DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE

JAUNO MATEMĀTIĶU SKOLA

Grafiskās metodes matemātikā:

vienādojumu un nevienādību grafiskā risināšana

Docētāja: Dr.math. I. Jermačenko

2008. g. 11. oktobris

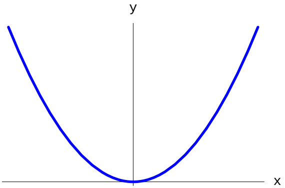
Saturs

1. Funkciju un vienādojumu grafiki

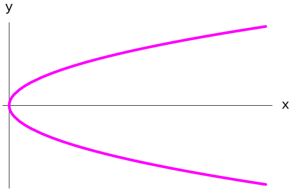
1.1. Funkcijas grafiks un tā pārveidojumi

Definīcija. Ja pēc noteikta likuma f katrai mainīgā x vērtībai no kādas konkrētas kopas X tiek piekārtota tieši viena noteikta mainīgā y vērtība no kopas Y, tad šo piekārtojuma likumu f sauc par funkciju un raksta $y = f(x)$.

Definīcija. Par funkcijas $y = f(x)$ grafiku sauc visu to punktu kopu koordinātu plaknē, kuru koordinātas ir $\big(x;\ f(x)\big)$, un pie tam $x \in D(f)$.



1. zīm. Attēlota līkne ir kādas funkcijas $y = f(x)$ grafiks.



2. zīm. Attēlota līkne nav funkcijas $y = f(x)$ grafiks.

- Funkcijas grafika pārbīde $y = f(x + a)$
- Funkcijas grafika pārbīde $y = f(x) + b$
- Funkcijas grafika simetrija $y = -f(x)$
- Funkcijas grafika simetrija $y = f(-x)$
- Funkcijas grafika simetrija $y = -f(-x)$
- Funkcijas grafika daļēja simetrija $y = |f(x)|$
- Funkcijas grafika daļēja simetrija $y = f(|x|)$
- Funkcijas grafika deformācija $y = k\, f(x)$
- Funkcijas grafika deformācija $y = f(k\, x)$

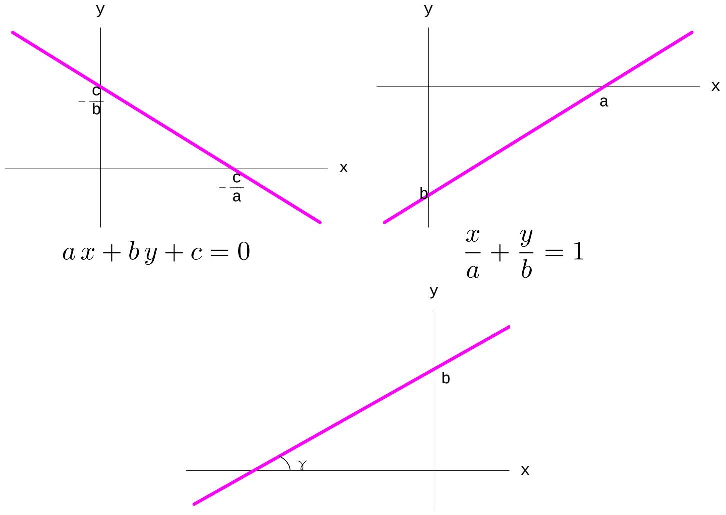
1.2. Vienādojumu grafiki

Definīcija. Par vienādojuma $\boxed{\mathrm{f(x, y)=0}}$ grafiku sauc visu to punktu kopu koordinātu plaknē, kuru koordinātas $(x;\, y)$ ievietojot dotajā vienādojumā, iegūst patieso vienādību.

Vienādojumu grafiku piemēri:

- taisne ;
- parabola ;
- hiperbola ;
- riņķa līnija ;
- elipse.

Taisne



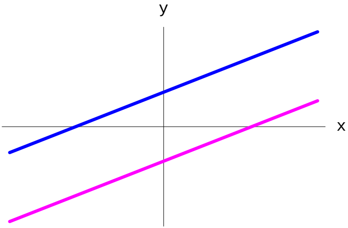
$$a\,x + b\,y + c = 0$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

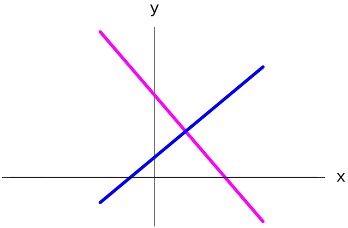
$$y = k\,x + b$$

3. zīm.

$$l_1 : \; a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$l_2 : \; a_2x + b_2y + c_2 = 0$$



$$l_1 : \; y = k_1x + b_1$$
$$l_2 : \; y = k_2x + b_2$$



4. zīm.

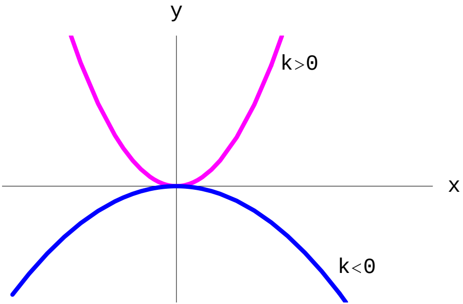
$$\boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}}$$

$$\boxed{k_1 = k_2}$$

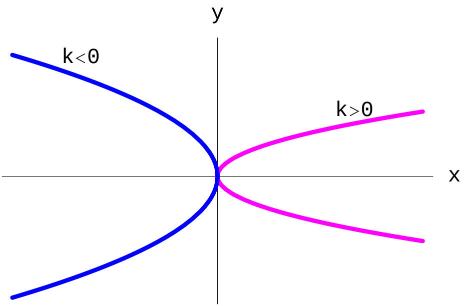
$$\boxed{a_1 \cdot a_2 = -b_1 \cdot b_2}$$

$$\boxed{k_1 = -\frac{1}{k_2}}$$

Parabola

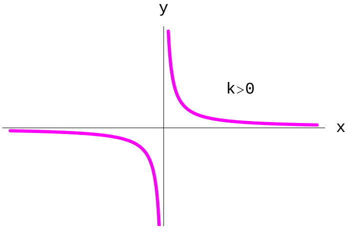


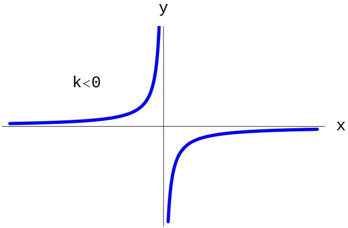
5. zīm. $y = k\,x^2$



6. zīm. $x = k\,y^2$

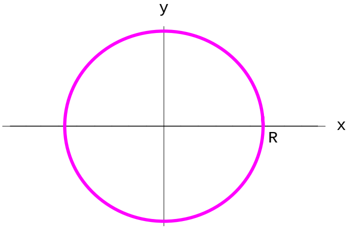
Hiperbola



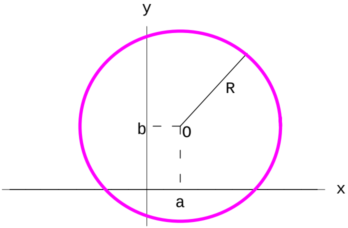


7. zīm. $y = \dfrac{k}{x}$

Riņķa līnija



$$x^2 + y^2 = R^2$$



$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

8. zīm.

2. Vienādojumu grafiskā risināšana

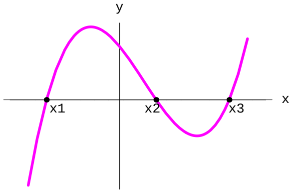
2.1. Vienādojums $f(x) = 0$

Lai grafiski noteiktu vienādojuma

$$\boxed{f(x) = 0}, \tag{1}$$

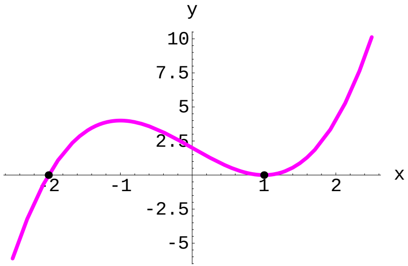
reālas saknes, ir jārīkojās šādi:

1. jākonstruē funkcijas $y = f(x)$ grafiks;
2. jāatrod šīs līknes krustpunkti ar Ox asi.
3. Tad šo punktu abscisas ir vienādojuma (1) saknes.



9. zīm. $y = f(x)$. Vienādojumam $f(x) = 0$ ir saknes x_1, x_2, un x_3.

Piemērs. Atrisināt grafiski vienādojumu $x^3 - 3x + 2 = 0$.



10. zīm. $y = x^3 - 3x + 2$.

Dotajam vienādojumam ir saknes $x_1 = -2$ un $x_2 = x_3 = 1$.

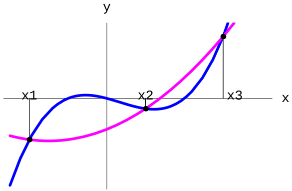
2.2. Vienādojums $f(x) = g(x)$

Lai grafiski noteiktu vienādojuma

$$\boxed{f(x) = g(x)}, \tag{2}$$

reālas saknes, ir jārīkojās šādi:

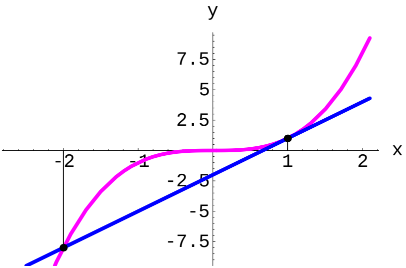
1. jākonstruē funkciju $y = f(x)$ un $y = g(x)$ grafiki vienā koordinātu sistēmā;
2. jāatrod grafiku krustpunkti.
3. Tad šo punktu abscisas ir vienādojuma (2) saknes.



11. zīm. $y = f(x)$; $y = g(x)$.
Vienādojumam $f(x) = g(x)$ ir saknes x_1, x_2, un x_3.

Piemērs. Atrisināt grafiski vienādojumu $x^3 - 3x + 2 = 0$.

$$\boxed{x^3 = 3x - 2}$$



12. zīm. $y = x^3$; $y = 3x - 2$.

Dotajam vienādojumam ir saknes $x_1 = -2$ un $x_2 = x_3 = 1$.

2.3. Vienādojumu sistēmas ar diviem mainīgajiem

Lai grafiski atrisinātu sistēmu

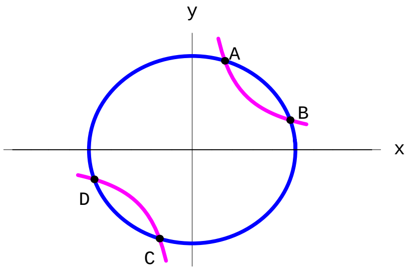
$$\boxed{\left\{\begin{array}{c} f(x,\, y) = 0, \\ g(x,\, y) = 0 \end{array}\right.}, \tag{3}$$

ir jārīkojās šādi:

1. jākonstruē vienādojumu $f(x,\, y) = 0$ un $g(x,\, y) = 0$ grafiki vienā koordinātu sistēmā;
2. jāatrod grafiku krustpunkti.
3. Šie krustpunkti ir vienādojumu sistēmas (3) atrisinājumi.

Piemērs. Grafiski atrisināt vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ x\,y = 3. \end{cases}$$



13. zīm. $x^2 + y^2 = 10$; $xy = 3$.

Dotajai sistēmai ir 4 atrisinājumi.

Ja $A(x_0;\, y_0)$, tad $B(y_0;\, x_0)$, $C(-x_0;\, -y_0)$ un $D(-y_0;\, -x_0)$.

Atbilde: $(1;\, 3)$, $(3;\, 1)$, $(-1;\, -3)$, $(-3;\, -1)$.

3. Nevienādību grafiskā risināšana

3.1. Nevienādība $f(x) > 0$

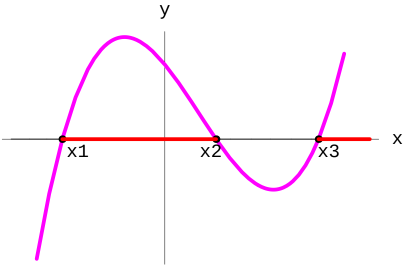
Lai grafiski atrisinātu nevienādību ar vienu mainīgo

$$\boxed{f(x) > 0}, \tag{4}$$

ir jārīkojās šādi:

1. jākonstruē funkcijas $y = f(x)$ grafiks ;
2. jāatrod šīs līknes krustpunkti ar Ox asi ;
3. jāatrod grafika daļas, kas atrodas virs Ox ass,
   un jāprojecē šīs daļas uz Ox asi.
4. Iegūtie intervāli uz Ox ass ir nevienādības (4) atrisinājumi.

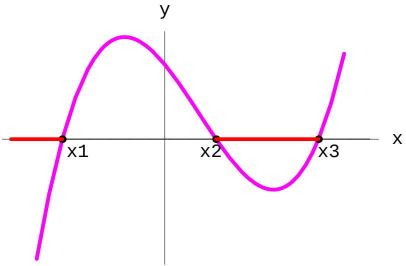
$$\boxed{f(x) > 0}$$



14. zīm. $y = f(x)$.

Dotās nevienādības atrisinājumi: $x \in (x_1, x_2) \cup (x_3, +\infty)$.

$$\boxed{f(x) \le 0}$$



15. zīm. $y = f(x)$.

Dotās nevienādības atrisinājumi: $x \in (-\infty, x_1] \cup [x_2, x_3]$.

3.2. Nevienādība $f(x) > g(x)$

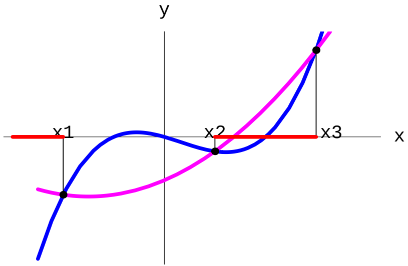
Lai grafiski atrisinātu nevienādību ar vienu mainīgo

$$\boxed{f(x) > g(x)}\,, \tag{5}$$

ir jārīkojās šādi:

1. jākonstruē funkciju $y = f(x)$ un $y = g(x)$ grafiki vienā koordinātu sistēmā ;
2. jāatrod grafiku krustpunkti ;
3. jāatrod funkcijas $y = f(x)$ grafika daļas, kas atrodas virs funkcijas $y = g(x)$ grafika,
   un jāprojecē šīs daļas uz Ox asi.
4. Iegūtie intervāli uz Ox ass ir nevienādības (5) atrisinājumi.

$$\boxed{f(x) > g(x)}$$



16. zīm. $y = f(x)$; $y = g(x)$.

Dotās nevienādības atrisinājumi: $x \in (-\infty,\, x_1) \cup (x_2,\, x_3)$.

3.3. Nevienādība $f(x, y) > 0$

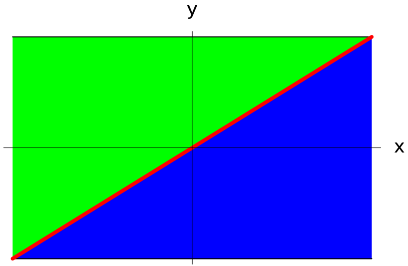
Lai grafiski atrisinātu nevienādību ar diviem mainīgajiem

$$\boxed{f(x,\, y) > 0}\,, \tag{6}$$

rīkosīmies šādi:

1. konstruēsim vienādojuma $f(x, y) = 0$ grafiku, tas sadala koordinātu plakni apgabalos;
2. paņemsim jebkuru punktu no jebkura apgabala un izvēlētā punkta koordinātas ievietosim nevienādībā (6);
3. ja punkts apmierina doto nevienādību (6), tad nevienādību apmierinās arī viss apgabals, no kura tika ņemts šis punkts.
4. Šādā veidā pārbaudīsim arī pārējos apgabalus.

$$\boxed{y > k\,x}$$



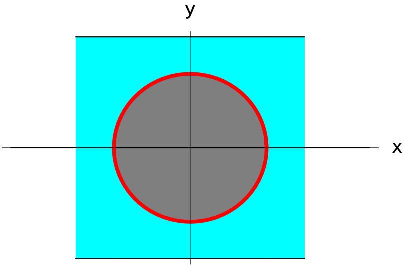
17. zīm.

Taisne $\color{red}{y = k\,x}$

$y > k\,x \quad \Leftrightarrow \quad$ zaļš apgabals

$y \le k\,x \quad \Leftrightarrow \quad$ zils apgabals ar robežu

$$\boxed{x^2 + y^2 > R^2}$$



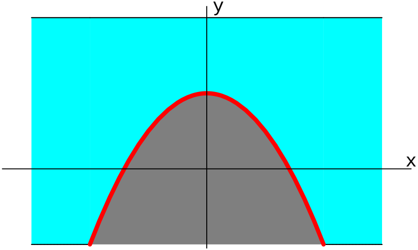
18. zīm.

Riņķa līnija $x^2 + y^2 = R^2$

$x^2 + y^2 > R^2 \quad \Leftrightarrow \quad$ gaišzils apgabals

$x^2 + y^2 < R^2 \quad \Leftrightarrow \quad$ pelēks apgabals

$$\boxed{y + x^2 - 1 > 0}$$



19. zīm.

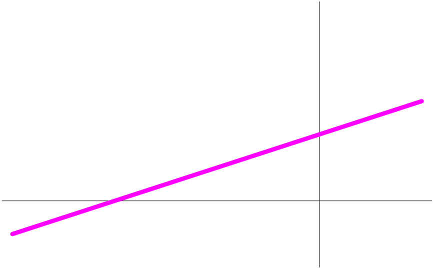
Parabola $y = -x^2 + 1$

$y + x^2 - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ gaišzils apgabals

$y + x^2 - 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ pelēks apgabals

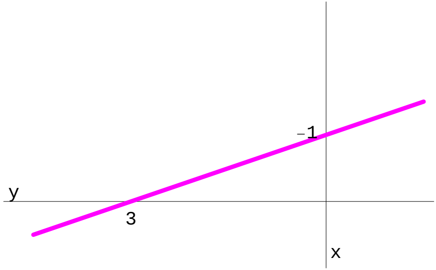
4. Uzdevumi

1.uzdevums. Jānis uzzīmēja funkcijas $y = 3x + 3$ grafiku. Ļaunais burvis nodzēsa koordinātu asu bultiņas, apzīmējumus un varbūt aizstaja zīmējumu ar spoguļattēlu vai pagrieza to. Atjaunojiet zīmējumā visu nodzēsto!



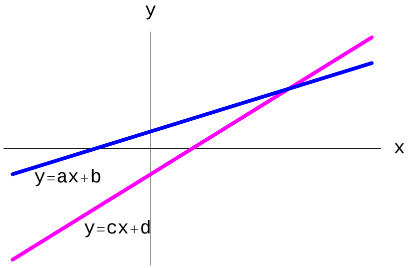
20. zīm.

Atbilde.



21. zīm.

2.uzdevums. Koordinātu plaknē konstruēti funkciju $y = ax + b$ un $y = cx + d$ grafiki.



22. zīm.

Noteikt izteiksmes $(c - a)(b - d)$ zīmi.

3.uzdevums. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x - 6y = 13, \\ xy - 3x + 2y = 11. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}&(x^2 + 4x) + (y^2 - 6y) = 13,\\ &(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) = 13 + 13,\\ &(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 26.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(xy - 3x) + 2y = 11,\\ &x(y - 3) + 2(y - 3) = 11 - 6,\\ &(x + 2)(y - 3) = 5.\end{aligned}$$

$$u = x + 2, \quad v = y - 3 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u^2 + v^2 = 26, \\ uv = 5. \end{cases} \qquad (13.)$$

$(u;\ v):\quad (1;\ 5),\ (5;\ 1),\ (-1;\ -5),\ (-5;\ -1).$

Atbilde. $(x;\ y):\quad (-1;\ 8),\ (3;\ 4),\ (-3;\ -2),\ (-7;\ 2).$