DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Jauno matemātiķu skola

Loģikas pamati

2008. g. 25. oktobris

Saturs

1. Loğikas jēdziens

No grieķu valodas $\lambda\omega\gamma\omega\sigma$ (logos) ir zinātne, vārds.

Termins “loğika” ir traktējams gan plašākā, gan šaurākā nozīmē.

- **Plašākā nozīmē** loğika ir noteiktā veidā sakārtota attīstība. Šāda loğika piemīt gan dabas un sociālajiem procesiem, gan domāšanas saturam un cilvēka praktiskai darbībai.
- **Šaurākā nozīmē** ar loğiku jāsaprot mācība par domāšanas likumiem un formām.

Loğika pēta tikai tos domāšanas veidus, kuri fiksēti ar vārdu palīdzību, t.i., ar teikumiem.

2. Izteikuma jēdziens

2.1. piemērs. *Atrast patiesus un atrast aplamus apgalvojumus.*

1. Loģika ir ļoti interesants priekšmets.
2. $2 + 2 = 7$.
3. Cik Jums gadu?
4. Rīga nav Latvijas galvaspilsēta.
5. $2 + 4 - 70$.
6. 8 ir pāra skaitlis.
7. Izvēlies Latvijas preci!
8. 150 dalās ar 10, vai 150 dalās ar 77.
9. Lai Jaunajā gadā piepildās visas Tavas vēlēšanās!
10. Par funkcijas $y = f(x)$ grafiku sauc visu to punktu kopu koordinātu plaknē, kuru koordinātas ir $(x; f(x))$, pie tam $x \in D(f)$.

Ar izteikumu saprot apgalvojuma teikumu (apgalvojumu), kuram ir piešķirta viena un tikai viena no **patiesumvērtībām**:

- **patiess** (p);
- **aplams** (a).

Pie izteikumiem nepieder:

1. jautājuma teikumi
   piemēram, "Vai tu šodien iesi uz skolu?"
2. izsaukuma teikumi
   piemēram, "Cik jauka diena!"
3. nenoteikti apgalvojuma teikumi
   piemēram, "Rīt būs ļoti skaists laiks."

Izteikumus apzīmēsim ar lielajiem latīņu burtiem. Var pievienot arī indeksus. Izteikuma apzīmējumu sauksim par **izteikumsimbolu**. Piemēram, izteikumsimboli A, B, C, ..., A_1, A_2, A_3, ...

2.2. piemērs. *Noteikt, kuri no 2.1. piemērā dotajiem teikumiem ir izteikumi.*

2.2. piemēra atbilde. *Izteikumi ir zilā krāsā.*

1. Loģika ir ļoti interesants priekšmets.
2. $2 + 2 = 7$.
3. Cik Jums gadu?
4. Rīga nav Latvijas galvaspilsēta.
5. $2 + 4 - 70$.
6. 8 ir pāra skaitlis.
7. Izvēlies Latvijas preci!
8. 150 dalās ar 10, vai 150 dalās ar 77.
9. Lai Jaunajā gadā piepildās visas Tavas vēlēšanās!
10. Par funkcijas $y = f(x)$ grafiku sauc visu to punktu kopu koordinātu plaknē, kuru koordinātas ir $(x; f(x))$, pie tam $x \in D(f)$.

2.1. Pamatizteikumi un salikti izteikumi

Izteikumus iedala pamatizteikumos un saliktos izteikumos.

Pamatizteikums ir tāds izteikums, kuru *nav* iespējams sadalīt atsevišķos izteikumos.

Salikts izteikums ir tāds izteikums, kuru *ir* iespējams sadalīt atsevišķos izteikumos.

2.3. piemērs. Atrast pamatizteikumus un saliktus izteikumus.

1. Latvija ir valsts, **bet** lats ir naudas vienība.
2. $5 + 3 = 9$.
3. **Ja** $3 + 2 = 5$, **tad** 9 ir pāra skaitlis.
4. **Ja** $1 + 2 = -5$ **vai** $1 + 2 = -8$, **tad** $1 + 2 < 0$.
5. 12 dalās ar 3 **tad un tikai tad, ja** 12 dalās ar 6.
6. Daugavpils pēc iedzīvotāju skaita ir otra lielākā pilsēta Latvijā.

2.3. piemēra atbilde.

1. Pamatizteikumi:
   - $5 + 3 = 9$.
   - Daugavpils pēc iedzīvotāju skaita ir otra lielākā pilsēta Latvijā.
2. Salikti izteikumi:
   - A- Latvija ir valsts, **bet** lats ir naudas vienība.
     A_1- Latvija ir valsts,
     A_2- lats ir naudas vienība.
   - B- **Ja** $3 + 2 = 5$, **tad** 9 ir pāra skaitlis.
     B_1- $3 + 2 = 5$,
     B_2- 9 ir pāra skaitlis.
   - C- **Ja** $1 + 2 = -5$ **vai** $1 + 2 = -8$, **tad** $1 + 2 < 0$.
     C_1- $1 + 2 = -5$,
     C_2- $1 + 2 = -8$,
     C_3- $1 + 2 =< 0$.
   - D- 12 dalās ar 3 **tad un tikai tad, ja** 12 dalās ar 6.
     D_1- 12 dalās ar 3,
     D_2- 12 dalās ar 6.

- Izteikumam A iespējami divi dažādi patiesumvērtību komplekti:

A
p
a

- Saliktam izteikumam, kuru veido divi pamatizteikumi A un B, iespējami četri atšķirīgi izteikumu A un B patiesumvērtību komplekti:

A	**B**
p	p
p	a
a	p
a	a

- Saliktam izteikumam, kuru veido trīs pamatizteikumi, iespējami ...

3. Loģiskās operācijas

Ar **loģisko operāciju** palīdzību vai nu no viena, vai nu no jebkuriem diviem izteikumiem var izveidot jaunus izteikumus.

Nākošajā tabulā var apskatīt visbiežāk lietotās loģiskās operācijas un to lasīšanas variantus:

loģiskā operācija	kā atpazīt izteikumā
konjunkcija	… **un** …
disjunkcija	… **vai** …
implikācija	**ja** … **, tad** …
ekvivalence	… **tad un tikai tad, ja** …
noliegums	**ne** …

3.1. Konjunkcija

Izteikumu A un B konjunkciju apzīmēsim

$$A \wedge B.$$

Izmanto arī apzīmējumu $A \& B$.

A ∧ B	lasa
	A un B
	ne tikai A, bet arī B
	B, kaut arī A
	B, neskatoties uz to, ka A
	A kopā ar B
	gan A, gan B

3.1. piemērs. Noteikt izteikumu patiesumvērtību.

1. $3 > 0$ un $13 > 0$.
2. $3 > 0$ un $-3 > 0$.
3. Gan $-3 > 0$, gan $3 > 0$.
4. Ne tikai $-3 > 0$, bet arī $-4 > 0$.

Tātad izteikumu A un B konjunkcijai $A \wedge B$ atbilst šāda patiesumvērtību tabula:

A	**B**	**A $\wedge$ B**
p	p	**p**
p	a	**a**
a	p	**a**
a	a	**a**

3.2. Disjunkcija

Izteikumu A un B disjunkciju apzīmēsim

$$A \vee B.$$

$\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$	lasa
	A vai B
	A vai B, vai abi

Disjunkcijas operācijai ir savienojuma nozīme, t. i., izteikumi **neizslēdz** viens otru.

3.2. piemērs. Noteikt izteikumu patiesumvērtību.

1. $12 > 9$ vai $16 > 9$.
2. $2 + 2 = 4$ vai $2 + 2 = 5$.
3. $5 > 10$ vai $22 > 10$.
4. $10 \cdot 2 = 25$ vai $5 \cdot 4 = 25$.

Tātad izteikumu A un B disjunkcijai $A \vee B$ atbilst šāda patiesumvērtību tabula:

A	**B**	**A ∨ B**
p	p	**p**
p	a	**p**
a	p	**p**
a	a	**a**

3.3. Noliegums

Izteikuma A noliegumu apzīmēsim

$$\overline{\mathrm{A}}.$$

Izmanto arī apzīmējumu $\rceil A$.

$\overline{\mathrm{A}}$	lasa
	Ne A nav tiesa, ka A nepareizi, ka izpildās A

3.3. piemērs. Apskatīsim dažu izteikumu noliegumus.

izteikums	*izteikuma noliegums*
Usma ir ezers	Usma nav ezers
8 dalās ar 3	8 nedalās ar 3

Dotā izteikuma noliegums ir jauns izteikums, kurā tiek apgalvota dotā izteikuma aplamība. Tāpēc, ja dotais izteikums ir patiess, tad tā noliegums ir aplams - un otrādi. Tātad izteikuma A noliegumam $\overline{\mathrm{A}}$ atbilst šāda patiesumvērtību tabula:

A	$\overline{A}$
p	**a**
a	**p**

Izslēgtā trešā likums

$$A \vee \overline{A} \sim p$$

3.4. piemērs. Dotajam izteikumam atrast noliegumu.

1. $4 - 3 = 0$.
2. Oktobris nav pavasara mēnesis.
3. Ņujorka ir ASV galvaspilsēta.
4. $3 < 7$.
5. 8 ir pāra skaitlis.
6. Funkcijas $f(x) = x^2 - 1$ grafiks krusto Ox asi.
7. Daugavpilī ir vairāk par 10 vidusskolām.

3.4. piemēra atbildes. Dotajam izteikumam atbilstošais noliegums ir zilā krāsā.

1. $4 - 3 = 0$.

   $4 - 3 \neq 0$.

2. Oktobris nav pavasara mēnesis.

   Oktobris ir pavasara mēnesis.

3. Ņujorka ir ASV galvaspilsēta.

   Ņujorka nav ASV galvaspilsēta.

4. $3 < 7$.

   $3 \geq 7$.

5. 8 ir pāra skaitlis.

   8 nav pāra skaitlis.

6. Funkcija $f(x) = x^2 - 1$ grafiks krusto Ox asi.

   Funkcija $f(x) = x^2 - 1$ grafiks nekrusto Ox asi.

7. Daugavpilī ir vairāk par 10 vidusskolām.

   Daugavpilī ir 10 vai mazāk kā 10 vidusskolas.

3.5. piemērs. Noteikt, kuri no dotajiem apgalvojumiem ir viens otra noliegums un kuri nav (paskaidrot kāpēc).

1.

28 dalās ar 7.
28 nedalās ar 7.

2.

$2 \cdot 3 = 6.$
$2 \cdot 3 \neq 4.$

3.

Mākoņkalns ir Latvijas visaugstākais kalns.
Gaiziņš ir Latvijas visaugstākais kalns.

4.

Mans tēvs ir vecāks par manu māti.
Mana māte ir vecāka par manu tēvu.

5.

Dažiem cilvēkiem pasē ir ierakstīti divi vārdi.
Dažiem cilvēkiem pasē ir ierakstīti trīs vārdi.

izteikums	*izteikuma noliegums*
dažiem piemīt īpašība x	**visiem nepiemīt** īpašība x
visiem piemīt īpašība x	**dažiem nepiemīt** īpašība x

Piemēram:

A- **Visi** naturāli skaitļi **dalās** ar 10.
$\overline{A}$- **Eksistē** naturāli skaitļi, kuri **nedalās** ar 10.

A- **Daži** naturāli skaitļi **ir** pāra skaitļi.
$\overline{A}$- **Visi** naturāli skaitļi **nav** pāra skaitļi.

A- **Daži** skolēni **apmeklē** DU JMS nodarbības.
$\overline{A}$- ...

A- **Ikviens** skolēns **gaida** skolas brīvlaiku.
$\overline{A}$- ...

3.6. piemērs. Atrast apgalvojuma "Visi ceļi ved uz Romu" noliegumu.

1. Visi ceļi neved uz Romu.
2. Daži ceļi ved uz Romu.
3. Daži ceļi neved uz Romu.
4. Visi ceļi ved uz Rīgu.

3.7. piemērs. Atrast apgalvojuma "Dažās pilsētās ir metro" noliegumu.

1. Visās pilsētās ir metro.
2. Visās pilsētās nav metro.
3. Dažās pilsētās nav metro.
4. Ne visās pilsētās ir metro.

3.6. piemēra atbilde. Apgalvojuma "Visi ceļi ved uz Romu" noliegums atzīmēts ar zilu krāsu.

1. Visi ceļi neved uz Romu.
2. Daži ceļi ved uz Romu.
3. Daži ceļi neved uz Romu.
4. Visi ceļi ved uz Rīgu.

3.7. piemēra atbilde. Apgalvojuma "Dažās pilsētās ir metro" noliegums atzīmēts ar zilu krāsu.

1. Visās pilsētās ir metro.
2. Visās pilsētās nav metro.
3. Dažās pilsētās nav metro.
4. Ne visās pilsētās ir metro.

3.4. Implikācija

Izteikumu A un B implikāciju apzīmēsim

$$A \to B.$$

Izmanto arī apzīmējumus $A \supset B$, $A \Longrightarrow B$.

A → B	lasa
	ja A, tad B
	B, ja A
	A, ja tikai B
	A pietiekams, lai B
	B nepieciešami, lai A

Implikāciju sauc arī par nosacījuma izteikumu.

3.8. piemērs. Noteikt, kādos gadījumos izteikums

"Ja 18.11.08. būs skaidrs laiks, tad Daugavpilī būs salūts"

ir aplams.

Tātad izteikumu A un B implikācijai A $\rightarrow$ B atbilst šāda patiesumvērtību tabula:

A	**B**	**A $\rightarrow$ B**
p	p	**p**
p	a	**a**
a	p	**p**
a	a	**p**

3.9. piemērs. Noteikt izteikumu patiesumvērtību.

1. Ja 3 ir pirmskaitlis, tad 4 ir pirmskaitlis.
2. Ja 8 ir pirmskaitlis, tad 4 ir pirmskaitlis.
3. Ja 3 ir pirmskaitlis, tad 13 ir pirmskaitlis.
4. Ja 8 ir pirmskaitlis, tad 41 ir pirmskaitlis.

3.5. Ekvivalence

Izteikumu A un B ekvivalenci apzīmēsim

$$A \leftrightarrow B.$$

Izmanto arī apzīmējumus $A \equiv B$, $A \rightleftarrows B$, $A \iff B$.

Izteikumu A un B ekvivalences $A \leftrightarrow B$ apzīmējums norāda, ka izpildās gan implikācija $A \rightarrow B$, gan implikācija $B \rightarrow A$.

$A \leftrightarrow B$	lasa
	A tad un tikai tad, ja B
	Ja A, tad B, un, ja B, tad A
	B, ja A, un A, ja B
	A līdzvērtīgs B
	A pietiekami un nepieciešami, lai B

3.10. piemērs. Noteikt izteikumu patiesumvērtību.

1. 12 dalās ar 6 tad un tikai tad, ja 12 dalās ar 3.
2. 12 dalās ar 6 tad un tikai tad, ja 12 dalās ar 7.
3. 12 dalās ar 5 tad un tikai tad, ja 12 dalās ar 8.
4. 12 dalās ar 9 tad un tikai tad, ja 12 dalās ar 3.

Tātad izteikumu A un B ekvivalencei A $\leftrightarrow$ B atbilst šāda patiesumvērtību tabula:

A	**B**	**A $\leftrightarrow$ B**
p	p	**p**
p	a	**a**
a	p	**a**
a	a	**p**

3.6. Kopsavilkums

A	**B**	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \longrightarrow B$	$A \longleftrightarrow B$	$\overline{A}$
p	p	**p**	**p**	**p**	**p**	**a**
p	a	**a**	**p**	**a**	**a**	**a**
a	p	**a**	**p**	**p**	**a**	**p**
a	a	**a**	**a**	**p**	**p**	**p**

Paldies par uzmanību!