DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra

Daugavpils Universitātes Jauno matemātiķu skola

Grafu teorija - 1 (10.-12.kl)

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2008./2009.studiju gads

Saturs

Svarīgākās grafu teorijas tēmas:

- virsotņu pakāpju summas īpašība neorientētiem un orientētiem grafiem,
- sakarīgums, sakarīgās komponentes, sakarīgums orientētos grafos,
- koki, pārklājošie koki,
- metriskie invarianti,
- cikli, Eilera un Hamiltona cikli neorientētos un orientētos grafos,
- neatkarīgas virsotņu un šķautņu kopas, dominēšana,
- planāri grafi, Eilera formula.

1. Ievads grafu teorijā

1.1. Piemēri

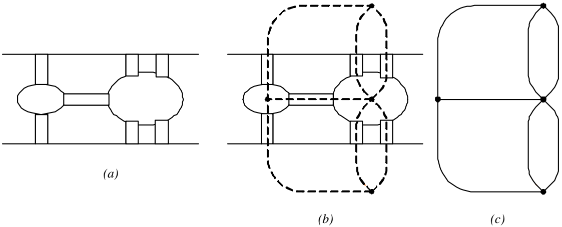
Viens no fundamentāliem matemātikas pamatjēdzieniem ir *attiecība* - īpašība, kas piemīt vai nepiemīt kopu elementu pāriem.

Uzdevumos par attiecībām ir lietderīgi mēģināt vizualizēt attiecības:

- Kopu elementus parasti attēlo kā punktus vai aplīšus ar tajos ierakstītu informāciju;
- tā kā attiecība ir īpašība, kas saista elementu pārus, tad šo īpašību ir pieņemts attēlot kā elementus saistošas nepārtrauktas līnijas (šķautnes, bultiņas, nogriežņus).

Šādu attiecības vizualizācijas veidu sauksim par tās *grafu*.

1.1. piemērs. Vēsturiski viens no pirmajiem publicētajiem grafu pielietošanas piemēriem ir atrisinājums izklaidējošās matemātikas "uzdevumam par Kēnigsbergas tiltiem", kura autors ir izcilais 18.gadsimta matemātiķis L.Eilers. Ir dota upe, kurā ir divas salas un vairāki tilti.



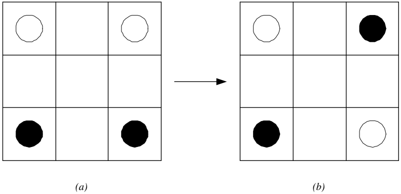
3.1. attēls. Uzdevums par Kēnigsbergas tiltiem

Vai ir iespējams iziet no kāda punkta, pāriet katru tiltu tieši vienu reizi un atgriezties sākotnējā punktā?

Tā kā uzdevuma risināšanā nozīmīga loma ir tiltiem, un trajektorijas, pa kurām tiek iets, nav svarīgas, tad modelēsim uzdevumu šādā veidā: piekārtosim katram sauszemes gabalam vienu punktu un saistīsim divus punktus ar līniju tad un tikai tad, ja atbilstošie sauszemes gabali ir saistīti ar tiltu.

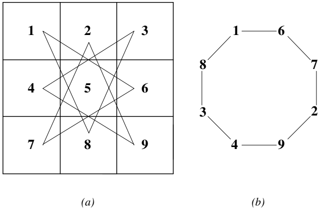
Ja uzdevumam eksistētu atrisinājums, tad iegūtajā grafā eksistētu noslēgts "ceļš", kurā tiek iets pa šķautnēm un kurš saturētu katru šķautni tieši vienu reizi. Ja eksistē tāds ceļš, tad katrai virsotnei ir jābūt ar pāra skaita šķautnēm. Bet šajā grafā ir virsotnes, kurām atbilst nepāra skaits šķautņu, tātad uzdevumam nav atrisinājuma.

1.2. piemērs. (No skolēnu olimpiāžu krājumiem). Uz 3×3 "šaha galda" ir izvietoti divi balti un divi melni zirgi tā, kā parādīts 3.2.(a) attēlā. Vai ir iespējams tos pārvietot uz stāvokli, kas parādīts 3.2.(b) attēlā, ja divas figūras nevar atrasties vienā lauciņā?



3.2. attēls. Uzdevums par četriem šaha zirgiem

Šajā uzdevumā izšķiroša loma ir rūtiņām un to savstarpējam izvietojumam, precīzāk, tam, vai rūtiņas saistītas ar zirga gājienu. Modelēsim uzdevumu šādi: piekārtosim katram lauciņam vienu virsotni un saistīsim divas virsotnes ar līniju, ja atbilstošie lauciņi ir saistīti ar zirga gājienu (skatīt 3.3.(a) attēlā).



3.3. attēls. Grafs uzdevumam par četriem šaha zirgiem

Tagad aizmirsīsim par šaha galdu kā fizikālu objektu un pārkārtosim grafa virsotnes tā, lai grafa struktūra ir labāk redzama (skatīt 3.3.(b) attēlā).

Var redzēt, ka uzdevumam nav atrisinājuma, jo sākuma stāvoklī starp diviem baltajiem zirgiem nav melnā zirga, bet beigu stāvoklī starp tiem ir jābūt melnajam zirgam, grafa šķautnes ir izvietotas tā, ka divi blakus esoši zirgi nevar pārlēkt viens otram pāri.

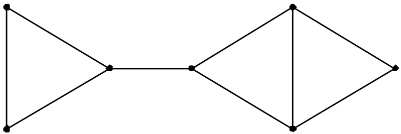
1.2. Grafu klases

Definēsim plašāk izmantotās grafu klases.

Neorientētie grafi. Par *grafu* (*neorientētu grafu*) sauksim pāri $\Gamma = (V, E)$, kur V - grafa *virsotņu kopa* un E ir grafa *neorientētu šķautņu kopa*.

Parasti ar terminu *grafs* pēc noklusēšanas tiek domāts *neorientēts grafs*.

Ja $\Gamma = (V, E)$ ir neorientēts grafs, tad tā virsotņu skaitu apzīmēsim ar $|V|$ un šķautņu skaitu apzīmēsim ar $|E|$.

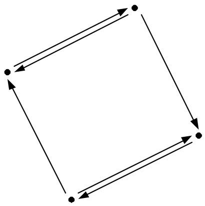


3.6. attēls. Neorientēta grafa piemērs

Divas neorientēta grafa virsotnes v_1, v_2 sauksim par *blakusvirsotnēm* (*savienotām virsotnēm*), ja $(v_1, v_2) \in E$, apzīmēsim to ar $v_1 \sim v_2$.

Orientētie grafi. Par *orientētu grafu* sauksim pāri $\Gamma = (V, E)$, kur V - orientēta grafa virsotņu kopa, E - *orientētu šķautņu kopa*.

Šķautni (u, v) parasti sauc par virsotnes u izejošo šķautni, un šķautni (v, u) - par u ieejošo šķautni.



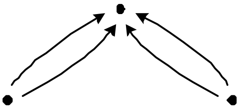
3.7. attēls. Orientēta grafa piemērs

No orientēta grafa var iegūt neorientētu grafu, ”aizmirstot” šķautņu orientāciju.

Otrādi, no neorientēta grafa var iegūt orientētu grafu, uzskatot katru neorientētu šķautni par divu pretēju orientētu šķautņu apvienojumu.

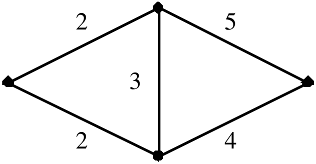
Var apskatīt *orientētu grafu ar cilpām* .

Multigrafi. Par *neorientētu* vai *orientētu multigrafu* sauksim grafu, kurā var būt vairāk nekā viena neorientēta vai orientēta šķautne starp divām virsotnēm vienā virzienā, tas var būt ar vai bez cilpām.



3.8. attēls. Orientēta multigrafa piemērs

Grafi ar svariem. Par *nosvērtu grafu* (*grafu ar indeksētām virsotnēm* un/vai *šķautnēm*) sauksim grafu, kura katrai virsotnei un/vai šķautnei var būt piekārtots skaitlis, vairāki skaitļi vai citu kopu elementi.



3.9. attēls. Nosvērta grafa piemērs

1.3. Grafu modeļi

1.3.1. Modeļu teorija

Jebkuras dabas un izcelsmes sistēmas vai procesa uzdošanu matemātisku objektu un sakarību veidā sauksim par šīs parādības *modeli*.

Modeļi tiek veidoti ar mērķi labāk saprast doto sistēmu.

Galvenie grafu modeļu tipi ir šādi:

- virsotnes un šķautnes ir fiziski objekti, šķautņu objekti fiziski saista virsotņu objektus;
- virsotnes ir fiziski vai nefiziski objekti, šķautnes saista virsotnes atkarībā no to īpašībam;
- virsotnes ir fiziski vai nefiziski objekti, iespējams, dažādos laika vai attīstības stāvokļos, šķautnes norāda stāvokļu attīstību (piemēram, laikā);

Lai izveidotu efektīvu dotās sistēmas/procesa grafu modeli, ir

1) jānosaka svarīgākās dotās modelējamās sistēmas apakšsistēmas/stāvokļi, kas tiks definētas kā grafa virsotnes;
2) jānosaka svarīgākās modelējamās attiecības starp virsotņu objektiem.

Pēc modeļa izveidošanas tiek risināti uzdevumi, kas attiecas uz modelējamo sistēmu.

1.3.2. Grafu modeļu piemēri

Zemāk ir pārskaitīti daži konkrēti grafu modeļi:

1. *matemātisku apgalvojumu grafs* (virsotnes - apgalvojumi, šķautnes - loģiskās secināšanas);
2. *funkcionālais grafs* (virsotnes - kopas elementi, šķautnes - funkcijas darbība);

3. *lielumu-sakarību grafs* (virsotnes - skaitliski lielumu un sakarības starp tiem, šķautnes - lieluma piedalīšanās sakarībā);
4. *metrikas grafs* (virsotnes - jebkura veida fiziski vai nefiziski objekti vai to kopas, šķautnes - objektu ģeometriskā, strukturālā, funkcionālā vai evolucionārā tuvība, pielieto lielu kopu analīzē);
5. *sistēmas grafs* (virsotnes - sistēmas komponentes, šķautnes - komponenšu mijiedarbība, pielieto sistēmu projektēšanā un analīzē);
6. *spēles grafs* (virsotnes - spēles stāvokļi, šķautnes - spēles noteikumu atļautas pārejas (gājieni) starp stāvokļiem, pielieto spēļu uzvarošo stratēģiju izstrādāšanā);
7. *datortīkls* (vispārīgā gadījumā - komunikāciju tīkls) (virsotnes - datori vai komunikāciju mezgli, šķautnes - sakaru līnijas, pielieto datortīklu projektēšanā un analīzē);
8. *sociālais grafs* (virsotnes - cilvēki vai to kopas, šķautnes - pazīšanās, ekonomiskas vai cita veida attiecības, pielieto sabiedrības analīzē un attīstības plānošanā);

9. *darbinieku-pienākumu grafs* (virsotnes - darbinieki un pienākumi vai darbi, šķautnes - attiecības, kas darbiniekiem piekārto to iespējamos pienākumus);
10. *ģenealoģiskais koks* (virsotnes - cilvēki, šķautnes - "vecāku-bērnu" attiecības);
11. *ceļu grafs* (virsotnes - pilsētas, šķautnes - ceļi);
12. *ielu grafs* (virsotnes - krustojumi, šķautnes - ielas);
13. *asinsvadu grafs* (virsotnes - asinsvadu sazarojumi, šķautnes - asinsvadi).

Matemātiskajās sacensībās bieži tiek piedāvāti uzdevumu ar šādiem modeļiem:

- sociālie grafi (draugi, pazīšanās);
- transporta vai sakaru tīklu grafi (ielas, pilsētas un ceļi, ezeri, salas un upes, datortīkli);
- sacensību grafi (virsotnes - komandas, orientētas šķautnes - spēļu iznākumi);

- kopu iekļaušanas grafi (virsotnes - kopas, šķautnes - iekļaušana);
- šaha galds (virsotnes - lauciņi);
- daudzskaldņu grafi (virsotnes - ģeometriskās virsotnes, šķautnes - ģeometriskās šķautnes);
- plakanu līniju līniju grafi (virsotnes - līniju daļu krustpunkti, šķautnes - līnju daļas starp krustpunktiem);
- ģenealoģiskie grafi (cilvēki, baktērijas);
- spēļu grafi (virsotnes - spēles stāvokļi, šķautnes - atļautie gājieni, sīkāk neapskatīsim).

1.4. Speciālas grafu klases

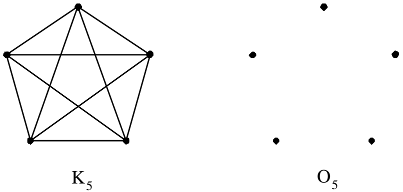
Apskatīsim dažas speciālas grafu klases vai grafus. Grafu speciālgadījumus var izmantot pieņēmumu pārbaudei vai atspēkošanai.

Par *triviālo grafu* sauksim grafu ar vienu virsotni un bez šķautnēm.

Par *tukšo grafu* sauksim "grafu", kura virsotņu un šķautņu kopas ir tukšas.

Pilnais grafs K_n - (neorientēts) grafs ar n virsotnēm, visi virsotņu pāri savā starpā ir savienoti.

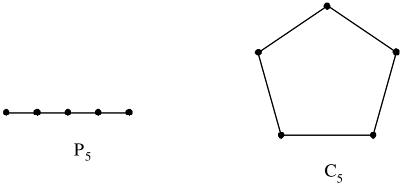
Bezšķautņu grafs O_n - (neorientēts) grafs ar n virsotnēm un 0 šķautnēm.



3.14. attēls. Pilna grafa un bezšķautņu grafa piemēri

Ķēde P_n - sakarīgs grafs ar n virsotnēm, kur divām virsotnēm pakāpe ir 1 un pārējām pakāpe ir 2. *Cikls* C_n - sakarīgs grafs ar n

virsotnēm, kur katrai virsotnei pakāpe ir 2.



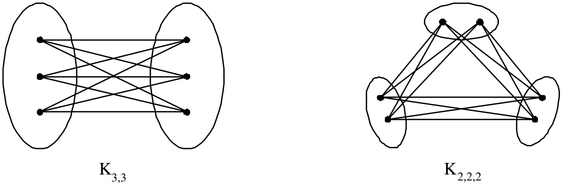
3.15. attēls. Ķēdes un cikla piemēri

Divdaļīgs grafs - grafs, kura virsotņu kopu var sadalīt divās daļās tā, ka jebkuras divas virsotnes, kas pieder vienai daļai, nav savienotas.

Pilns divdaļīgs grafs $K_{n,m}$ - divdaļīgs grafs, kura virsotņu kopas daļu elementu skaits ir n un m un kurā jebkuras divas virsotnes dažādās daļās ir savienotas.

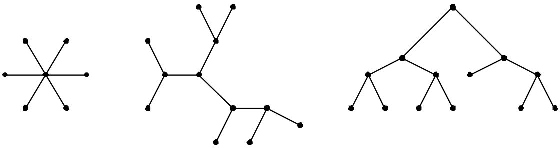
m-daļīgs grafs - grafs, kura virsotnes var sadalīt m daļās tā, ka jebkuras divas virsotnes, kas pieder vienai daļai, nav savienotas.

Pilns m-daļīgs grafs $K_{n_1,\ldots,n_m}$ - m daļīgs grafs, kura virsotņu kopas daļu elementu skaits ir $n_1, ..., n_m$, jebkuras divas virsotnes dažādās daļās ir savienotas.



3.17. attēls. 2-daļīga un 3-daļīga grafa piemēri

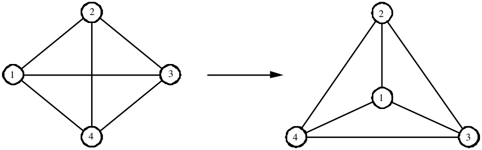
Koks - sakarīgs grafs bez inducētiem apakšgrafiem, kas ir cikli (sakarīgs *aciklisks* grafs). *Mežs* - grafs bez cikliem (ne obligāti sakarīgs).



3.19. attēls. Mežs

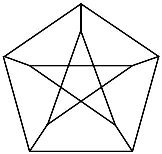
Plakans grafs - grafs, kas ir uzzīmēts tā, ka šķautnēm ir kopīgi punkti tikai virsotnēs.

Planārs grafs - grafs, kuru var uzzīmēt kā plakanu grafu (*plakanizēt*).



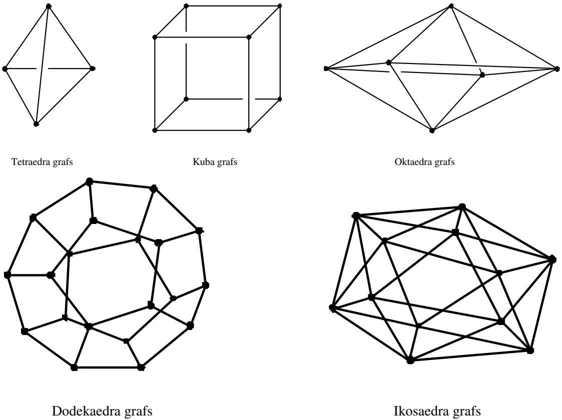
3.21. attēls. Planāra grafa plakanizācijas piemērs

Ir atrasti un pētīti vairāki interesanti grafi, kas ir nosaukti to atklājēju vārdos. Populārākais no šādiem grafiem ar nelielu virsotņu skaitu ir *Petersena grafs*:



3.22. attēls. Petersena grafs

Regulāro daudzskaldņu grafi tiek iegūti no tā saucamajiem regulārajiem daudzskaldņiem (tetraedrs, kubs, oktaedrs, dodekaedrs, ikosaedrs), kur katram atbilst grafs, kura virsotnes un šķautnes atbilst figūras ģeometriskajām virsotnēm un šķautnēm.



3.23. attēls. Regulāro daudzskaldņu grafi

1.5. Pamatdefinīcijas

1.5.1. Vienādība un apakšgrafi

Jebkura tipa divus grafus sauksim par vienādiem, ja to virsotņu un šķautņu kopas ir vienādas.

Grafus var attēlot dažādos veidos - var bīdīt virsotnes un šķautnes. Ir jāizvēlas tāds veids, kas palīdz atrisināt uzdevumu.

Ja grafi atsķiras tikai ar izvietojumu un virsotņu apzīmējumiem, tad tos sauc par *izomorfiem* grafiem. Citiem vārdiem sakot, divi grafi ir izomorfi, ja katram grafam virsotnes var sanumurēt tā, ka pēc sanumurēšanas grafi nav atšķirami.

Izomorfus grafus uzskatīsim par matemātiski neatšķiramiem.

Ja dots grafs $\Gamma = (V, E)$, tad grafu $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$ sauksim par Γ *apakšgrafu*, ja $V_1 \subseteq V, E_1 \subseteq E$, un katra no kopas E_1 šķautnēm ir incidenta tikai kopas V_1 virsotnēm, apzīmēsim to ar pierakstu $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$.

Par virsotņu kopas U *inducēto (pilno) apakšgrafu* sauksim apakšgrafu, kura virsotņu kopa ir U un kas satur visas šķautnes, kas ir incidentas tikai kopas U elementiem.

Orientētā grafā Γ par virsotņu kopas U *inducēto (pilno) apakšgrafu* sauksim apakšgrafu, kura virsotņu kopa ir U un kas satur visas sķautnes, kuru galapunkti un sākumpunkti ir kopā U.

1.5.2. Virsotnes apkārtne

Par grafa virsotnes *apkārtni* sauksim virsotņu kopas apakškopu, kas satur visas ar to savienotās virsotnes, virsotnes v apkārtni apzīmēsim ar $N_\Gamma(v)$.

Par orientēta grafa virsotnes v *pozitīvo/negatīvo apkārtni* sauksim virsotņu kopu, kas satur visas virsotnes u tādas, ka eksistē šķautne $(u, v)/(v, u)$, šīs kopas apzīmēsim ar $N_+(v)$ vai $N_-(v)$. Orientētā grafā Γ kopu $N_-(v)$ apzīmēsim arī ar $\Gamma(v)$ un kopu N_+ - ar $\Gamma^{-1}(v)$.

Par grafa virsotnes *pakāpi* sauksim ar to incidento šķautņu skaitu vai, citiem vārdiem sakot, virsotnes apkārtnes elementu skaitu, virsotnes v pakāpi apzīmēsim ar $d(v)$.

Par grafa *pakāpju vektoru* sauksim virkni $(a_0, ..., a_k)$, kur a_i ir grafa virsotņu skaits ar pakāpi i.

Virsotni, kuras pakāpe ir 0, sauksim par *izolētu* virsotni.

Grafa Γ virsotņu minimālo pakāpi apzīmēsim ar $\delta(\Gamma)$, maksimālo pakāpi - ar $\Delta(\Gamma)$.

Par orientēta grafa virsotnes v *pozitīvo/negatīvo puspakāpi* sauksim ar v incidento ieejošo/izejošo šķautņu skaitu jeb v pozitīvās/negatīvās apkārtnes elementu skaitu, apzīmēsim ar $d_+(v)/d_-(v)$.

1.1. teorēma.

1. Grafa $\Gamma = (V, E)$ virsotņu pakāpju summa ir vienāda ar divkāršotu šķautņu skaitu:
$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$
2. Orientētā grafā $\Gamma = (V, E)$ ir spēkā formula
$$\sum_{v \in V} d_-(v) + \sum_{v \in V} d_+(c) = 2|E|.$$
3. Orientētā grafā $\Gamma = (V, E)$ ir spēkā formula
$$\sum_{v \in V} d_-(v) = \sum_{v \in V} d_+(c) = |E|.$$

PIERĀDĪJUMS Pielietosim kombinatorikas pamatprincipu "skaitīšana divos dažādos veidos".

Neorientēta grafa gadījumā skaitīsim katras virsotnes v incidentās šķautnes un summēsim šos skaitļus pa visām grafa virsotnēm:

- no vienas puses, mēs iegūsim $\sum_{v\in V} d(v)$,
- no otras puses, tā kā katrai šķautnei ir divi galapunkti, tad katra šķautne tiks skaitīta divas reizes un summā iegūsim lielumu $2|E|$.

Līdzīga sprieduma ceļā iegūsim arī pirmo apgalvojumu orientētam grafam.

Otrais apgalvojums orientētajam grafam izsaka to, ka šķautņu izejošo galu ir tikpat, cik ieejošo galu.■

1.1. piezīme. Svarīgs secinājums neorientēto grafu gadījumā - virsotņu skaits ar nepāra pakāpēm ir pāra skaitlis:

$$\sum_{v\in V} d(v) = \underbrace{d(v_1) + ... + d(v_k)}_{\text{nepāra pakāpes}} + \underbrace{d(v_{k+1}) + ... + d(v_n)}_{\text{pāra pakāpes}} = 2|E|.$$

1.3. piemērs. Klasē ir 30 cilvēki. Vai var būt, ka 9 cilvēkiem ir 3 draugi, 11- 4 draugi un 10 - 5 draugi.

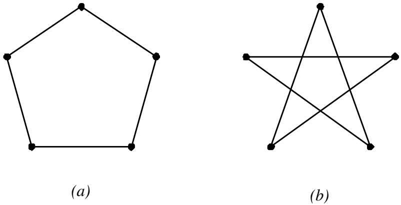
Valstī ir vairāki ezeri. Tiek apgalvots, ka no katra ezera iztek 4 upes, bet ietek 5 upes. Pierādīt, ka tas nav iespējams.

Kādā valstī ir galvaspilsēta un vēl 100 pilsētas. Pilsētas ir savienotas ar vienvirziena ceļiem. No katras pilsētas, kas nav galvaspilsēta, iziet 10 ceļi, bet ieiet 11 ceļš. Pierādīt, ka uz galvaspilsētu nevar aizbraukt ne no vienas citas pilsētas.

1.5.3. Papildgrafs

Par grafa $\Gamma = (V, E)$ *papildgrafu* jeb *papildinājumu* sauksim grafu Γ' ar virsotņu kopu V, kurā divas virsotnes ir savienotas tad un tikai tad, ja tās nav savienotas grafā Γ.

1.4. piemērs. 3.11.attēla grafa (a) papildgrafs ir grafs (b).



3.11. attēls. Grafa un tā papildgrafa piemērs

1.5.4. Staigāšana pa grafu

Uzdevumu risināšanā ir lietderīgi domāt par grafu kā par transporta vai sazināšanās tīkla modeli, tāpēc ir jādefinē vienkāršākie jēdzieni, kas ir saistīti ar pārejām starp virsotnēm.

Par *maršrutu* grafā sauksim virsotņu un šķautņu virkni

$$(v_0, e_1, ..., e_n, v_n),$$

kur jebkuras divas kaimiņu virsotnes v_i un v_{i+1} ir savienotas ar šķautni e_{i+1}. Ja maršrutā $v_0 = v_n$, tad tādu maršrutu sauksim par *noslēgtu*, pretējā gadījumā, kad $v_0 \neq v_n$ - par *vaļēju*, šķautņu skaitu maršrutā sauksim par tā *garumu*;

Maršrutu, kurā visas šķautnes ir dažādas, sauksim par *ķēdi*;

Ķēdi, kurā visas virsotnes izņemot, iespējams, pirmo un pēdējo, ir dažādas, sauksim par *vienkāršu ķēdi*;

Noslēgtu ķēdi ar pozitīvu garumu sauksim par *ciklu*, noslēgtu vienkāršu ķēdi ar pozitīvu garumu sauksim par *vienkāršu ciklu*.

Maršrutu (ķēdi, vienkāršu ķēdi), kura pirmā virsotne ir v un pēdējā - w, sauksim par (v, w) - maršrutu (ķēdi, vienkāršu ķēdi).

1.2. teorēma. Ja $\delta(\Gamma) \geq 2$, tad grafā Γ eksistē vienkārša ķēde ar garumu $\delta(\Gamma)$.

PIERĀDĪJUMS Pieņemsim, ka garākās ķēdes garums ir k un tai atbilstošā virsotņu virkne ir $(v_0, ..., v_k)$. Visas virsotnes v_k blakusvirsotnes pieder šai virknei, tāpēc ka pretējā gadījuma ķēdi varētu pagarināt. Iegūstam, ka $k \geq \delta(\Gamma)$ un apgalvojums par ķēdi ir pierādīts. ■

Analoģiski maršruta, ķēdes un cikla jēdzienus definē orientētiem grafiem. Par *virzītu maršrutu* orientētā grafā sauksim virsotņu un šķautņu virkni $(v_0, e_1, ..., e_n, v_n)$, kur jebkuras divas virsotnes v_i un v_{i+1} ir savienotas ar (orientēto) šķautni e_{i+1}. Līdzīgā veidā definēsim arī virzītu ķēdi, vienkāršu ķēdi, ciklu un vienkāršu ciklu.