DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Jauno matemātiķu skola

Anita Sondore

Loğikas pamati

10.-12. kl. skolēniem

2008. g. 15. novembris

1. Teorēmu veidi

$A \rightarrow B$	TIEŠĀ teorēma
$B \rightarrow A$	APGRIEZTĀ teorēma
$\overline{A} \rightarrow \overline{B}$	PRETĒJĀ teorēma
$\overline{B} \rightarrow \overline{A}$	PRETĒJĀS TEORĒMAS APGRIEZTĀ teorēma APGRIEZTĀS TEORĒMAS PRETĒJĀ teorēma

1.1. piemērs. Noteikt, kuri no apgalvojumiem ir patiesi un kuri ir aplami (apskatīt dalīšanu nat. sk.) Kuri no apgalvojumiem (norādīt to numurus) ir savstarpēji apgriezti, pretēji, apgriezti pretēji?

1. Ja katrs saskaitāmais dalās ar 7, tad arī to summa dalās ar 7.
2. Ja neviens no saskaitāmajiem nedalās ar 7, tad arī to summa nedalās ar 7.
3. Ja summa dalās ar 7, tad arī katrs saskaitāmais dalās ar 7.
4. Ja summa nedalās ar 7, tad neviens saskaitāmais nedalās ar 7.
5. Ja vismaz viens saskaitāmais dalās ar 7, tad arī to summa dalās ar 7.
6. Ja summa nedalās ar 7, tad vismaz viens tās saskaitāmais nedalās ar 7.
7. Ja summa dalās ar 7, tad arī vismaz viens tās saskaitāmais dalās ar 7.
8. Ja vismaz viens saskaitāmais nedalās ar 7, tad arī summa nedalās ar 7.

1.1. piemēra atbilde. Apzīmēsim

A- katrs saskaitāmais dalās ar 7;

B- saskaitāmo summa dalās ar 7.

D- neviens saskaitāmais nedalās ar 7;

Tad $\overline{A}$- vismaz viens saskaitāmais nedalās ar 7;

$\overline{B}$- saskaitāmo summa nedalās ar 7.

$\overline{D}$- vismaz viens saskaitāmais dalās ar 7;

1. p, $A \rightarrow B$;
2. a, $D \rightarrow \overline{B}$;
3. a, $B \rightarrow A$;
4. a, $\overline{B} \rightarrow D$;
5. a, $\overline{D} \rightarrow B$;
6. p, $\overline{B} \rightarrow \overline{A}$;
7. a, $B \rightarrow \overline{D}$;
8. a, $\overline{A} \rightarrow \overline{B}$.

Tāpēc savstarpēji apgriezti apgalvojumi ir 1 un 3, 2 un 4, 5 un 7, 6 un 8.

Savstarpēji pretēji apgalvojumi ir 1 un 8, 2 un 5, 3 un 6, 4 un 7.

Savstarpēji apgriezti pretēji apgalvojumi ir 1 un 6, 2 un 7, 3 un 8, 4 un 5.

1.2. piemērs. *Parādīt, ka savstarpēji apgrieztas teorēmas var būt:*

1. abas patiesas;
2. tiešā teorēma patiesa, bet apgrieztā teorēma aplama;
3. tiešā teorēma aplama, bet apgrieztā teorēma patiesa;
4. abas aplamas.

1.2. piemēra atbildes.

1. tiešā teorēma un apgrieztā teorēma ir patiesa.

   tiešā Ja paralelograms ir rombs, tad paralelograma diagonāles ir savstarpēji perpendikulāras.

   apgrieztā Ja paralelograma diagonāles ir savstarpēji perpendikulāras, tad paralelograms ir rombs.

2. tiešā teorēma patiesa, bet apgrieztā teorēma aplama.

   tiešā Ja četrstūris ir rombs, tad četrstūra diagonāles ir savstarpēji perpendikulāras.

   apgrieztā Ja četrstūra diagonāles ir savstarpēji perpendikulāras, tad četrstūris ir rombs.

3. tiešā teorēma aplama, bet apgrieztā teorēma patiesa.

   tiešā Ja četrstūra diagonāles ir savstarpēji perpendikulāras, tad četrstūris ir rombs.

   apgrieztā Ja četrstūris ir rombs, tad četrstūra diagonāles ir savstarpēji perpendikulāras.

4. tiešā teorēma un apgrieztā teorēma ir aplama.

   tiešā Ja naturāls skaitlis ir pirmskaitlis, tad šis naturālais skaitlis ir nepāra skaitlis.

   apgrieztā Ja naturāls skaitlis ir nepāra skaitlis, tad šis naturālais skaitlis ir pirmskaitlis.

1.3. piemērs. Pierādīt, ka tiešā teorēma un apgrieztās teorēmas pretējā teorēma ir līdzvērtīgas.

1.3. piemēra atbilde. Jāpierāda, ka tiešā teorēma $A \rightarrow B$ un apgrieztās teorēmas pretējā teorēma $\overline{B} \rightarrow \overline{A}$ ir līdzvērtīgas, t.i., ka

$$A \rightarrow B \sim \overline{B} \rightarrow \overline{A}.$$

Aizpildīsim atbilstošo patiesumvērtību tabulu.

A	B	$A \rightarrow B$	$\overline{B} \rightarrow \overline{A}$
p	p	p	p
p	a	a	a
a	p	p	p
a	a	p	p

Formulu $A \rightarrow B$ un $\overline{B} \rightarrow \overline{A}$ patiesumvērtības sakrīt, tātad tiešā teorēma un apgrieztās teorēmas pretējā teorēma ir līdzvērtīgas.

Šajā tabulā, pamatojoties uz 1.3. piemēra apgalvojumu, ar vienādu krāsu ir izdalītas līdzvērtīgas teorēmas:

Tiešā teorēma	$A \to B$	$B \to A$	Apgrieztā teorēma
Pretējā teorēma	$\overline{A} \to \overline{B}$	$\overline{B} \to \overline{A}$	Apgrieztās teorēmas pretējā teorēma

1.4. piemērs. Pierādīt, ka $A \leftrightarrow B \sim (A \to B) \wedge (B \to A)$.

1.4. piemēra atbilde.

Aizpildīsim atbilstošo patiesumvērtību tabulu.

A	B	$A{\to}B$	$B{\to}A$	$(A \to B) \wedge (B \to A)$	$A \leftrightarrow B$
p	p	p	p	p	p
p	a	a	p	a	a
a	p	p	a	a	a
a	a	p	p	p	p

Formulu $A{\leftrightarrow}B$ un $(A \to B) \wedge (\overline{B} \to \overline{A})$ patiesumvērtības sakrīt, tātad

$$A \leftrightarrow B \sim (A \to B) \wedge (\overline{B} \to \overline{A}).$$

Līdz ar to, pamatojoties uz 1.4. piemēra apgalvojumu, ja jāpierāda teorēma par izteikumu A un B ekvivalenci $A \leftrightarrow B$, tad pēc izvēles var pierādīt vienu no šiem gadījumiem:

a) $A \to B$ un $B \to A$;

b) $\overline{B} \to \overline{A}$ un $\overline{A} \to \overline{B}$;

c) $A \to B$ un $\overline{A} \to \overline{B}$;

d) $B \to A$ un $\overline{B} \to \overline{A}$.

2. Vienkāršākie nosacījuma apgalvojuma veidi

1. Modus ponens
$$\frac{p \to q, p}{q}.$$
2. Modus tollens
$$\frac{p \to q, \overline{q}}{\overline{p}}.$$
3. Kontrpozīcijas likums
$$\frac{p \to q}{\overline{q} \to \overline{p}}.$$
4. Ekvivalences secināšanas likums
$$\frac{p \to q, q \to p}{p \leftrightarrow q}.$$
5. Hipotētiskais sillogisms
$$\frac{p \to q, q \to r}{p \to r}.$$

2.1. piemērs. *Spriedumi, izmantojot vienkāršākos nosacījuma apgalvojuma veidus.*

1.
$$\frac{\begin{array}{l}\text{Ja skaitlis } a \text{ dalās ar 9, tad šis skaitlis dalās ar 3.}\\ \text{Skaitlis } a \text{ dalās ar 9.}\end{array}}{\text{Skaitlis } a \text{ dalās ar 3.}}$$

2.
$$\frac{\begin{array}{l}\text{Ja } n\text{-stūris ir regulārs, tad tajā var ievilkt riņķa līniju.}\\ \text{Dotajā } n\text{-stūrī nevar ievilkt riņķa līniju.}\end{array}}{\text{Dotais } n\text{-stūris nav regulārs.}}$$

3.
$$\frac{\text{Ja skaitlis ir racionāls, tad to var izteikt formā } \frac{m}{n}.}{\text{Ja skaitli nevar izteikt formā } \frac{m}{n}\text{, tad skaitlis nav racionāls.}}$$

kur $m, n \in \mathbb{N}$.

4.
$$\frac{\begin{array}{l}\text{Pitagora teorēma.}\\ \text{Pitagora teorēmas apgrieztā teorēma.}\end{array}}{?}$$

5. $\dfrac{\begin{array}{l}\text{Ja trijstūris ir vienādsānu, tad šī } \triangle \text{ 2 malas ir vienādas.}\\ \text{Ja trijstūra 2 malas ir vienādas, tad šī } \triangle \text{ 2 leņķi ir vienādi.}\end{array}}{\text{Ja trijstūris ir vienādsānu, tad šī } \triangle \text{ 2 leņķi ir vienādi}}$

2.2. piemērs. *Vai doties spriedumi ir pareizi?*

1. $$\begin{array}{l} \text{Ja } n\text{-stūris ir regulārs, tad tajā var ievilkt riņķa līniju.} \\ \text{Dotais } n\text{-stūris nav regulārs.} \\ \hline \text{Dotajā } n\text{-stūrī nevar ievilkt riņķa līniju.} \end{array}$$

2. $$\begin{array}{l} \text{Ja paralelograma diagonāles ir savstarpēji } \perp\text{, tad p-grams ir romb} \\ \text{Paralelograma diagonāles nav savstarpēji perpendikulāras.} \\ \hline \text{Paralelograms nav rombs.} \end{array}$$

3. $$\begin{array}{l} \text{Ja } n\text{-stūris ir regulārs, tad tajā var ievilkt riņķa līniju.} \\ n\text{-stūrī var ievilkt riņķa līniju.} \\ \hline n\text{-stūris ir regulārs.} \end{array}$$

4. $$\begin{array}{l} \text{Ja paralelograma diagonāles ir savstarpēji } \perp\text{, tad p-grams ir romb} \\ \text{Paralelograms ir rombs.} \\ \hline \text{Paralelograma diagonāles ir savstarpēji perpendikulāras.} \end{array}$$

3. Pierādījumu veidi

Apskatīsim dažas biežāk pielietotās vispārīgās teorēmu pierādīšanas stratēğijas.

3.1. Tiešais pierādījums

$$\mathbf{p} \to \mathbf{q}.$$

Pieņemam, ka izteikums p ir patiess un pierādām, ka pierādāmais izteikums q ir patiess.

3.1. piemērs. Pierādīt apgalvojumu: “Ja n un m ir pāra skaitļi, tad arī $n+m$ ir pāra skaitlis”.

3.1. piemēra atbilde.

Šo apgalvojumu var pierādīt ar šādu nosacījuma apgalvojumu virkni.

Ja n un m ir pāra skaitļi, tad $n = 2n_1$ un $m = 2m_1$.

Ja $n = 2n_1$ un $m = 2m_1$, tad $n + m = 2(n_1 + m_1)$.

Ja $n + m = 2(n_1 + m_1)$, tad $n + m = 2s$, kur s ir vesels skaitlis.

Ja $n + m = 2s$, tad $n + m$ ir pāra skaitlis.

$$(\text{visiem } \mathbf{x} \in \mathbf{A})\mathbf{P}(\mathbf{x}).$$

Pieņemam, ka x ir patvaļīgs elements no kopas A un pierādām, ka apgalvojums $P(x)$ ir patiess.

3.2. piemērs. Pierādīt apgalvojumu: "Jebkurš pāra skaitlis x ir izsakāms formā $x = 2y$, kur $y \in \mathbb{Z}$".

3.2. piemēra atbilde.

Patvaļīgs pāra skaitlis x ir izsakāms formā $x = 2y$, kur $y \in \mathbb{Z}$, tātad jebkurš pāra skaitlis ir izsakāms šādā formā.

3.2. Konstruktīvais tiešais pierādījums

Šo pierādījuma veidu parasti izmanto, ja ir jāpierāda apgalvojumi, kuros ir jāpierāda, ka eksistē kādi konkrēti elementi.

$$(\text{eksistē } \mathbf{x} \in \mathbf{A})\mathbf{P}(\mathbf{x}).$$

Lai pierādītu šādu izteikumu, ir jāpierāda vismaz viena tāda elementa $x \in A$ eksistence, ar kuru apgalvojums $P(x)$ ir patiess. Šajā stratēģijā mēs atrodam vai konstruējam konkrētu elementu x, ar kuru $P(x)$ ir patiess.

3.3. piemērs. Pierādīt apgalvojumu: "Eksistē pirmskaitlis, kas ir mazāks nekā 20 un lielāks nekā 10".

3.3. piemēra atbilde.

Lai pierādītu šo apgalvojumu, pietiek uzrādīt skaitli 13.

3.3. Nekonstruktīvais tiešais pierādījums

Šo pierādījumu veidu arī izmanto tādu apgalvojumu pierādīšanā, kas satur eksistences kvantorus, bet atšķirībā no konstruktīvā veida, šajā gadījumā pierāda apgalvojumus, neuzrādot konkrētus kopu elementus.

3.4. piemērs. Pierādīt apgalvojumu: "Katram naturālam skaitlim n var atrast tādu pirmskaitli p, ka $p > n$.

3.4. piemēra atbilde.

Šo apgalvojumu var pierādīt, izmantojot pirmskaitļu kopas bezgalību: eksistē bezgalīgi daudz pozitīvu pirmskaitļu, tātad vismaz viens no tiem ir lielāks nekā skaitlis n.

3.4. Pierādījums apskatot speciālgadījumus

Šo stratēğiju izmanto, pierādot apgalvojumus, kurus var pierakstīt formā

$$p \rightarrow q,\ \text{kur}\ p = p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee \cdots p_n. \tag{1}$$

Apgalvojums (1) ir pierādīts, ja pierāda, ka katram indeksam $i = 1 ... n$ izpildās implikācija $p_i \rightarrow q$.

3.5. piemērs. Pierādīt apgalvojumu: "Ja n ir nepāra skaitlis ($n > 2$), tad $n^2 - 1$ dalās ar 8".

3.5. piemēra atbilde.

Ja n ir nepāra skaitlis, tad izteiksim šo skaitli formā $n = 4k + 1$ vai $n = 4k + 3$ (parasti nepāra skaitli izsaka formā $n = 2k + 1$).

Tatad ir jāpierāda, ka katrā no abiem gadījumiem izpildās prasība, ka $n^2 - 1$ dalās ar 8.

Ja **n=4k+1**, tad

$$n^2 - 1 = (4k + 1)^2 - 1 = 16k^2 + 8k = 8(2k^2 + k),$$

tātad $n^2 - 1$ dalās ar 8.

Ja **n=4k+3**, tad

$$n^2 - 1 = (4k + 3)^2 - 1 = 16k^2 + 24k + 8 = 8(2k^2 + 3k + 1),$$

tātad arī šajā gadījumā $n^2 - 1$ dalās ar 8.

3.5. Netiešais pierādījums jeb pierādījums izmantojot kotrapozīciju

$$\frac{p \to q}{\overline{q} \to \overline{p}}.$$

Lai pierādītu apgalvojumu $p \to q$, var izmantot kontrapozīcijas secināšanas likumu: pieņemam, ka $\overline{q}$ ir patiess, un pierādām, ka $\overline{p}$ ir patiess.

3.6. piemērs. Pierādīt apgalvojumu: "Ja n^2 ir pāra skaitlis, tad n ir pāra skaitlis".

3.6. piemēra atbilde.

Pieņemsim, ka n ir nepāra skaitlis, t.i., $n = 2k+1$. Tādā gadījumā

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Ir pierādīts, ka, ja n ir nepāra skaitlis, tad arī n^2 ir nepāra skaitlis, līdz ar to sākotnējais apgalvojums ir pierādīts.

3.6. Pierādījumi ar pretrunas palīdzību

Šajā stratēģijā pieņem, ka pierādāmā apgalvojuma noliegums ir patiess un no šī pieņēmuma secina *identiski nepatiesu izteikumu* (pretrunu).

$$\mathbf{p} \to \mathbf{c}.$$

Šajā stratēģijā pieņem, ka pierādāmā apgalvojuma noliegums ir patiess, un pierāda, ka no tā seko pretruna, citiem vārdiem sakot, pierāda, ka secinājums

$$\overline{p \to q} \to c, \tag{2}$$

kur c ir pretruna, ir nosacījuma apgalvojums.

3.7. piemērs. Pierādīt, ka $\sqrt{2}$ ir iracionāls skaitlis.

3.7. piemēra atbilde.

Pieņemsim, ka $\sqrt{2}$ ir racionāls skaitlis $\frac{m}{n}$, kur $\frac{m}{n}$ ir daļa, m un n ir naturāli skaitļi, savstarpēji pirmskaitļi.

Tātad $m = n\sqrt{2}$ un $m^2 = 2n^2$.

Tātad m^2 ir pāra skaitlis.

Tātad arī m ir pāra skaitlis, skat. 3.6. piemēru.

Tādējādi m var izteikt kā $m = 2c$, kur c ir naturāls skaitlis.

Tātad $m^2 = 4c^2$ un $4c^2 = 2n^2$.

Līdz ar $n^2 = 2c^2$, no kurienes seko, ka n^2 ir pāra skaitlis.

Tātad arī n ir pāra skaitlis, skat. 3.6. piemēru.

Ja gan m ir pāra skaitlis, gan n ir pāra skaitlis, tad daļu $\frac{m}{n}$ vēl var saīsināt, izdalot skaitītāju un saucēju ar 2, kas kopā ar pieņēmumu attiecībā uz $\frac{m}{n}$ ir pretruna.

Tātad $\sqrt{2}$ nav racionāls skaitlis.

Lai pierādītu izteikumu

$$(\text{eksistē } \mathbf{x} \in \mathbf{A})\mathbf{P}(\mathbf{x}),$$

pieņem, ka visiem x izteikums $P(x)$ ir nepatiess un parāda, ka tas noved pie pretrunas.

Lai pierādītu izteikumu

$$(\text{visiem } \mathbf{x} \in \mathbf{A})\mathbf{P}(\mathbf{x}),$$

pieņem, ka eksistē x, kuram izteikums $P(x)$ ir nepatiess un parāda, ka tas noved pie pretrunas.

3.8. piemērs. $n+1$ balodis tiek likts n būros. Pierādīt, ka eksistē būris, kurā ir vismaz 2 baloži.

3.8. piemēra atbilde. Ja katrā būrī būtu 0 vai 1 balodis, tad kopā būtu ne vairāk kā n baloži, kas ir pretruna.

4. Loğiskie uzdevumi

Uzdevums.

Trīs meitenes: Anna (A), Baiba (B) un Klaudija (K) gāja uz teātri. Viena no viņām bija sarkanā kleitā, otra - baltā, trešā - zilā kleitā. Uz jautājumu, kura bija kādā kleitā, viņas deva atbildi:

Anna bija sarkanā kleitā.
Baiba nebija sarkanā kleitā.
Klaudija nebija zilā kleitā.

Šajā atbildē viens no apgalvojumiem ir patiess, divi - aplami. Noteikt, kādā kleitā bija katra meitene.

Apzīmēsim:
A_s - *"Anna bija sarkanā kleitā"*,
$\overline{B_s}$ - *"Baiba nebija sarkanā kleitā"*,
$\overline{K_z}$ - *"Klaudija nebija zilā kleitā"*.

Tā kā dots, ka patiess var būt tikai viens apgalvojums, tad pavisam ir iespējami trīs gadījumi:

1. Ja patiess 1. apgalvojums, ka Anna bija sarkanā kleitā (A_s), tad ir aplami apgalvojumi, ka Baiba nebija sarkanā kleitā ($\overline{B_s}$) un Klaudija nebija zilā kleitā ($\overline{K_z}$).

$$A_s \wedge B_s \wedge K_z. \tag{3}$$

2. Ja patiess 2. apgalvojums, ka Baiba nebija sarkanā kleitā ($\overline{B_s}$), tad aplami ir pārējie divi apgalvojumi: Anna bija sarkanā kleitā (A_s) un Klaudija nebija zilā kleitā ($\overline{K_z}$).

$$\overline{A_s} \wedge \overline{B_s} \wedge K_z. \tag{4}$$

3. Ja patiess 3. apgalvojums, ka Klaudija nebija zilā kleitā ($\overline{K_z}$), tad ir aplami pirmie divi izteikumi: Anna bija sarkanā kleitā (A_s) un Baiba nebija sarkanā kleitā ($\overline{B_s}$).

$$\overline{A_s} \wedge B_s \wedge \overline{K_z}. \tag{5}$$

Kurš tieši no trim pieņēmumiem (3) , (4) , (5) ir patiess nav zināms, bet vismaz viens no tiem ir patiess. Tāpēc iegūstam vienādojumu

$$(A_s \wedge B_s \wedge K_z) \vee (\overline{A_s} \wedge \overline{B_s} \wedge K_z) \vee (\overline{A_s} \wedge B_s \wedge \overline{K_z}) \sim p.$$

$(A_s \wedge B_s \wedge K_z) \sim a$, jo ....
$(\bar{A}_s \wedge \bar{B}_s \wedge K_z) \sim a$, jo ....
Paliek tikai pēdējais pieņēmums, ka
$(\bar{A}_s \wedge B_s \wedge \bar{K}_z) \sim p$, tas ir iespējams, ja ....

$$({\color{blue}A_z} \wedge {\color{red}B_s} \wedge K_b) \sim p$$

Atbilde: Anna bija zilā, Baiba- sarkanā, Klaudija - baltā kleitā.

Paldies par uzmanību!