DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Jauno matemātiķu skola

Loģikas pamati

2008. g. 8. novembris

Saturs

1. Loğikas jēdziens

No grieķu valodas $\lambda\omega\gamma\omega\sigma$ (logos) ir zinātne, vārds.

Termins "loğika" ir traktējams gan plašākā, gan šaurākā nozīmē.

- **Plašākā nozīmē** loğika ir noteiktā veidā sakārtota attīstība. Šāda loğika piemīt gan dabas un sociālajiem procesiem, gan domāšanas saturam un cilvēka praktiskai darbībai.
- **Šaurākā nozīmē** ar loğiku jāsaprot mācība par domāšanas likumiem un formām.

Loğika pēta tikai tos domāšanas veidus, kuri fiksēti ar vārdu palīdzību, t.i., ar teikumiem.

2. Izteikuma jēdziens

2.1. piemērs. *Atrast patiesus un aplamus apgalvojumus.*

1. Matemātika ir ļoti interesants mācību priekšmets.
2. $2 + 2 = 7$.
3. Ja visas trīsstūra malas ir vienādas, tad tas ir vienādmalu trīsstūris.
4. Cik Jums gadu?
5. Rīga nav Latvijas galvaspilsēta.
6. $2 + 4 - 70$.
7. 8 ir pāra skaitlis.
8. Izvēlies Latvijas preci!
9. 150 dalās ar 10, vai 150 dalās ar 7.
10. Lai Jaunajā gadā piepildās visas Tavas vēlēšanās!
11. Divas taisnes sauc par paralēlām, ja tās nekrustojas.

Ar izteikumu saprot apgalvojuma teikumu (apgalvojumu), kuram ir piešķirta viena un tikai viena no **patiesumvērtībām**:

- **patiess** (p);
- **aplams** (a).

Pie izteikumiem nepieder:

1. jautājuma teikumi
   piemēram, "Vai tu šodien iesi uz skolu?"
2. izsaukuma teikumi
   piemēram, "Cik jauka diena!"
3. nenoteikti apgalvojuma teikumi
   piemēram, "Vasara ir skaists gadalaiks."

Izteikumus apzīmēsim ar lielajiem latīņu burtiem. Var pievienot arī indeksus. Izteikuma apzīmējumu sauksim par **izteikumsimbolu**. Piemēram, izteikumsimboli A, B, C, …, A_1, A_2, A_3, ….

2.2. piemērs. *Noteikt, kuri no 2.1. piemērā dotajiem teikumiem ir izteikumi.*

2.2. piemēra atbildes. *Izteikumi ir zilā krāsā.*

1. Matemātika ir ļoti interesants mācību priekšmets.
2. $2 + 2 = 7$.
3. Ja visas trīsstūra malas ir vienādas, tad tas ir vienādmalu trīsstūris.
4. Cik Jums gadu?
5. Rīga nav Latvijas galvaspilsēta.
6. $2 + 4 - 70$.
7. 8 ir pāra skaitlis.
8. Izvēlies Latvijas preci!
9. 150 dalās ar 10, vai 150 dalās ar 7.
10. Lai Jaunajā gadā piepildās visas Tavas vēlēšanās!
11. Divas taisnes sauc par paralēlām, ja tās nekrustojas.

2.1. Pamatizteikumi un salikti izteikumi

Izteikumus iedala pamatizteikumos un saliktos izteikumos.

Pamatizteikums ir tāds izteikums, kuru *nav* iespējams sadalīt atsevišķos izteikumos. **Salikts izteikums** ir tāds izteikums, kuru *ir* iespējams sadalīt atsevišķos izteikumos.

2.3. piemērs. Noskaidrot, kuri no izteikumiem ir pamatizteikumi, un kuri salikti izteikumi.

1. Latvija ir valsts, **bet** lats ir naudas vienība.
2. **Ja** $3 + 2 = 5$, **tad** 9 ir pāra skaitlis.
3. **Ja** $1 + 2 = -5$ **vai** $1 + 2 = -8$, **tad** $1 + 2 < 0$.
4. 12 dalās ar 5 **tad un tikai tad, ja** 12 dalās ar 6.
5. Skaitlis 3 ir lielāks **vai** mazāks par 10.
6. Daugavpils pēc iedzīvotāju skaita ir otra lielākā pilsēta Latvijā.
7. Laulāšana notiek, personīgi klātesot līgavainim.

2.3. piemēra atbilde.

1. Pamatizteikumi:
   - Daugavpils pēc iedzīvotāju skaita ir otra lielākā pilsēta Latvijā.
2. Salikti izteikumi:
   - A- Latvija ir valsts, **bet** lats ir naudas vienība.
     A_1- Latvija ir valsts,
     A_2- lats ir naudas vienība.
   - B- **Ja** $3+2=5$, **tad** 9 ir pāra skaitlis.
     B_1- $3+2=5$,
     B_2- 9 ir pāra skaitlis.
   - C- **Ja** $1+2=-5$ **vai** $1+2=-8$, **tad** $1+2<0$.
     C_1- $1+2=-5$,
     C_2- $1+2=-8$,
     C_3- $1+2=<0$.
   - D- 12 dalās ar 5 **tad un tikai tad, ja** 12 dalās ar 6.
     D_1- 12 dalās ar 5,
     D_2- 12 dalās ar 6.

- E- Skaitlis 3 ir lielāks **vai** mazāks par 10.
  E_1- 3 ir lielāks par 10,
  E_2- 3 ir mazāks par 10.
- F- Laulāšana notiek**,** personīgi klātesot līgavainim.
  F_1- laulību ceremonija notiek,
  F_2- līgavainis personīgi ierodas uz laulību ceremoniju.

- Izteikumam A iespējami divi dažādi patiesumvērtību komplekti:

A
p
a

- Saliktam izteikumam, kuru veido divi pamatizteikumi A un B, iespējami četri atšķirīgi izteikumu A un B patiesumvērtību komplekti:

A	**B**
p	p
p	a
a	p
a	a

- Saliktam izteikumam, kuru veido trīs pamatizteikumi, iespējami ...

3. Loģiskās operācijas

Ar **loģisko operāciju** palīdzību vai nu no viena, vai nu no jebkuriem diviem izteikumiem var izveidot jaunus izteikumus.

Nākošajā tabulā var apskatīt visbiežāk lietotās loģiskās operācijas un to lasīšanas variantus:

loģiskā operācija	kā atpazīt izteikumā
konjunkcija	... **un** ...
disjunkcija	... **vai** ...
implikācija	**ja** ... , **tad** ...
ekvivalence	... **tad un tikai tad, ja** ...
noliegums	**ne** ...

3.1. Konjunkcija

Izteikumu A un B konjunkciju apzīmēsim

$$A \wedge B.$$

Izmanto arī apzīmējumu $A \& B$.

$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$	lasa
	A un B
	ne tikai A, bet arī B
	B, kaut arī A
	B, neskatoties uz to, ka A
	A kopā ar B
	gan A, gan B

3.1. piemērs. Noteikt izteikumu patiesumvērtību.

1. 3 un 13 ir pirmskaitlis.
2. 3 un 4 ir pirmskaitlis.
3. Gan 24 ir pirmskaitlis, gan 41 ir pirmskaitlis.
4. 8 un 4 ir pirmskaitlis.

Tātad izteikumu A un B konjunkcijai A ∧ B atbilst šāda patiesumvērtību tabula:

A	**B**	**A ∧ B**
p	p	p
p	a	a
a	p	a
a	a	a

3.2. Disjunkcija

Izteikumu A un B disjunkciju apzīmēsim

$$A \vee B.$$

$\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$	lasa
	A vai B
	A vai B, vai abi

3.2. piemērs. Noteikt izteikumu patiesumvērtību.

1. $12 > 9$ vai $16 > 9$.
2. $2 + 2 = 4$ vai $2 + 2 = 5$.
3. 5 ir salikts skaitlis, vai 22 ir salikts skaitlis.
4. $10 \cdot 2 = 25$ vai $5 \cdot 4 = 25$.

Tātad izteikumu A un B disjunkcijai $\mathrm{A} \vee \mathrm{B}$ atbilst šāda patiesumvērtību tabula:

A	**B**	**A ∨ B**
p	p	p
p	a	p
a	p	p
a	a	a

3.3. Noliegums

Izteikuma A noliegumu apzīmēsim

$$\overline{\mathrm{A}}.$$

Izmanto arī apzīmējumu $\rceil A$.

$\overline{\mathrm{A}}$	lasa
	Ne A A nav patiess nav tiesa, ka A nepareizi, ka izpildās A

3.3. piemērs. Apskatīsim dažu izteikumu noliegumus.

izteikums	izteikuma noliegums
8 dalās ar 3	8 nedalās ar 3
Usma nav ezers	Usma ir ezers

Dotā izteikuma noliegums ir jauns izteikums, kurā tiek apgalvota dotā izteikuma aplamība. Tāpēc, ja dotais izteikums ir patiess, tad tā noliegums ir aplams - un otrādi. Tātad izteikuma A noliegumam $\overline{\mathrm{A}}$ atbilst šāda patiesumvērtību tabula:

A	$\overline{A}$
p	a
a	p

Izslēgtā trešā likums

$$A \vee \overline{A} \sim p$$

3.4. piemērs. Dotajam izteikumam atrast noliegumu.

1. $4 - 3 = 0$.
2. Oktobris nav pavasara mēnesis.
3. Ņujorka ir ASV galvaspilsēta.
4. $3 > 7$.
5. 8 ir pāra skaitlis.
6. Funkcija $f(x) = x^2$ ir nepāra funkcija.
7. Caur diviem plaknes punktiem var novilkt vienu vienīgu taisni.

3.4. piemēra atbildes. Dotajam izteikumam atbilstošais noliegums ir zilā krāsā.

1. $4 - 3 = 0$.
   $4 - 3 \neq 0$.
2. Oktobris nav pavasara mēnesis.
   Oktobris ir pavasara mēnesis.
3. Ņujorka ir ASV galvaspilsēta.
   Ņujorka nav ASV galvaspilsēta.
4. $3 > 7$.
   $3 \leq 7$.
5. 8 ir pāra skaitlis.
   8 nav pāra skaitlis.
6. Funkcija $f(x) = x^2$ ir nepāra funkcija.
   Funkcija $f(x) = x^2$ nav nepāra funkcija.
7. Caur diviem plaknes punktiem var novilkt vienu vienīgu taisni.
   Nepareizi, ka caur diviem plaknes punktiem var novilkt vienu vienīgu taisni.

izteikums	*izteikuma noliegums*
dažiem piemīt īpašība x	**visiem nepiemīt** īpašība x
visiem piemīt īpašība x	**dažiem nepiemīt** īpašība x

Piemēram:

A- **Visi** naturāli skaitļi **dalās** ar 10.
$\overline{A}$- **Eksistē** naturāli skaitļi, kuri **nedalās** ar 10.

A- **Daži** naturāli skaitļi **ir** pāra skaitļi.
$\overline{A}$- **Visi** naturāli skaitļi **nav** pāra skaitļi.

A- **Daži** skolēni **apmeklē** DU JMS nodarbības.
$\overline{A}$- ...

A- **Ikviens** skolēns **gaida** skolas brīvlaiku.
$\overline{A}$- ...

3.5. piemērs. Atrast apgalvojuma "Visi ceļi ved uz Romu" noliegumu.

1. Visi ceļi neved uz Romu.
2. Daži ceļi ved uz Romu.
3. Daži ceļi neved uz Romu.
4. Visi ceļi ved uz Rīgu.

3.6. piemērs. Atrast apgalvojuma "Dažās pilsētās ir metro" noliegumu.

1. Visās pilsētās ir metro.
2. Visās pilsētās nav metro.
3. Dažās pilsētās nav metro.
4. Ne visās pilsētās ir metro.

3.5. piemēra atbilde. Apgalvojuma "Visi ceļi ved uz Romu" noliegums atzīmēts ar zilu krāsu.

1. Visi ceļi neved uz Romu.
2. Daži ceļi ved uz Romu.
3. Daži ceļi neved uz Romu.
4. Visi ceļi ved uz Rīgu.

3.6. piemēra atbilde. Apgalvojuma "Dažās pilsētās ir metro" noliegums atzīmēts ar zilu krāsu.

1. Visās pilsētās ir metro.
2. Visās pilsētās nav metro.
3. Dažās pilsētās nav metro.
4. Ne visās pilsētās ir metro.

3.7. piemērs. Noteikt, kuri no dotajiem apgalvojumiem ir viens otra noliegums un kuri nav.

1.

28 dalās ar 7.
28 nedalās ar 7.

2.

$2 \cdot 3 = 6.$
$2 \cdot 3 \neq 4.$

3.

Mākoņkalns ir Latvijas visaugstākais kalns.
Gaiziņš ir Latvijas visaugstākais kalns.

4.

Mans tēvs ir vecāks par manu māti.
Mana māte ir vecāka par manu tēvu.

5.

Dažiem cilvēkiem pasē ir ierakstīti divi vārdi.
Dažiem cilvēkiem pasē ir ierakstīti trīs vārdi.

3.7. piemēra atbilde. tikai 1. gadījumā dotie apgalvojumi ir viens otra noliegums.

3.4. Implikācija

Izteikumu A un B implikāciju apzīmēsim

$$A \to B.$$

Izmanto arī apzīmējumus $A \supset B$, $A \Longrightarrow B$.

A → B	lasa
	ja A, tad B
	B, ja A
	A, ja tikai B
	A pietiekams, lai B
	B nepieciešami, lai A

Implikāciju sauc arī par nosacījuma izteikumu.

3.8. piemērs. Noteikt, kādos gadījumos izteikums

"Ja 18.11.08. būs skaidrs laiks, tad Daugavpilī būs salūts"

ir aplams.

Tātad izteikumu A un B implikācijai A $\rightarrow$ B atbilst šāda patiesumvērtību tabula:

A	**B**	**A $\rightarrow$ B**
p	p	p
p	a	a
a	p	p
a	a	p

3.9. piemērs. Noteikt izteikumu patiesumvērtību.

1. Ja 3 ir pirmskaitlis, tad 4 ir pirmskaitlis.
2. Ja 8 ir pirmskaitlis, tad 4 ir pirmskaitlis.
3. Ja 3 ir pirmskaitlis, tad 13 ir pirmskaitlis.
4. Ja 8 ir pirmskaitlis, tad 41 ir pirmskaitlis.

3.5. Ekvivalence

Izteikumu A un B ekvivalenci apzīmēsim

$$A \leftrightarrow B.$$

Izmanto arī apzīmējumus $A \equiv B$, $A \rightleftarrows B$, $A \iff B$.

Izteikumu A un B ekvivalences $A \leftrightarrow B$ apzīmējums norāda, ka izpildās gan implikācija $A \rightarrow B$, gan implikācija $B \rightarrow A$.

$A \leftrightarrow B$	lasa
	A tad un tikai tad, ja B
	Ja A, tad B, un, ja B, tad A
	B, ja A, un A, ja B
	A līdzvērtīgs B
	A pietiekami un nepieciešami, lai B

3.10. piemērs. Noteikt izteikumu patiesumvērtību.

1. 12 dalās ar 6 tad un tikai tad, ja 12 dalās ar 3.
2. 12 dalās ar 6 tad un tikai tad, ja 12 dalās ar 7.
3. 12 dalās ar 5 tad un tikai tad, ja 12 dalās ar 8.
4. 12 dalās ar 9 tad un tikai tad, ja 12 dalās ar 3.

Tātad izteikumu A un B ekvivalencei A $\leftrightarrow$ B atbilst šāda patiesumvērtību tabula:

A	**B**	**A $\leftrightarrow$ B**
p	p	p
p	a	a
a	p	a
a	a	p

4. Nosacījuma teikumi

4.1. piemērs. Nosacījuma teikumu

"Ja cilvēks dzīvo Daugavpilī, tad viņš dzīvo Latvijā"

pārrakstīt, izmantojot vārdus

1. nepieciešami;
2. pietiekami.

4.1. piemēra atbilde.

“Ja cilvēks dzīvo Daugavpilī, tad viņš dzīvo Latvijā”

$$D \to L$$

D- cilvēks dzīvo Daugavpilī;

L- cilvēks dzīvo Latvijā.

1. Nepieciešams dzīvot Latvijā, lai varētu dzīvot Daugavpilī.
2. Lai dzīvotu Latvijā, pietiek dzīvot Daugavpilī.

4.2. piemērs. Pārrakstīt dotos nosacījuma teikumus, izmantojot izteikumu loģikas formulas.

1. Ja A, tad B.
2. A tad, ja B.
3. A pietiekams, lai B.
4. A nepieciešams, lai B.
5. A tad un tikai tad, ja B.
6. A pietiekami un nepieciešami, lai B.
7. B pietiekami, lai A.
8. B nepieciešami, lai A.
9. B pietiekami un nepieciešami, lai A.
10. A tikai tad, ja B.

4.2. piemēra atbilde.

$A \to B$.	Ja A, tad B.
$B \to A$.	A tad, ja B.
$A \to B$.	A pietiekams, lai B.
$B \to A$.	A nepieciešams, lai B.
$B \leftrightarrow A$.	A tad un tikai tad, ja B.
$A \leftrightarrow B$.	A pietiekami un nepieciešami, lai B.
$B \to A$.	B pietiekami, lai A.
$A \to B$.	B nepieciešami, lai A.
$B \leftrightarrow A$.	B pietiekami un nepieciešami, lai A.
$(B \to A) \land (\overline{B} \to \overline{A})$.	A tikai tad, ja B.

$A \to B$	TIEŠĀ teorēma
$B \to A$	APGRIEZTĀ teorēma
$\overline{A} \to \overline{B}$	PRETĒJĀ teorēma
$\overline{B} \to \overline{A}$	PRETĒJĀS TEORĒMAS APGRIEZTĀ teorēma APGRIEZTĀS TEORĒMAS PRETĒJĀ teorēma

4.3. piemērs. Noteikt, kuri no apgalvojumiem ir patiesi un kuri ir aplami (apskatīt dalīšanu nat. sk.) Kuri no apgalvojumiem (norādīt to numurus) ir savstarpēji apgriezti, pretēji, apgriezti pretēji?

1. Ja katrs saskaitāmais dalās ar 7, tad arī to summa dalās ar 7.
2. Ja neviens no saskaitāmajiem nedalās ar 7, tad arī to summa nedalās ar 7.
3. Ja summa dalās ar 7, tad arī katrs saskaitāmais dalās ar 7.
4. Ja summa nedalās ar 7, tad neviens saskaitāmais nedalās ar 7.
5. Ja vismaz viens saskaitāmais dalās ar 7, tad arī to summa dalās ar 7.
6. Ja summa nedalās ar 7, tad vismaz viens tās saskaitāmais nedalās ar 7.
7. Ja summa dalās ar 7, tad arī vismaz viens tās saskaitāmais dalās ar 7.
8. Ja vismaz viens saskaitāmais nedalās ar 7, tad arī summa nedalās ar 7.

4.3. piemēra atbilde. Apzīmēsim

A- katrs saskaitāmais dalās ar 7;

B- saskaitāmo summa dalās ar 7.

D- neviens saskaitāmais nedalās ar 7;

Tad $\overline{A}$- vismaz viens saskaitāmais nedalās ar 7;

$\overline{B}$- saskaitāmo summa nedalās ar 7.

$\overline{D}$- vismaz viens saskaitāmais dalās ar 7;

1. p, $A \rightarrow B$;
2. a, $D \rightarrow \overline{B}$;
3. a, $B \rightarrow A$;
4. a, $\overline{B} \rightarrow D$;
5. a, $\overline{D} \rightarrow B$;
6. p, $\overline{B} \rightarrow \overline{A}$;
7. a, $B \rightarrow \overline{D}$;
8. a, $\overline{A} \rightarrow \overline{B}$.

Tāpēc savstarpēji apgriezti apgalvojumi ir 1 un 3, 2 un 4, 5 un 7, 6 un 8.

Savstarpēji pretēji apgalvojumi ir 1 un 8, 2 un 5, 3 un 6, 4 un 7.

Savstarpēji apgriezti pretēji apgalvojumi ir 1 un 6, 2 un 7, 3 un 8, 4 un 5.

Paldies par uzmanību!