DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra

Jauno matemātiķu skola

Kombinatorika

1.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2009./2010.studiju gads

Saturs

1. Kombinatorikas pamati

1.1. Ievads

Priekšzināšanas - kopas, attiecības, veselo skaitļu teorija.

Kombinatorika (no latīņu valodas saknes ar nozīmi "apvienošana") - matemātikas nozare, kas nodarbojas ar saliktu diskrētas dabas objektu (kopu elementu, apakškopu, virkņu u.c.)

- kvantitatīvu analīzi, klasifikāciju un it sevišķi skaitīšanu,
- vispārīgām skaitīšanas metodēm un likumsakarībām.

Tipisks kombinatorikas uzdevums ir skaitīt noteikta veida objektus, kas tiek kvantitatīvi raksturoti ar vienu vai varākiem parametriem, kas ir veseli skaitļi.

Par kombinatorikas sastāvdaļu uzskata arī

- diskrētās matemātikas formulu vienkāršošanu,

- speciāla veida diskrētu objektu analīzi, konstruēšanu vai eksistences pierādīšanu (ieskaitot grafu teoriju),
- diskrētu objektu konstruēšanu ar optimālām īpašībām,
- skaitīšanas rezultātu izmantošanu matemātisku izteikumu pierādījumos.

Galīgas kopas A elementu skaitu $|A|$ var interpretēt kā kopas A elementu skaitīšanas rezultātu, kura katrs elements tiek skaitīts vienu reizi (ar svaru 1):

$$|A| = \sum_{a \in A} 1.$$

1.2. Kombinatorikas pamatprincipi

1.2.1. Skaitāmo objektu kodēšana

Jebkura kombinatorikas uzdevuma risināšana sastāv no diviem svarīgiem soļiem:

1) skaitāmo objektu uzdošanas (kodēšanas, parametrizēšanas) ērtos matemātiskos terminos;
2) kombinatorikas metožu pielietošanas uzdevuma atrisināšanai.

Parasti kombinatorikas objekti var tikt uzdoti vienkāršos diskrētās vai nepārtrauktās matemātikas terminos kā

- virknes fiksētā alfabētā,
- apakškopas ar noteiktām īpašībām fiksētā kopā.

Diezgan bieži tiek izmantotas *binārās virknes* (virknes alfabētā $\{0, 1\}$).

Pareiza skaitāmo objektu kodēšana ir svarīgs un bieži vien pat kritisks solis uzdevuma atrisināšanā. Pētāmo objektu kodēšana var tikt veikta dažādos veidos, lai atrisinātu uzdevumu, ir jāizvēlas pietiekoši ērts kodēšanas veids.

1.1. piemērs. Bināras virknes. Bināru virkni var interpretēt kā vismaz 2 dažādu objektu kodu.

Apakškopa. To var interpretēt kā apakškopas bitu vektoru.

Trajektorija. Ja ir dots maršruts plaknē no punkta $(0, 0)$ līdz punktam (m, n) ar atļautiem soļiem $x = (1, 0)$ un $y = (0, 1)$ veidā $s_1 ... s_{m+n}$, tad piekārtosim tam bināru virkni $\{z_1, ..., z_{m+n}\}$, kur $z_i = 1$, ja $s_i = x$ un $z_i = 0$, ja $s_i = y$.

1.2.2. Rekursijas (skaldi un valdi!) likums

Risinot kombinatorikas uzdevumus, ir lietderīgi sadalīt skaitāmos objektus mazākās daļās, atkārtojot šo soli vairākas reizes, kamēr skaitīšanas uzdevums kļūst ļoti vienkāršs.

Skaitāmo objektu dalīšana mazākās daļās var tikt veikta dažādos veidos:

- sadalot objektu daļās pēc to īpašībām;
- atmetot vienu simbolu virknes galā vai kādā noteiktā vietā, ja skaitāmie objekti ir iekodēti kā virknes (*izdalītā elementa metode*).

Plaši izplatīts šī principa pielietošanas piemērs ir *rekurento sakarību metode*, kuru apskatīsim vēlāk.

1.2.3. Summas likums

Ja $A = A_1 \cup A_2$ *un* $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, *tad*

$$\underbrace{|A|}_{grūti} = \underbrace{|A_1|}_{viegli} + \underbrace{|A_2|}_{viegli}.$$

Šo likumu izmanto, ja skaitāmo objektu kopu var sadalīt vairākās šķirtās daļās, katrā no kurām šos objektus var skaitīt neatkarīgi un, iespējams, pat ar dažādām metodēm.

Summas likumu var vispārināt arī uz vairāku šķirtu kopu apvienojuma gadījumu: *ja* $A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ *un* $A_i \cap A_j = \emptyset \; \forall \; i \neq j$, *tad*

$$|A| = |A_1| + A_2| + ... + |A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|.$$

1.2. piemērs. Ja no pilsētas A var aizbraukt uz pilsētu B caur pilsētām C vai D N_C vai N_D veidos, tad kopējais ceļu skaits no A uz B ir vienāds ar $N_C + N_D$.

Pielietojot summas likumu, var sastapties ar dažādiem iespējamo variantu skaita sadalījumiem:

1) varianti var būt sadalīti "vienmērīgi" pa kopām A_i;

2) dažas kopas A_i ir jāuzskata par īpašiem speciālgadījumiem, kuros variantu skaits ir būtiski mazāks nekā citās kopās.

Ir uzdevumi, kuros elementi dažādās kopās ir jāskaita ar dažādām metodēm. Var būt arī nepieciešams pielietot summas likumu vairākas reizes viena uzdevuma risināšanas gaitā.

1.3. piemērs.

1.2.4. Reizināšanas likums

Ja $A = B \times C$, *tad*

$$\underbrace{|A|}_{grūti} = \underbrace{|B|}_{viegli} \cdot \underbrace{|C|}_{viegli}.$$

Šo likumu izmanto, ja skaitāmos objektus var uzdot kā virknes, kuru elementi var tikt skaitīti pēctecīgi un neatkarīgi viens no otra.

Kopas B un C var būt gan fiksētas, gan arī atkarīgas viena no otras. Svarīgi ir tas, lai visiem kopas B elementiem atbilstu vienāds skaits kopas C elementu un otrādi.

Reizināšanas likumu var vispārināt arī uz vairāku kopu tiešā reizinājuma gadījumu: ja $A = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$, tad

$$|A| = |A_1| \times |A_2| \times ... \times |A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|.$$

1.4. piemērs. Reizināšanas likumu var interpretēt ar *lēmumu koku* palīdzību.

1.5. piemērs. Pieņemsim, ka visi ceļi no A uz B iet caur C. Ja no A uz C var aizbraukt N_{AC} veidos un no C uz B var aizbraukt N_{CB} veidos, tad no A uz C var aizbraukt $N_{AC} \times N_{CB}$ veidos, jo katru ceļu no A uz C var uzdot kā sakārtotu elementu pāri (u, v), kur u ir ceļš no A uz C un v ir ceļš no C uz B.

1.6. piemērs. Uzdevums par diviem šaha karaļiem.

1.2.5. Dalīšanas likums

Ja kopa A ir sadalīta pēc elementu skaita vienādās m elementus lielās apakškopās, tad šādu apakškopu skaits ir vienāds ar

$$\frac{|A|}{m}.$$

Šo likumu izmanto, ja

- skaitāmo objektu kopu var sadalīt vienāda un zināma lieluma apakškopās, kuru skaitu var noteikt relatīvi viegli,
- ir jāatrod apakškopu skaits, ja ir zināms kopējais elementu skaits un skaits katrā apakškopā.

1.7. piemērs. Cik ir divu elementu apakškopu kopā, kas satur 10 elementus?

No sākuma atradīsim, cik ir sakārtotu dažādu elementu pāru 10 elementu kopā. Tā kā sakārtots dažādu elementu pāris ir elements kopas Dekarta kvadrātā, tad saskaņā ar reizināšanas likumu, šādu pāru skaits ir $10(10-1)=90$.

Katru divu elementu apakškopu var sakārtot divos veidos: pirmais veids ir tāds, ka pirmais elements ir mazāks nekā otrais, un otrais tāds, ka pirmais elements ir lielāks nekā otrais. Tādējādi visa sakārtoto pāru kopa ir sadalīta divās vienādas daļās un meklējamais apakškopu skaits ir vienāds ar elementu skaitu jebkurā no šīm daļām. Atbilde ir vienāda ar $\frac{90}{2}=45$.

1.2.6. Vienlieluma likums

Ja eksistē savstarpēji viennozīmīga funkcija no galīgas kopas A uz galīgu kopu B, tad

$$\underbrace{|A|}_{\textit{grūti}} = \underbrace{|B|}_{\textit{viegli}}.$$

Šo likumu izmanto, ja dotajā kopā A ir grūti saskaitīt elementus, bet eksistē un ir viegli redzama kāda cita kopa B, kuras elementus ir iespējams relatīvi viegli saskaitīt, un bijektīva funkcija, kas saista A un B.

Vienlieluma likumu sauksim arī par *skaitīšanu ar bijekcijas palīdzību*.

Pielietojot šo metodi, ir iespējami šādi gadījumi:

1) kopa B pēc savas dabas būtiski atšķiras no kopas A, tādējādi kopas B ieviešana būtiski izmaina uzdevuma risināšanas gaitu (apakškopas un bitu vektori);

2) kopa B atšķiras no kopas A ar tādām detaļām, kas tikai palīdz atrisināt uzdevumu, neizmainot to būtiski (vieninieka atmešana kompozīcijas virknes galā).

1.8. piemērs. Pieņemsim, ka katram studentam pieder tieši viena cepure. Lai saskaitītu studentus, pietiek saskaitīt to cepures, un otrādi, lai saskaitītu cepures, pietiek saskaitīt studentus.

1.9. piemērs. Pieņemsim, ka katram studentam pieder ne vairāk kā viena cepure.

Lai novērtētu studentu skaitu no apakšas, pietiek saskaitīt cepures.

Lai novērtētu cepuru skaitu no augšas, pietiek saskaitīt studentus.

1.2.7. Skaitīšana izmantojot papildinājumu (atņemšanas likums)

Šo metodi izmanto, ja ir vieglāk noteikt elementu skaitu sākotnējās kopas papildinājumā un universā nekā sākotnējā kopā, kuras elementus ir uzdots saskaitīt. Apzīmēsim universu ar U, tad

$$U = A \cup (U \backslash A), |U| = |A| + |U \backslash A|$$

un

$$\underbrace{|A|}_{\text{grūti}} = \underbrace{|U|}_{viegli} - \underbrace{|U \backslash A|}_{viegli}.$$

Ja kopa A tiek definēta ar kādu nosacījumu P, tad kopa $U \backslash A$ tiek definēta ar nosacījumu $\neg P$ un šo kopu elementu skaitīšanas grūtības pakāpes var būt dažādas.

1.10. piemērs. Izmantojot papildināšanas metodi atradīsim, cik ir divu dažādu elementu virkņu (sakārtotu pāru) kopā, kas satur 10 elementus. Saskaņā ar reizināšanas likumu ir $10 \cdot 10$ dažādu sakārtotu pāru, no kuriem 10 pāros abi elementi ir vienādi. Sakārtotā elementu pārī elementi var būt vai nu vienādi, vai arī dažādi, tāpēc pāru skaits ar dažādiem elementiem ir vienāds ar $100 - 10 = 90$.

1.11. piemērs. Ir dota pilsēta, kuras pašvaldība plāno uzsākt ielu remontu. Ir zināms, ka 98% ielu ir jāremontē. Kā uzdot remontējamās ielas? Acīmredzams risinājums ir šāds: pārskaitīt ielas, kuras NAV jāremontē.

1.2.8. Skaitīšana divos dažādos veidos

Skaitot vienas galīgas kopas elementus divos vai vairāk veidos, atbilde, protams, ir viena un tā pati, bet tā var būt izteikta un interpretēta dažādos veidos, kurus analizējot var iegūt interesantus kombinatoriskus rezultātus.

Par šo metodi var domāt arī kā par saskaitāmo kārtības maiņu summā.

1.12. piemērs.

Skaitļu tabulas elementu summu var atrast divos veidos:

- no sākuma saskaitīt skaitļu summu katrā rindā, pēc tam atrast visu šādi iegūto skaitļu (katras rindas locekļu summu) summu;

- no sākuma saskaitīt skaitļu summu katrā kolonnā, pēc tam atrast visu šādi iegūto skaitļu (katras kolonnas locekļu summu) summu.

Ir skaidrs, ka abi paņēmieni dos vienu rezultātu, jo summa nemainās, ja saskaitāmos maina vietām.

1.2.9. Dirihlē princips

Risinot dažādus kombinatorikas uzdevumus, nereti nākas noteikt, cik daudzi no apskatāmajiem objektiem apmierina kādu īpašību.

Šī uzdevuma atrisināšanai ir lietderīgi domāt par doto īpašību kā par objektu ievietošanu kastēs vai kā par objektu kopas attēlošanu uz īpašības vērtību kopu.

Šādā interpretācijā objektu skaits ar doto īpašību ir vienāds ar to skaitu atbilstošajā kastē vai ar atbilstošās īpašības vērtības inversā attēla elementu skaitu.

Atbilstošo kombinatorikas principu, kas ļauj novērtēt objektu skaitu ar doto īpašību, sauksim par Dirihlē principu (par godu matemātiķim L.Dirihlē).

Dirihlē princips ("baložu būru princips"):

- *vienkāršākajā (klasiskajā) formā - sadalot $n+1$ elementus lielu kopu n apakškopās, vismaz viena apakškopa satur vismaz divus elementus (saliekot $n+1$ baložus n būros, vismaz vienā būrī ir vismaz divi baloži);*
- *klasiskā formā izmantojot funkcijas - funkcija no $n+1$ elementus lielas kopas uz n elementus lielu kopu nevar būt injektīva;*
- *daļveida formā - sadalot m elementus lielu kopu k apakškopās, vismaz viena apakškopa satur vismaz $\lceil \frac{m}{k} \rceil$ elementus, kur $\lceil x \rceil$ ir skaitļa x "griesti" (mazākais veselais skaitlis, kas nav mazāks kā x);*
- *bezgalīgajā formā - sadalot bezgalīgu kopu galīga skaita apakškopās, vismaz viena apakškopa būs bezgalīga.*

Dirihlē principu izmanto gan kombinatorikā, gan ģeometrijā.

1.13. piemērs. Jebkuru astoņu cilvēku kolektīvā ir divi, kas ir dzimuši vienā nedēļas dienā.

Jebkurā 25 cilvēku grupā eksistē 4 cilvēki, kas ir dzimuši vienā nedēļas dienā.

Ja kvadrātā ar malas garumu 2 tiek ievietoti 5 punkti, tad vismaz divi no tiem atrodas attālumā ne mazāk kā $\sqrt{2}$ viens no otra.

1.3. Trīs vienkāršākie kombinatorikas uzdevumi

Daži kombinatorikas uzdevumi tiek bieži izmantoti kā apakšuzdevumi citos, sarežģītākos, uzdevumos, tāpēc tos mēs apskatīsim atsevišķi šajā nodaļā.

1.3.1. Variācijas ar atkārtojumiem

Cik veidos var konstruēt m vienības garas virknes, kurās var būt n dažādu tipu elementi, kas var atkārtoties?

Šī uzdevuma atrisinājumu apzīmēsim ar $\bar{A}_n^m$. Termins *variācija* ir termina *virkne* sinonīms.

Lai atrisinātu šo uzdevumu, izmantosim reizināšanas likumu. Veidosim šādas virknes, sākot no kreisās malas:

1. Virknes pirmo elementu var izvēlēties n veidos,
2. virknes otro elementu neatkarīgi no pirmā var izvēlēties n veidos, tātad pirmos divus virknes elementus var izvēlēties $n \times n = n^2$ veidos,

... ...,

3. virknes k-to elementu neatkarīgi no visiem iepriekšējiem var izvēlēties n veidos, tātad pirmos k virknes elementus var izvēlēties $\underbrace{n \cdot \ldots \cdot n}_{k \text{ reizes}}$ veidos,

... ...

Visus virknes m elementus var izvēlēties n^m veidos. Iegūstam, ka

$$\bar{A}_n^m = \underbrace{n \cdot n \cdot ... \cdot n}_{m \text{ reizes}} = n^m.$$

1.14. piemērs. Cik dažādos veidos var izvēlēties piecciparu tālruņa numuru? Katru no pieciem cipariem var neatkarīgi izvēlēties 10 veidos, cipari var atkārtoties, tāpēc atbilde ir vienāda ar $\overline{A}_{10}^5 = 10^5$.

1.1. piezīme. Parādīsim, ka $\bar{A}_n^m$ var interpretēt kā visu funkciju skaitu no m elementu kopas uz n elementu kopu. Uzdot funkciju no m elementu kopas A uz n elementu kopu B ir tas pats, kas uzdot sakārtotu virkni (iespējams, ar atkārtojumiem, ja funkcija nav injektīva): funkciju $f : A \to B$ viennozīmīgi uzdot ar virkni

$$\underbrace{(f(a_1), ..., f(a_m))}_{m \text{ elementi}},$$

kuras elementi ir kopas B elementi. Otrādi, katrai m elementus garai virknei, kuras elementi pieder kopai B, var viennozīmīgi piekārtot atbilstošo funkciju. Tādējādi ir nodibināta bijektīva atbilstība starp virknēm un funkcijām.

1.2. piezīme. $\bar{A}_2^m$ var interpretēt arī kā visu m elementu lielas kopas apakškopu skaitu, jo katru apakškopu var uzdot kā funkciju no šādas kopas uz divu elementu kopu $0, 1$, kas elementam piekārto 1, ja tas pieder apakškopai, un 0, ja nepieder. Tādējādi m elementu lielas kopas visu apakškopu skaits ir vienāds ar 2^m.

1.3.2. Variācijas bez atkārtojumiem

Cik ir dažādu m vienības garu virkņu, kurās var būt dotās n elementus lielas kopas elementi? šo skaitli apzīmēsim ar A_n^m.

Atšķirībā no iepriekšējā uzdevuma elementi virknē nevar atkārtoties, jo tie tiek izvēlēti no kopas.

Arī šajā gadījumā izmantosim reizināšanas likumu. Skaitīšanu veiksim, konstruējot visas iespējamās virknes. Konstruēsim virknes, pievienojot jaunus elementus labajā pusē:

1. Virknes pirmo elementu (sākot no kreisās puses) var izvēlēties n veidos,
2. virknes otro elementu (ja pirmais elements jau ir izvēlēts) var izvēlēties neatkarīgi no pirmā $n-1$ veidā, tātad pirmos divus virknes elementus var izvēlēties $n(n-1)$ dažādos veidos,

... ...

k virknes k-to elementu (ja iepriekšējie $k-1$ elementi ir izvēlēti) var izvēlēties $n-k+1$ veidos, tātad pirmos k elementus var izvēlēties $\underbrace{n(n-1)...(n-k+1)}_{k \text{ reizinātāji}}$.

Pabeidzot šo spriedumu, iegūstam, ka kopējais dažādu virkņu skaits ir $n(n-1)...(n-m+1)$, tātad

$$A_n^m = n(n-1) \cdot ... \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Svarīgs speciālgadījums ir $A_n^n = n!$ (n elementus lielu kopu var sakārtot $n!$ veidos). A_n^n apzīmēsim ar P_n un sauksim par n elementus lielas kopas *permutāciju* skaitu.

1.15. piemērs. Cik dažādos veidos var nostādīt ierindā piecus cilvēkus no desmit cilvēku lielas grupas? Atbilde ir vienāda ar $A_{10}^5 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240$.

1.3. piezīme. Naturāliem skaitļiem m un n definēsim $A_n^m = 0$, ja $m > n$. Ar formulu

$$A_a^m = a(a-1) \cdot ... \cdot (a-m+1)$$

varam definēt skaitļus A_a^m arī tad, ja a ir jebkurš reāls un ne obligāti naturāls skaitlis.

1.4. piezīme. A_n^m ir vienāds ar injektīvu funkciju skaitu no m elementu lielas kopas uz n elementus lielu kopu tāpēc, ka injektīvas funkcijas uzdošana ir ekvivalenta virknes bez atkārtojumiem uzdošanai. To var interpretēt arī kā dažādu objektu ievietošanu dažādās kastēs.

Gadījumā, kad $m = n$ mēs iegūstam visu injektīvu un tātad arī bijektīvu funkciju skaitu no n elementu kopas uz n elementu kopu, ko var interpretēt arī kā n elementus lielas kopas permutāciju jeb sakārtojumu skaitu.

1.3.3. Kombinācijas bez atkārtojumiem

Cik ir dažādu m elementus lielu apakškopu kopā, kas satur n elementus? Šo skaitli apzīmēsim ar C_n^m vai $\binom{n}{m}$.

Termins *kombinācija* ir apakškopas sinonīms.

Atradīsim C_n^m, izmantojot dalīšanas likumu.

Saskaņā ar spriedumu, ar kura palīdzību mēs aprēķinājām A_n^m

- katru m elementus lielu apakškopu var sakārtot $m!$ veidos,
- tātad vienai m elementus lielai apakškopai atbilst $m!$ sakārtotas virknes.

Tātad ir spēkā vienādības

$$A_n^m = C_n^m m!$$

un

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{(n-m)!m!}.$$

1.16. piemērs. Cik dažādos veidos var izvēlēties piecus cilvēkus no desmit cilvēku lielas grupas? Atbilde ir vienāda ar

$$C_{10}^5 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 252.$$

1.5. piezīme. Skaitļiem C_n^m ir vēl vairākas lietderīgas interpretācijas:

- C_n^m var interpretēt kā n vienības garu bināru virkņu skaitu, kurās ir m vieninieki, jo katrai n elementus lielas kopas m-apakškopai var viennozīmīgi piekārtot tās bitu vektoru,
- C_n^m var interpretēt kā fiksēta garuma augošu (dilstošu) virkņu skaitu pilnīgi sakārtotā kopā: katru m-apakškopu n elementus lielā pilnīgi sakārtotā kopā var sakārtot augošā vai dilstošā

kārtībā tieši vienā veidā, otrādi, katrai augošai vai dilstošai virknei var viennozīmigi piekārtot atbilstošo apakškopu,

- C_n^m var interpretēt kā koeficientus, ko iegūst, atverot iekavas izteiksmē $(a+b)^n$, šo faktu var pierādīt, izmantojot matemātisko indukciju, to var vispārināt uz gadījumu, kad kāpinātājs nav vesels skaitlis (*binomiālā teorēma*):

$$(1+x)^r = \sum_{i\geq 0} C_r^i x^i,$$

šādā gadījumā summa ir bezgalīga un sakrīt ar kreisās puses funkcijas Teilora rindu.

Pārskaitīsim dažas vienkāršākās skaitļu C_n^m īpašības:

1) $C_n^0 = 1,\ C_n^1 = n,\ C_n^n = 1;$
2) $C_n^m = C_n^{n-m};$
3) $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$(Paskāla trijstūra īpašība);
4) $\sum_{i=0}^n C_n^i = 2^n$(visu apakškopu skaits ir vienāds ar 2^n)

1.17. piemērs. Apskatīsim kādu formulu vienkāršošanas uzdevumu, kurā ir iesaistīti skaitļi C_n^m un kurš ilustrē arī kombinatorikas pamatprincipu "skaitīšana divos dažādos veidos". Vienkāršosim summu

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} C_n^k k.$$

Redzam, ka

$$S_n = s_1 + s_2 + ... + s_n,$$

kur $s_k = C_n^k k$. Skaitli s_k var interpretēt kā visu to veidu skaitu, kā no n elementu lielas kopas izvēlēties k elementus lielu apakškopu un vienu šīs apakškopas elementu. Mainot i, mēs iegūsim dažādas apakškopas, tātad, izmantojot summas likumu, redzam, ka S_n ir vienāds ar visu veidu skaitu, kā no n elementu lielas kopas izvēlēties (netukšu) apakškopu un vienu šīs apakškopas elementu (piemēram, kādas cilvēku grupas komiteju kopā ar tās priekšsēdi). Cik dažādos veidos to var izdarīt? Redzam, ka saskaņā ar reizināšanas likumu

$$S_n = n \cdot 2^{n-1}$$

- no sākuma izvēlamies priekšsēdi, pēc tam jebkuru, iespējams, tukšu, apakškopu no atlikušās cilvēku kopas.

2. 5.mājasdarbs

2.1. Obligātie uzdevumi

1. Cik veidos uz šaha galdiņa var izvietot divus torņus (dāmas, karaļus, laidņus, zirgus) tā, lai tie neapdraudētu viens otru?

2. Studentu grupa, kurā ir 41 cilvēks, nokārtoja sesiju, kurā bija trīs eksāmeni. Visi studenti saņēma atzīmes 4, 5 vai 6. Pierādīt, ka vismaz pieci studenti nokārtoja sesiju ar vienādām atzīmēm.

3. Kāda eksāmena jautājumi ir sadalīti 4 grupās, katrā grupā ir 30 jautājumi. Eksāmena biļetē ir pa divi jautājumi no katras grupas. Cik dažādu eksāmena biļešu ir iespējams sastādīt?

4. Virkni $\{a_1, ..., a_n\}$ sauksim par *palindromu*, ja

$$a_1 = a_n, a_2 = a_{n-1}, ..., a_k = a_{n-k+1}$$

visiem $k : 1 \leq k \leq [\frac{n}{2}]$. Cik palindromu var izveidot no n-multikopas elementiem?

2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

1 Pierādīt, ka katra dažādu reālu skaitļu virkne ar garumu n^2+1 satur vai nu augošu virkni ar garumu n, vai arī dilstošu virkni ar garumu n.

2 Kādam m skaitlis C_n^m pieņem maksimālo iespējamo vērtību, ja n ir fiksēts?