DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra

Daugavpils Universitātes Jauno matemātiķu skola

Grafu teorija - 1 (7.-9.klases)

Docētājs: Dr. P. Daugulis

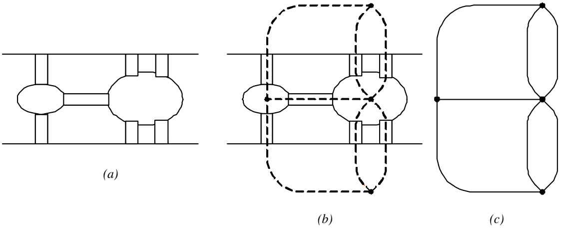
2008./2009.studiju gads

Saturs

1. Ievads grafu teorijā

1.1. Piemēri

1.1. piemērs. Ir dota upe, kurā ir divas salas un vairāki tilti.



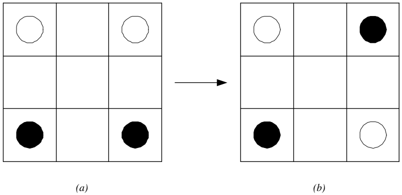
3.1. attēls. Uzdevums par Kēnigsbergas tiltiem

Vai ir iespējams iziet no kāda punkta, pāriet katru tiltu tieši vienu reizi un atgriezties sākotnējā punktā?

Tā kā uzdevuma risināšanā nozīmīga loma ir tiltiem, un trajektorijas, pa kurām tiek iets, nav svarīgas, tad modelēsim uzdevumu šādā veidā: piekārtosim katram sauszemes gabalam vienu punktu un saistīsim divus punktus ar līniju tad un tikai tad, ja atbilstošie sauszemes gabali ir saistīti ar tiltu.

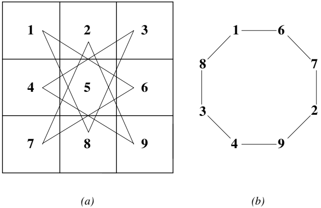
Ja uzdevumam eksistētu atrisinājums, tad iegūtajā grafā eksistētu noslēgts "ceļš", kurā tiek iets pa šķautnēm un kurš saturētu katru šķautni tieši vienu reizi. Ja eksistē tāds ceļš, tad katrai virsotnei ir jābūt ar pāra skaita šķautnēm. Bet šajā grafā ir virsotnes, kurām atbilst nepāra skaits šķautņu, tātad uzdevumam nav atrisinājuma.

1.2. piemērs. (No skolēnu olimpiāžu krājumiem). Uz 3×3 "šaha galda" ir izvietoti divi balti un divi melni zirgi tā, kā parādīts 3.2.(a) attēlā. Vai ir iespējams tos pārvietot uz stāvokli, kas parādīts 3.2.(b) attēlā, ja divas figūras nevar atrasties vienā lauciņā?



3.2. attēls. Uzdevums par četriem šaha zirgiem

Šajā uzdevumā izšķiroša loma ir rūtiņām un to savstarpējam izvietojumam, precīzāk, tam, vai rūtiņas saistītas ar zirga gājienu. Modelēsim uzdevumu šādi: piekārtosim katram laucinam vienu virsotni un saistīsim divas virsotnes ar līniju, ja atbilstošie lauciņi ir saistīti ar zirga gājienu (skatīt 3.3.(a) attēlā).



3.3. attēls. Grafs uzdevumam par četriem šaha zirgiem

Tagad aizmirsīsim par šaha galdu kā fizikālu objektu un pārkārtosim grafa virsotnes tā, lai grafa struktūra ir labāk redzama (skatīt 3.3.(b) attēlā).

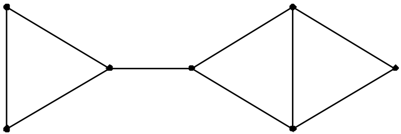
Var redzēt, ka uzdevumam nav atrisinājuma, jo sākuma stāvoklī starp diviem baltajiem zirgiem nav melnā zirga, bet beigu stāvoklī starp tiem ir jābūt melnajam zirgam, grafa šķautnes ir izvietotas tā, ka divi blakus esoši zirgi nevar pārlēkt viens otram pāri.

1.2. Grafu klases

Definēsim plašāk izmantotās grafu klases.

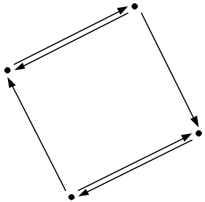
Neorientētie grafi. Par *grafu* (*neorientētu grafu*) sauksim pāri $\Gamma = (V, E)$, kur V - grafa *virsotņu kopa* un E ir grafa *neorientētu šķautņu kopa*.

Ja $\Gamma = (V, E)$ ir neorientēts grafs, tad tā virsotņu skaitu standarti apzīmēsim ar $|V|$ un šķautņu skaitu apzīmēsim ar $|E|$.



3.6. attēls. Neorientēta grafa piemērs

Orientētie grafi. Par *orientētu grafu* sauksim pāri $\Gamma = (V, E)$, kur V - orientēta grafa virsotņu kopa, E - *orientētu šķautņu kopa*.



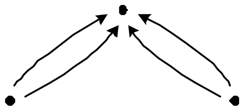
3.7. attēls. Orientēta grafa piemērs

No orientēta grafa var iegūt neorientētu grafu, "aizmirstot" šķautņu orientāciju.

Otrādi, no neorientēta grafa var iegūt orientētu grafu, uzskatot katru neorientētu šķautni par divu pretēju orientētu šķautņu apvienojumu.

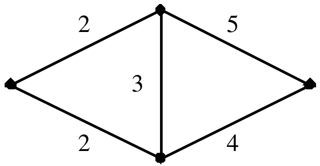
Var apskatīt *orientētu grafu ar cilpām* .

Multigrafi. Par *neorientētu* vai *orientētu multigrafu* sauksim grafu, kurā var būt vairāk nekā viena neorientēta vai orientēta šķautne starp divām virsotnēm vienā virzienā, tas var būt ar vai bez cilpām.



3.8. attēls. Orientēta multigrafa piemērs

Grafi ar svariem. Par *nosvērtu grafu* (*grafu ar indeksētām virsotnēm* un/vai *šķautnēm*) sauksim grafu, kura katrai virsotnei un/vai šķautnei var būt piekārtots skaitlis, vairāki skaitļi vai citu kopu elementi.



3.9. attēls. Nosvērta grafa piemērs

Grafus var attēlot dažādos veidos - var bīdīt virsotnes un šķautnes. Ir jāizvēlas tāds veids, kas palīdz atrisināt uzdevumu.

Ja grafi atsķiras tikai ar izvietojumu un virsotņu apzīmējumiem, tad tos sauc par *izomorfiem* grafiem. Izomorfus grafus uzskatīsim par matemātiski neatšķiramiem.

1.3. Grafu modeļi

Matemātiskajās sacensībās bieži tiek piedāvāti uzdevumu ar šādiem modeļiem:

- sociālie gafi (draugi, pazīšanās);
- transporta vai sakaru tīklu grafi (ielas, pilsētas un ceļi, ezeri, salas un upes, datortīkli);
- sacensību grafi (virsotnes - komandas, orientētas šķautnes - spēļu iznākumi);
- kopu iekļaušanas grafi (virsotnes - kopas, šķautnes - iekļaušana);
- šaha galds (virsotnes - lauciņi);
- daudzskaldņu grafi (virsotnes - ğeometriskās virsotnes, šķautnes - ğeometriskās šķautnes);
- plakanu līniju līniju grafi (virsotnes - līniju daļu krustpunkti, šķautnes - līniju daļas starp krustpunktiem);
- ğenealoğiskie grafi (cilvēki, baktērijas);

- spēļu grafi (virsotnes - spēles stāvokļi, šķautnes - atļautie gājieni, sīkāk neapskatīsim).

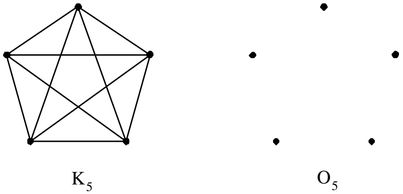
1.4. Speciālas grafu klases

Apskatīsim dažas speciālas grafu klases vai grafus. Grafu speciālgadījumus var izmantot pieņēmumu pārbaudei vai atspēkošanai.

Par *triviālo grafu* sauksim grafu ar vienu virsotni un bez šķautnēm. Par *tukšo grafu* sauksim "grafu", kura virsotņu un šķautņu kopas ir tukšas.

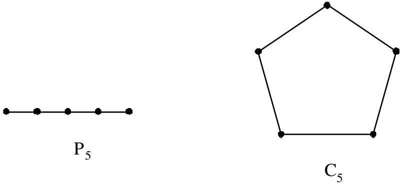
Pilnais grafs K_n - (neorientēts) grafs ar n virsotnēm, visi virsotņu pāri savā starpā ir savienoti.

Bezšķautņu grafs O_n - (neorientēts) grafs ar n virsotnēm un 0 šķautnēm.



3.14. attēls. Pilna grafa un bezšķautņu grafa piemēri

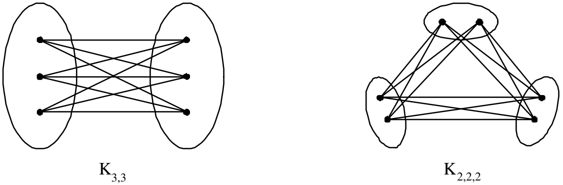
Ķēde P_n - sakarīgs grafs ar n virsotnēm, kur divām virsotnēm pakāpe ir 1 un pārējām pakāpe ir 2. *Cikls* C_n - sakarīgs grafs ar n virsotnēm, kur katrai virsotnei pakāpe ir 2.



3.15. attēls. Ķēdes un cikla piemēri

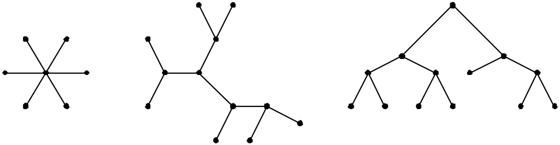
Divdaļīgs grafs - grafs, kura virsotņu kopu var sadalīt divās daļās tā, ka jebkuras divas virsotnes, kas pieder vienai daļai, nav savienotas.

m-daļīgs grafs - grafs, kura virsotnes var sadalīt m daļās tā, ka jebkuras divas virsotnes, kas pieder vienai daļai, nav savienotas.



3.17. attēls. 2-daļīga un 3-daļīga grafa piemēri

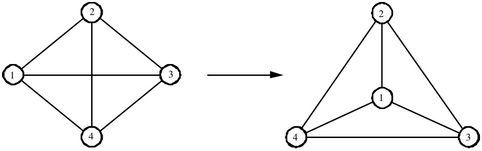
Koks - sakarīgs grafs bez cikliem (sakarīgs *aciklisks* grafs). *Mežs* - grafs bez cikliem (ne obligāti sakarīgs).



3.19. attēls. Mežs

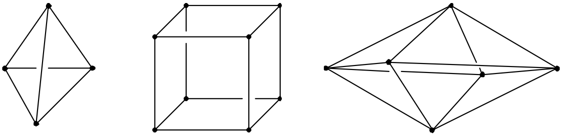
Plakans grafs - grafs, kas ir uzzīmēts tā, ka šķautnēm ir kopīgi punkti tikai virsotnēs.

Planārs grafs - grafs, kuru var uzzīmēt kā plakanu grafu (*plakanizēt*).

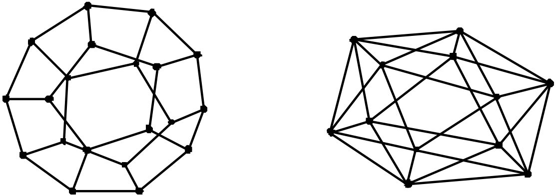


3.21. attēls. Planāra grafa plakanizācijas piemērs

Regulāro daudzskaldņu grafi tiek iegūti no tā saucamajiem regulārajiem daudzskaldņiem (tetraedrs, kubs, oktaedrs, dodekaedrs, ikosaedrs), kur katram atbilst grafs, kura virsotnes un šķautnes atbilst figūras ģeometriskajām virsotnēm un šķautnēm.



Tetraedra grafs Kuba grafs Oktaedra grafs



Dodekaedra grafs | Ikosaedra grafs

3.23. attēls. Regulāro daudzskaldņu grafi

1.5. Pamatdefinīcijas

1.5.1. Vienādība un apakšgrafi

Jebkura tipa divus grafus sauksim par vienādiem, ja to virsotņu un šķautņu kopas ir vienādas.

Ja dots grafs $\Gamma = (V, E)$, tad grafu $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$ sauksim par Γ *apakšgrafu*, ja $V_1 \subseteq V, E_1 \subseteq E$, un katra no kopas E_1 šķautnēm ir incidenta tikai kopas V_1 virsotnēm, apzīmēsim to ar pierakstu $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$.

1.5.2. Virsotnes apkārtne

Par grafa virsotnes *apkārtni* sauksim virsotņu kopas apakškopu, kas satur visas ar to savienotās virsotnes, virsotnes v apkārtni apzīmēsim ar $N_\Gamma(v)$.

Par orientēta grafa virsotnes v *pozitīvo/negatīvo apkārtni* sauksim virsotņu kopu, kas satur visas virsotnes u tādas, ka eksistē šķautne

$(u,v)/(v,u)$, šīs kopas apzīmēsim ar $N_+(v)$ vai $N_-(v)$. Orientētā grafā Γ kopu $N_-(v)$ apzīmēsim arī ar $\Gamma(v)$ un kopu N_+ - ar $\Gamma^{-1}(v)$.

Par grafa virsotnes *pakāpi* sauksim ar to incidento šķautņu skaitu vai, citiem vārdiem sakot, virsotnes apkārtnes elementu skaitu, virsotnes v pakāpi apzīmēsim ar $d(v)$.

Par orientēta grafa virsotnes v *pozitīvo/negatīvo puspakāpi* sauksim ar v incidento ieejošo/izejošo šķautņu skaitu jeb v pozitīvās/negatīvās apkārtnes elementu skaitu, apzīmēsim ar $d_+(v)/d_-(v)$.

1.1. teorēma.

1. Grafa $\Gamma = (V, E)$ virsotņu pakāpju summa ir vienāda ar divkāršotu šķautņu skaitu:
$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$
2. Orientētā grafā $\Gamma = (V, E)$ ir spēkā formula
$$\sum_{v \in V} d_-(v) + \sum_{v \in V} d_+(c) = 2|E|.$$

3. Orientētā grafā $\Gamma = (V, E)$ ir spēkā formula

$$\sum_{v \in V} d_-(v) = \sum_{v \in V} d_+(c) = |E|.$$

PIERĀDĪJUMS Pielietosim kombinatorikas pamatprincipu ”skaitīšana divos dažādos veidos”.

Neorientēta grafa gadījumā skaitīsim katras virsotnes v incidentās šķautnes un summēsim šos skaitļus pa visām grafa virsotnēm:

- no vienas puses, mēs iegūsim $\sum_{v \in V} d(v)$,
- no otras puses, tā kā katrai šķautnei ir divi galapunkti, tad katra šķautne tiks skaitīta divas reizes un summā iegūsim lielumu $2|E|$.

Līdzīga sprieduma ceļā iegūsim arī pirmo apgalvojumu orientētam grafam.

Otrais apgalvojums orientētajam grafam izsaka to, ka šķautņu izejošo galu ir tikpat, cik ieejošo galu.■

1.1. piezīme. Svarīgs secinājums neorientēto grafu gadījumā - virsotņu skaits ar nepāra pakāpēm ir pāra skaitlis:

$$\sum_{v \in V} d(v) = \underbrace{d(v_1) + ... + d(v_k)}_{\text{nepāra pakāpes}} + \underbrace{d(v_{k+1}) + ... + d(v_n)}_{\text{pāra pakāpes}} = 2|E|.$$

1.3. piemērs. Kādā valstī ir 200 pilsētas, no katras pilsētas iziet 8 (divvirziena) ceļi. Cik ceļu ir valstī?

Klasē ir 30 cilvēki. Vai var būt, ka 9 cilvēkiem ir 3 draugi, 11- 4 draugi un 10 - 5 draugi.

Valstī ir vairāki ezeri. Tiek apgalvots, ka no katra ezera iztek 4 upes, bet ietek 5 upes. Pierādīt, ka tas nav iespējams.