DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Veselo skaitļu teorija

1.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2009./2010.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- apgūt veselo skaitļu dalāmības pamatus.

Lekcijas kopsavilkums:

- veselo skaitļu kopā var definēt un pētīt dalāmības attiecību.

Svarīgākie jēdzieni: naturālie skaitļi, veselie skaitļi, dalāmība, kopīgie dalītāji, pirmskaitlis, salikts skaitlis, lielākais kopīgais dalītājs, savstarpējie pirmskaitļi.

Svarīgākie fakti un metodes: pilnīgā sakārtojuma princips, maksimālā elementa princips, matemātiskās indukcijas princips, aritmētiskās pamatīpašības, veselo skaitļu dalīšana ar atlikumu, dalāmības īpašības, LKD pamatīpašības.

1. Veselo skaitļu pamatīpašības

1.1. Skaitļu kopas

1.1.1. Naturālie un veselie skaitļi

Naturālie skaitļi ($\mathbb{N}$) un to pamatīpašības:

- skaitļi, ko var iegūt dabiskā skaitīšanas ceļā $1, 2, 3...$;
- dabiskās darbības (*aritmētiskās operācijas*) ar naturālajiem skaitļiem - *saskaitīšana*, *atņemšana*, *reizināšana*, *dalīšana;*
- naturālo skaitļu kopā var dabiski definēt sakārtojuma attiecību $<$: $x < y$, ja starpība $y - x$ ir definēta kā naturāls skaitlis.

Veselie skaitļi ($\mathbb{Z}$):

- \- divu naturālu skaitļu starpības rezultāts, piemēram

$$-1 = 2 - 3, 0 = 3 - 3.$$

Veselos skaitļus iegūst no naturālajiem, pievienojot visas formālās starpības.

1.1.2. Veselo skaitļu kopas paplašinājumi

Racionālie skaitļi $\mathbb{Q}$ - formāls divu veselu skaitļu dalījums $\frac{m}{n}$, kur $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$.

Algebriskie skaitļi $\overline{\mathbb{Q}}$ - reāla sakne algebriskam vienādojumam ar racionāliem koeficientiem, piemēram, $\sqrt{2}$ ir sakne vienādojumam

$$x^2 = 2.$$

1.2. Kopteorētiskās pamatīpašības

1.1. teorēma. (*Pilnīgā sakārtojums princips*) *$\forall$ $\mathbb{N}$ apakškopa satur vismazāko elementu.*

1.2. teorēma. (*Maksimālā elementa princips*) $\forall$ $\mathbb{N}$ apakškopa, kas ir ierobežota no augšas, satur maksimālo elementu.

1.3. teorēma. (*Matemātiskās indukcijas princips*) Pieņemsim, ka katram $n \in \mathbb{N}$ ir definēts apgalvojums $P(n)$ un ir spēkā šādi apgalvojumi:

1. $P(1)$ ir patiess,
2. ja $P(i)$ ir patiess, tad $P(i+1)$ ir patiess visiem $i \in \mathbb{N}$.

Tad visiem $n \in \mathbb{N}$ apgalvojums $P(n)$ ir patiess.

1.4. teorēma. $\forall\ x \in \mathbb{R}\ \exists$ viens un tikai viens

1. lielākais veselais skaitlis $[x]$(x veselā daļa jeb *grīda*, apzīmē arī kā $\lfloor x \rfloor$), kas nav lielāks par x,
2. mazākais veselais skaitlis $\lceil x \rceil$ (x *griesti*), kas nav mazāks par x.

(šai teorēmai ir uzskatāma ģeometriska interpretācija - katrs punkts uz reālo skaitļu taisnes atrodas starp diviem viennozīmīgi noteiktiem tuvākajiem punktiem ar veselām koordinātēm).

1.3. Aritmētiskās pamatīpašības

1.5. teorēma.

1. divu veselu skaitļu summa un reizinājums ir vesels skaitlis,
2. $a + b = b + a$ (saskaitīšanas komutativitātes likums),

3. $ab = ba$ (reizināšanas komutativitātes likums),
4. $(a+b)+c = a+(b+c)$ (saskaitīšanas asociativitātes likums),
5. $(ab)c = a(bc)$ (reizināšanas asociativitātes likums),
6. $a(b+c) = ab+ac$ (distributivitātes likums),
7. $ab = 0 \implies a = 0 \vee b = 0$ (nulles dalītāju neeksistence),
8. $\Big(a \neq 0 \wedge ab = ac\Big) \implies b = c$ (reizināšanas saīsināšanas īpašība).

1.4. Veselo skaitļu dalīšana ar atlikumu

1.6. teorēma. $\forall\, a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$ un $\forall\, b \in \mathbb{Z}$ $\exists$ viens un tikai viens veselu skaitļu pāris $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$, kur $0 \leq r < |a|$, tāds, ka

$$b = qa + r$$

(q sauksim par *dalījumu*, r - par *atlikumu*, r apzīmē arī kā $atl(b, a)$).

PIERĀDĪJUMS

Atzīmēsim uz taisnes ar Dekarta koordinātēm visus punktus, kuru koordinātes ir vienādas ar ka, kur $k \in \mathbb{Z}$.

$\forall\, b \in \mathbb{Z}$ ir viennozīmīgi izsakāms formā

$$b = qa + r,$$

kur qa ir pirmais atzīmētais punkts pa kreisi no b un $0 \leq r < |a|$. $\blacksquare$

2. Veselo skaitļu dalāmība

2.1. Dalāmības pamatīpašības

$a \in \mathbb{Z}$ *dala* $b \in \mathbb{Z}$ vai, b *dalās ar* a $(a|b)$ tad un tikai tad, ja $\exists\ q \in \mathbb{Z}$:

$$b = qa.$$

Citiem vārdiem sakot, atlikums dalot a ar b ir vienāds ar 0:

$$b = qa + 0.$$

Ja $a|b$, tad b sauc par a *daudzkārtni.*

Ja a nedala b, tad to apzīmē ar pierakstu $a \nmid b$.

Svarīgs speciālgadījums: ja $2|a$, tad a sauksim par *pāra skaitli*, ja $2 \nmid a$, tad a ir *nepāra skaitlis.*

2.1. piemērs. $\forall\ a:\ a|0.\ 0|a \implies a = 0.$ 1 un -1 dala visus veselos skaitļus, 1 un -1 dalās tikai ar 1 un -1.

2.1. teorēma. (dalāmības īpašības kopā)

1. $a|a$ (*refleksivitāte*).
2. $a|b \ \wedge \ b|c \implies a|c$ (*tranzitivitāte*).
3. $a|b \ \wedge \ b|a \iff |a| = |b|$.
4. $b \neq 0: \ a|b \implies |a| \leq |b|$.
5. $a|b, \ a|b' \implies a|b+b'$.
6. $a|b \implies a|bc$.
7. $a|b \ \wedge \ c|d \implies ac|bd$.

PIERĀDĪJUMS

1. $a = 1 \cdot a$.

2. $$\begin{cases} a|b \\ b|c \end{cases} \implies \begin{cases} b = qa \\ c = q'b \end{cases} \implies c = q'b = (q'q)a \implies a|c.$$

3. $$\begin{cases} a|b \\ b|a \end{cases} \implies \begin{cases} b = qa \\ a = q'b \end{cases} \implies b = qa = (qq')b \implies$$

$$qq' = 1 \implies q = \pm 1 \implies a = \pm b.$$

4. $a|b \implies b = qa \implies |b| = |q||a| \implies \frac{|b|}{|a|} = |q| \geq 1 \implies$ $|b| \geq |a|$.

5.
$$\begin{cases} a|b \\ a|b' \end{cases} \implies \begin{cases} b = qa \\ b' = q'a \end{cases} \implies b + b' = qa + q'a = (q + q')a \implies$$
$$a|b + b'.$$

6. $a|b \implies b = qa \implies bc = (qc)a$.

7.
$$\begin{cases} a|b \\ c|d \end{cases} \implies \begin{cases} b = q_1 a \\ d = q_2 c \end{cases} \implies bd = (q_1 a)(q_2 c) = (q_1 q_2)(ac).\blacksquare$$

2.2. Kopīgie dalītāji

Skaitļa $b \in \mathbb{Z}$ dalītāju kopu apzīmēsim ar $D(b)$.

2.1. piezīme. $D(0) = \mathbb{Z}$.

$D(-b) = D(b)$.
$|D(b)| < \infty$, ja $b \neq 0$.
$D(b)$ maksimālais elements ir vienāds ar $|b|$, minimālais - ar $-|b|$.

Skaitli $p \in \mathbb{N}$ sauc par *pirmskaitli*, ja tā vienīgie pozitīvie dalītāji ir 1 un p.

Naturālu skaitli, kas nav pirmskaitlis un nav vienāds ar 1, sauc par *saliktu skaitli*.

2.2. piemērs. $2, 3, 5, 7, 11, 13$ ir pirmskaitļi. $4 = 2\times2$ nav pirmskaitlis.

$a \in \mathbb{Z}$ sauksim par kopas $\{b_1, ..., b_m\} \subseteq \mathbb{Z}$ *kopīgu dalītāju*, ja $\forall\ i$ $a|b_i$. $\{b_1, ..., b_m\}$ visu dalītāju kopu apzīmē ar $D(b_1, ..., b_m)$.

Kopas $D(b_1, ..., b_n)$ maksimālo (pozitīvo) elementu sauc par *lielāko kopīgo dalītāju* un apzīmē ar $LKD(b_1, ..., b_n)$.

Skaitļu kopu $\{b_1, ..., b_n\}$ sauksim par *savstarpējiem pirmskaitļiem*, ja $LKD(b_1, ...b_n) = 1$.

2.3. piemērs. $LKD(2, 4) = 2$. $LKD(12, 18) = 6$.

2.2. teorēma.

1. $\forall\ b \in \mathbb{Z}: \ LKD(b, 0) = |b|$.
2. $\forall\ a, b \in \mathbb{Z}: \ a|b \implies D(a, b) = D(a)$ un $LKD(a, b) = |a|$.
3. $\forall\ a, b, k \in \mathbb{Z}:$

$$D(a, b) = D(a - kb, b) \text{ un } LKD(a, b) = LKD(a - kb, b).$$

PIERĀDĪJUMS

1. $D(b, 0) = D(b) \cap D(0) = D(b) \cap \mathbb{Z} = D(b) \implies LKD(b, 0) = |b|$.

2. $a|b \implies \Big(x|a \implies x|b\Big) \implies D(a) \subseteq D(b) \implies$
$D(a, b) = D(a) \cap D(b) = D(a) \implies LKD(a, b) = |a|$.

3. $x \in D(a,b) \implies \big(x|a \ \wedge\ x|b\big) \implies x|a-kb \implies$
$x \in D(a-kb,b) \implies \boxed{D(a,b) \subseteq D(a-kb,b).}$

$x \in D(a-kb,b) \implies \big(x|a-kb \ \wedge\ x|b\big) \implies x|(a-kb)+kb \implies$
$x|a \implies x \in D(a,b) \implies \boxed{D(a-kb,b) \subseteq D(a,b)} \implies$

$$\boxed{D(a,b) = D(a-kb,b).}$$

$D(a,b) = D(a-kb,b) \implies LKD(a,b) = LKD(a-kb,b)$ ■

2.2. piezīme. Saskaņā ar iepriekšējo teorēmu skaitļu pāriem (a,b) un $(a-kb,b)$ sakrīt kopīgo dalītāju kopas un, tādējādi, arī LKD.

Varam veikt šādas operācijas, lai samazinātu skaitļus un LKD būtu vieglāk atrodams.

k var tikt izvēlēts patvaļīgi, tā, kā ir ērtāk.

3. 1.mājasdarbs

1.1 Izdaliet ar atlikumu dotos veselo skaitļu pārus:
   (a) 324 ar -19,
   (b) 2832983 ar 372.

1.2 Atrodiet visus naturālos skaitļus, kas dala 168.

1.3 Atrodiet visus pirmskaitļus, kas ir mazāki kā 100.

1.4 Dots, ka $7|3a + 2b$ un $7|a - 3b$. Pierādīt, ka $7|9a - b$.

1.5 Atrodiet $LKD(2813, 92)$.

1.6 Ar kādām $n \in \mathbb{N}$ vērtībām dotās daļas ir saīsināmas?
   (a) $\frac{n^2+n+1}{n^2+1}$,
   (b) $\frac{n^2+2n-2}{n^2+n+1}$.

1.7 Pierādīt: ja $LKD(m, n) = 1$, tad $LKD(m+n, m^2+n^2) \in \{1, 2\}$.