C = 1$ un grafs ir sakarīgs. Ja eksistētu 2 virsotnes, kuras saista 2 dažādas ķēdes, tad eksistētu cikls.

(4) $\to$ (5)**:** ja grafā Γ būtu cikls, tad eksistētu divas dažādas ķēdes, kas savienotu divas virsotnes. Ja, pievienojot vienu šķautni, iegūtu divus dažādus ciklus, tad sākotnējā grafā starp attiecīgajām virsotnēm eksistētu divas dažādas ķēdes.

(5) $\to$ (1)**:** pierādīsim, ka grafs Γ ir sakarīgs. Ja virsotnes u un v piederētu 2 dažādām komponentēm, tad, pievienojot šķautni (u, v), mēs neiegūtu ciklu.

■

2.1. piezīme. Ja sakarīgam grafam ar n virsotnēm ir vismaz n šķautnes, tad tas satur ciklu.

2.2. teorēma. Kokā ir vismaz 2 virsotnes ar pakāpi 1.

PIERĀDĪJUMS Pieņemsim, ka kokā T ir $|V|$ virsotnes. Tā kā

$$\sum_{v \in V(T)} d(v) = 2(|V| - 1),$$

tad vismaz 2 saskaitāmie kreisajā pusē ir vienādi ar 1. ■

2.3. teorēma. Katram sakarīgam grafam eksistē pārklājošais koks.

PIERĀDĪJUMS Ja grafs sākotnēji nav koks, tad pakāpeniski pa vienai izdzēsīsim šķautnes, kas ieiet ciklos, katrā solī izdzēšot jebkuru no šķautnēm, kas piedalās kādā no cikliem.

Tā kā neviena šāda šķautne nevar būt tilts, tad tās izdzēšana nepadara grafu par nesakarīgu.

Katrā šādā šķautnes izdzēšanas operācijā virsotņu skaits nemainās, bet šķautņu skaits samazinās par 1.

Pēc galīga skaita soļu mēs iegūsim sakarīgu grafu, kuram izpildās nosacījums $|E| = |V| - 1$, tādējādi šis jauniegūtais grafs ir sākotnējā grafa apakšgrafs, kas satur visas virsotnes un ir koks. ■

2.4. teorēma. Katrs koks ir divdaļīgs grafs.

PIERĀDĪJUMS Patstāvīgs darbs vai diskusija. ■

2.1. piemērs. Kādā valstī ir 2008 pilsētas. Uzbūvējiet šādā valstī ceļu tīklu tā, lai tas saturētu minimāli iespējamo (divvirziena) ceļu skaitu, un no jebkuras pilsētas varētu aizbraukt uz jebkuru citu pilsētu braucot pa ne vairāk kā

a) 22 ceļiem;

b) 2 ceļiem.

Baktērija sadalījās 4 daļās, pēc tam katra jaunradīta baktērija dalījās 2 vai 3 daļās vai nedalījās. Pēc kāda laika baktēriju skaits bija 2008. To baktēriju skaits, kas sadalījās 2 daļās ir divas reizes lielāks nekā to baktēriju skaits, kas sadalījās 3 daļās. Cik baktērijas dalījās?

Volejbola tīklam ir taisnstūrveida rūtiņas, 40×500. Kāds ir maksimālais virvīšu skaits, kuras var pārgriezt tā. lai tīkls nesadalītos divās daļās?