Latvijas olimpiāžu uzdevumi tēmai:

Veselo skaitļu teorija

1 2.kārta

1.1 9.kl.

1. (2005./2006.)
2. (2002./2003.) Jānis uzrakstīja n pēc kārtas sekojošus naturālus skaitļus. Neviens no tiem nedalās ar trim vai vairāk dažādiem pirmskaitļiem. Kāda ir lielākā iespējamā n vērtība?

1.2 10.kl.

1. (2002./2003.) Dots, ka x un y - naturāli skaitļi. Vai var gadīties, ka
   (a) $(2x + 3y)(3x + 2y)$ dalās ar 5, bet nedalās ar 25?
   (b) $(2x + 3y)(3x + 2y)$ dalās ar 2003, bet nedalās ar 20032?

1.3 11.kl.

1. (2002./2003.) Ir zināms, ka skaitlis 38 ir mazākais naturālais skaitlis, kura kvadrāts beidzas ar 3 četriniekiem: 382 = 1444.
   (a) vai šādu naturālu skaitļu ir bezgalīgi daudz?
   (b) atrodiet otro mazāko naturālo skaitli ar šādu īpašību.

1.4 12.kl.

1. (2005./2006.)

2 3.kārta

2.1 9.kl.

1. (2008./2009.) Naturālu skaitli sauc par vienkāršu, ja tas ir divu (vienādu vai dažādu) pirmskaitļu reizinājums. Piemēram, $9 = 3 \cdot 3$ ir vienkāršs, bet $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$ - nav. Kāds lielākais daudzums pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu var visi būt vienkārši?
2. (2005./2006.) Atrisināt vienādojumu $x + y = 1025$, ja x un y ir naturāli skaitļi- skaitļa 640000 dalītāji.
3. (2002./2003.) Naturālu skaitli sauc par simetrisku, ja, izlasot tā decimālo pierakstu no otra gala, iegūst to pašu skaitli. Piemēram, simetriski ir skaitļi 111; 424; 88; 5225; 7. Ir zināms, ka visi sešciparu simetriskie naturālie skaitļi dalās ar naturālu skaitli x. Kādas var būt x vērtības?

2.2 10.kl.

1. (2008./2009) Apskatām virkni, kas augošā secībā satur visus naturālos skaitļus, kuri nedalās ar 3. Virknes sākums tātad ir $1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, ...$ Dots, ka $2n$ pēc kārtas ņemtu virknes locekļu summa ir 300 (n - kaut kāds naturāls skaitlis). Kādas ir iespējamās n vērtības?
2. (2005./2006) Kādiem pirmskaitļiem p un q, kas nepārsniedz 100, visi skaitļi $p + 6$, $p + 10$, $q + 4$, $q + 10$ un $p + q + 1$ arī ir pirmskaitļi?
3. (2002./2003.) Dots, ka a un b ir naturāli skaitļi, pie tam a nedalās ar 5. Skaitļu virkni x_n veido sekojoši: $x_1 = 5$, $x_{n+1} = ax_n + b$, ja $n = 1; 2; 3; ....$ Kādai lielākajai k vērtībai iespējams, ka visi skaitļi x_n ir pirmskaitļi?

2.3 11.kl.

1. (2008./2009) Atrast skaitļu $3^3 - 3$, $5^5 - 5$, $7^7 - 7$, $2009^{2009} - 2009$ lielāko kopīgo dalītāju.
2. (2005./2006) Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu
$$(x + y)(xy + 1) = 2z.$$
3. (2002./2003.) Naturālu skaitļu virknē $a_1, ...$, pirmo locekli a_1 izvēlas patvaļīgi, un pie $n \geq 1$ pastāv vienādība $a_{n+1} = a_n^2 + 2003$. Kāds lielākais daudzums virknes locekļu var būt naturālu skaitļu kvadrāti?

2.4 12.kl.

1. (2008./2009) Katrīna uzrakstīja trīsciparu skaitli n, kura visi cipari ir dažādi un visi atšķiras no 0. Maija uzrakstīja visus piecus citus trīsciparu skaitļus, kas izveidoti no tiem pašiem cipariem, no kā sastāv n. Maijas uzrakstīto skaitļu summa ir 3434. Kāds var būt skaitlis n?
2. (2005./2006.) Naturāli skaitļi m un n apmierina sekojošu īpašību: m dalās ar jebkuru no skaitļiem 1; 2; 3; ... ; n, bet nedalās ne ar $n + 1$, ne ar $n + 2$, ne ar $n + 3$. Kādas ir iespējamās n vērtības?
3. (2002./2003.) Vai eksistē
   (a) tādi naturāli skaitļi x, y un z, kas lielāki par 1, ka $x!y! = z!$?
   (b) tādi naturāli skaitļi a, b, c, d, e, kas lielāki par 1, ka $a!b!c!d! = e!$?

3 4.kārta

1. (2007./2008.)
2. (2006./2007.)
3. (2005./2006.) Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu
$$3^x = 2^x y + 1.$$
4. (2004./2005.)

4 Atklātā olimpiāde

4.1 5.klase

1. (2008./2009.) Andris grib izrakstīt rindā naturālos skaitļus no 1 līdz 10 katru tieši vienu reizi tā, lai pirmais skaitlis nedalītos ar otro, pirmo divu skaitļu summa nedalītos ar trešo, pirmo triju skaitļu summa nedalītos ar ceturto, ... , pirmo deviņu skaitļu summa nedalītos ar desmito. Vai to var izdarīt?
2. (2005./2006.) Vai naturālos skaitļus no 1 līdz 14 ieskaitot var sadalīt trīs daļās tā, lai visu daļu summas būtu vienādas? Vai to var izdarīt ar skaitļiem no 1 līdz 13 ieskaitot?

4.2 6.klase

1. (2008./2009.) Andris nosauc Maijai trīs dažādus ciparus. Pierādiet: Maija, neizmantojot citus ciparus kā Andra nosauktos, var uzrakstīt veselu skaitli (viencipara, divciparu vai trīsciparu), kurā nav vienādu ciparu un kas dalās ar 3.
2. (2008./2009.) Punkti apzīmē reizināšanas zīmes, vienādi burti - vienādus ciparus, bet dažādi burti - dažādus ciparus (izņemot I un Ī, kas apzīmē vienu un to pašu ciparu). Katrīna aprēķināja izteiksmes skaitlisko vērtību. Kādu rezultātu viņa ieguva?
3. (2008./2009.) Uz tāfeles bija uzrakstīti 4 naturāli skaitļi (starp tiem var būt arī vienādi). Zane pieskaitīja katram no tiem vieninieku. Vai Zanes iegūto skaitļu reizinājuma dalījums ar sākumā uzrakstīto skaitļu reizinājumu var būt a) 12. b) 18?
4. (2005./2006.) Trīsciparu skaitļa x simtu cipars ir a, desmitu cipars ir b un vienu cipars ir c. Pierādīt: ar 7 dalās visi tie un tikai tie skaitļi x, kuriem izteiksme dalās ar 7.

4.3 7.kl.

1. (2008./2009.) Dots, ka x un y - tādi naturāli skaitļi, ka $xy = 10^{20}$. Vai var būt, ka ne x, ne y nesatur savā pierakstā nevienu ciparu 0?

2. (2007./2008.)

3. (2006./2007.)

4. (2005./2006.) Triju veselu pozitīvu skaitļu summa ir 407. Ar kādu lielāko daudzumu nuļļu var beigties šo skaitļu reizinājums?

5. (2002./2003.). Divi spēlētāji pamīšus raksta uz tāfeles pa vienam naturālam skaitlim no 1 līdz 9 ieskaitot. Nedrīkst rakstīt skaitļus, ar kuriem dalās kaut viens jau uzrakstīts skaitlis. Kas nevar izdarīt gājienu, zaudē. Parādiet, kā tas, kas izdara pirmo gājienu, var uzvarēt.

4.4 8.klase

1. (2005./2006.) Naturāla skaitļa x ciparu summu apzīmēsim ar $S(x)$. Pieņemsim, ka n - tāds naturāls skaitlis, kam vienlaicīgi izpildās īpašības $S(n) = 10$ un $S(5n) = 5$.

   (a) atrodiet kaut vienu tādu skaitli,

   (b) vai tādu skaitļu ir bezgalīgi daudz?

   (c) vai kāds no tādiem skaitļiem ir nepāra?

2. (2002./2003.) Andrim vajadzēja sareizināt divus dažādus pozitīvus trīsciparu skaitļus. Izklaidības pēc viņš tos vienkārši uzrakstīja vienu otram galā. Iegūtais sešciparu skaitlis izrādījās 3 reizes lielāks par reizinājumu, kuru Andrim vajadzēja iegūt. Kādu sešciparu skaitli Andris uzrakstīja?

3. (2002./2003.) Kādā lielākajā daudzumā dažādu naturālu saskaitāmo, kas visi lielāki par 1, var sadalīt skaitli 56 tā, lai katru divu saskaitāmo lielākais kopīgais dalītājs būtu 1?

4. (2002./2003.) Uz katras no divām lapām jāuzraksta pa n veseliem pozitīviem skaitļiem. Visiem $2n$ uzrakstītajiem skaitļiem jābūt dažādiem. Pie tam uz lapām uzrakstīto skaitļu summām jābūt vienādām savā starpā, un uzrakstīto skaitļu kvadrātu summām arī jābūt vienādām savā starpā. Vai tas iespējams, ja

   (a) $n = 3$,

   (b) $n = 4$,

   (c) $n = 2003$?

4.5 9.kl.

1. (2008./2009.) Naturāla skaitļa n pozitīvo dalītāju skaitu apzīmējam ar $d(n)$. Piemēram, $d(1) = 1$; $d(6) = 4$ utt. Sauksim skaitli n par apaļīgu, ja tas dalās ar $d(n)$.

   (a) atrodiet piecus apaļīgus skaitļus,

   (b) pierādiet, ka apaļīgu skaitļu ir bezgalīgi daudz.

2. (2005./2006.) Kāda ir lielākā iespējamā ciparu summa septiņciparu naturālam skaitlim, kas dalās ar 8?

3. (2005./2006.) Apskatām naturālos skaitļus no 1 līdz 100 ieskaitot. Kādu lielāko daudzumu no tiem var izvēlēties tā, lai nekādi divi izvēlētie skaitļi nedalītos viens ar otru un katriem diviem izvēlētajiem skaitļiem lielākais kopīgais dalītājs būtu lielāks par 1?

4. (2002./2003.) Kvadrāts sastāv no 4×4 rūtiņām. Vai var tajās ierakstīt naturālus skaitļus no 1 līdz 16 (katrā rūtiņā citu skaitli) tā, lai skaitļu summas visās rindās un kolonnās būtu dažādas un visas dalītos ar

   (a) 4

   (b) 8?

5. (2002./2003.) Noskaidrot, kādiem dažādiem pirmskaitļiem p_1, p_2, ..., p_n pastāv īpašība: $p_1p_2p_3...p_n$ dalās ar $(p_1 - 1)(p_2 - 1)...(p_n - 1)$.

4.6 10.kl.

1. (2005./2006.) . Ir dots, ka, sareizinot visus naturālos skaitļus no 1 līdz 33 ieskaitot, iegūst

$$86833176188xy8864955181944012zt000000,$$

kur x, y, z, t ir cipari. Noskaidrojiet x, y, z un t vērtības.

2. (2002./2003.) Dots, ka n vesels pozitīvs skaitlis un skaitļi $2n+1$ un $3n+1$ ir veselu skaitļu kvadrāti. a) atrodiet kaut vienu tādu n, b) vai $5n+3$ var būt pirmskaitlis?

4.7 11.kl.

1. (2008./2009.) Dots, ka a un b - naturāli skaitļi un skaitļa pēdējais cipars ir 0. Kāds ir skaitļa S priekšpēdējais cipars?

2. (2005./2006.) Apskatām n pēc kārtas ņemtus naturālus skaitļus. Vai var gadīties, ka tos var sadalīt divās grupās tā, ka katras grupas skaitļu summa ir pirmskaitlis, ja

   (a) $n = 8$,

   (b) $n = 10$?

   Katrā grupā jābūt vismaz 2 skaitļiem.

3. (2005./2006.) Dots, ka $a < b \leq c < d$ ir pozitīvi veseli skaitļi, $ad = bc$ un $\sqrt{d} - \sqrt{a} \leq 1$. Pierādīt, ka a ir vesela skaitļa kvadrāts.

4. (2002./2003.) . Vai eksistē tāds naturāls skaitlis n, ka $6^n - 1$ dalās ar $4^n - 1$?

4.8 12.kl.

1. (2008./2009) . Dots, ka n- naturāls pāra skaitlis. Apskatām reizinājumu $R = n(n+1)(n+2)(n+3)$.

   (a) vai var būt, ka R ir kāda naturāla skaitļa kvadrāts?

   (b) vai var būt, ka R ir kāda naturāla skaitļa kubs?

2. (2005./2006.) Vai eksistē tāds vesels pozitīvs skaitlis n, ka skaitlim n^2 ir tikpat daudz naturālu dalītāju, kas dod atlikumu 1, dalot ar 3, cik naturālu dalītāju, kas dod atlikumu 2, dalot ar 3?