DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Jauno matemātiķu skola

Grafiskās metodes matemātikā:

ekstrēmu uzdevumu grafiskā risināšana

Docētāja: Dr.math. I. Jermačenko

2008. g. 25. oktobris

Saturs

1. Ekstrēmu uzdevumu grafiskās risināšanas būtība

Ekstrēmu uzdevumi - tekstveida uzdevumi, kuros ir jāatrod kādas funkcijas vislielākā vai vismazākā vērtība.

Ekstrēmu uzdevumus var risināt ar metodēm, kuras prasa tādu pieeju pielietojumu, kuras attīsta matemātiskās iemaņas un māca racionāli izmantot matemātisko aparātu. Dotā tipa uzdevumus var risināt ar dažādām metodēm:

- izmantojot nevienādības;
- izmantojot teorēmas par vidējiem lielumiem;
- pārveidojot pētāmo funkciju uz speciālā veida funkciju;
- izmantojot pētāmās funkcijas atvasinājumus;
- maksimizējot vai minimizējot funkciju;
- pielietojot grafisko metodi.

Pieņemsim, ka ir nepieciešams izpētīt funkciju $\boxed{f(x,\, y)}$ uz ekstrēmiem pie nosacījuma $\boxed{g(x,\, y) = 0}$ (– ***saites vienādojums***).

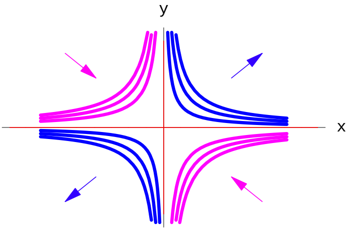
Definīcija. Koordinātu plaknes punktu kopu $(x,\, y)$, kuros funkcija $f(x,\, y)$ iegūst vienādas vērtības, sauc par šīs funkcijas ***līmeņlīniju***.

Funkcijas $f(x,\, y)$ līmeņlīnija tiek definēta ar vienādojumu $\boxed{f(x,\, y) = c}$, kur $c = \text{const}$. Saskaņā ar to, apskatot dažādas c vērtības, iegūsim dažādus funkcijas $f(x,\, y)$ līmeņīniju vienādojumus un koordinātu plaknē iegūsim dažādas atbilstošas šīs funkcijas līmeņlīniju saimes līknes. Ja funkcija $f(x,\, y)$ katrā punktā no definīcijas apgabala pieņem vienīgu vērtību, tad acīmredzami, ka caur katru plaknes punktu M_0 iet tikai viena līmeņlīniju saimes līkne $f(x,\, y) = c_0$. Citiem vārdiem sakot, jebkurām vērtībām $c_0 \neq c_1$ līknes $f(x,\, y) = c_0$ un $f(x,\, y) = c_1$ nekrustojas. Tātad, nepārtraukti izmainot parametru c, līknes $f(x,\, y) = c$ nosegs kādu plaknes daļu. Vienosimies turpmāk funkcijas $f(x,\, y)$ vērtību pieaugšanas virzienu plaknē attēlot ar simbolu " $\longrightarrow$ ".

Piemērs. Konstruēt funkcijas $f(x, y) = x\,y$ līmeņlīnijas.

Apskatīsim vienādojumu $x\,y = c$.

1. Ja $c = 0$, tad $x = 0$ vai $y = 0$. Tātad koordinātu asis ir dotās funkcijas līmeņlīnijas, uz tām funkcija vienāda ar 0.
2. Ja $c \neq 0$, tad atbilstoši arī $x \neq 0$ (un $y \neq 0$), un mēs iegūstam hiperbolu $y = \dfrac{c}{x}$ saimi.



1. zīm. Funkcijas $f(x, y) = x\,y$ līmeņlīnijas.
$c = 0$, $c > 0$, $c < 0$.

Ja ir nepieciešams izpētīt funkciju $f(x, y)$ uz ekstrēmiem pie nosacījuma $g(x, y) = 0$, tad tas nozīmē, ka funkcijas $f(x, y)$ vērtības tiek apskatītas tikai tajos punktos, kuri atrodas uz līknes $g(x, y) = 0$.

Pieņemsim, ka funkcija $f(x, y)$ pie nosacījuma $g(x, y) = 0$ punktā $(x_0; y_0)$ sasniedz vislielāko vai vismazāko vērtību.

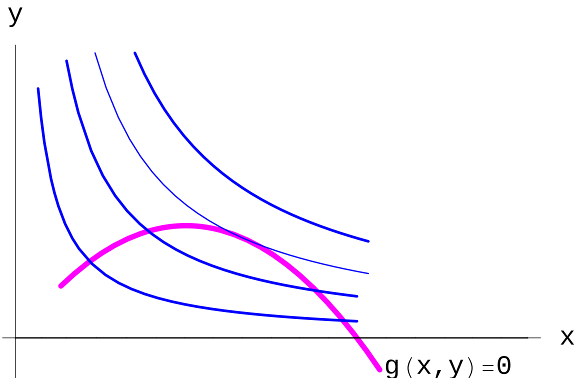
Grafiski tas nozīmē:

- pirmkārt, ka punkts $A(x_0; y_0)$ atrodas uz līknes $g(x, y) = 0$;
- otrkārt, caur punktu $A(x_0; y_0)$ iet līmeņlīnija $f(x, y) = m$;
- treškārt, visas pārējās funkcijas $f(x, y)$ līmeņlīnijas atrodas vai nu virs vai nu zem līknes $f(x, y) = m$.

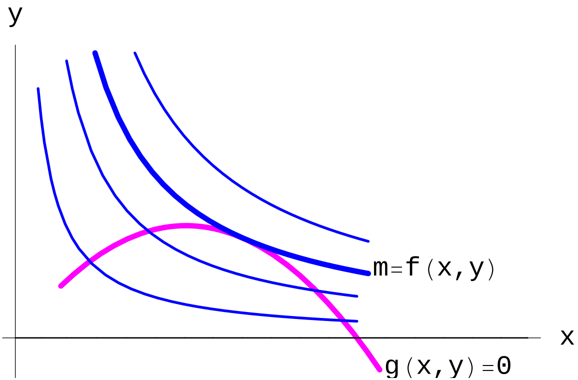
Tādā veidā punkts $A(x_0; y_0)$ ir kopējs līknēm $f(x, y) = m$ un $g(x, y) = 0$. Tai pat laikā uz vienu pusi no līknes $f(x, y) = m$ funkcijas vērtības ir lielākas nekā m, uz otro - mazākas par m. Tādējādi, visa līkne $g(x, y) = 0$ atrodas vienā pusē no līknes $f(x, y) = m$. Citiem vārdiem sakot, līkne $g(x, y) = 0$ pieskaras līknei $f(x, y) = m$ punktā A.

Lai grafiski noteiktu funkcijas $f(x,\, y)$ ekstrēmus pie nosacījuma $g(x,\, y) = 0$, ir jārīkojās šādi.

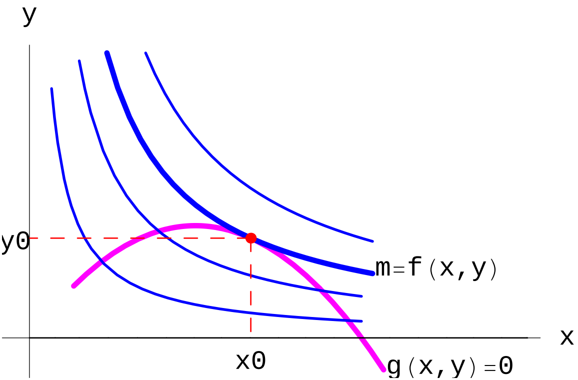
1. Koordinātu plaknē xOy konstruēt saites vienādojuma $g(x,\, y) = 0$ grafiku.
2. Tajā pašā koordinātu sistēmā konstruēt funkcijas $f(x,\, y)$ līmeņlīniju saimi (t.i., konstruēt līnijas $f(x,\, y) = c$, kur c- konstante.)
3. Atzīmēt tās līmeņlīnijas, kuras pieskaras saites vienādojuma $g(x,\, y) = 0$ grafikam.
4. Noteikt pieskaršanās punktu koordinātas.
5. Noteikt ekstrēma veidu.



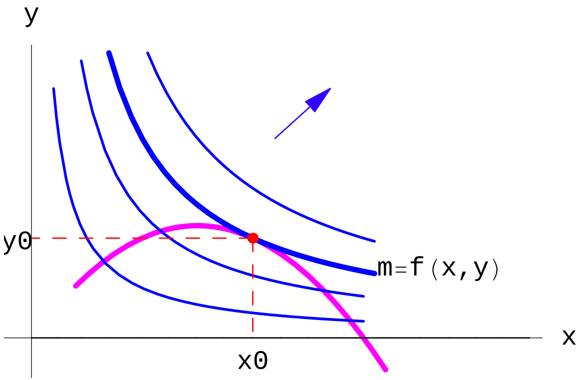
2. zīm. Saites vienādojuma $g(x,\, y) = 0$ grafiks
un dotās funkcijas $f(x,\, y)$ līmeņlīnijas.



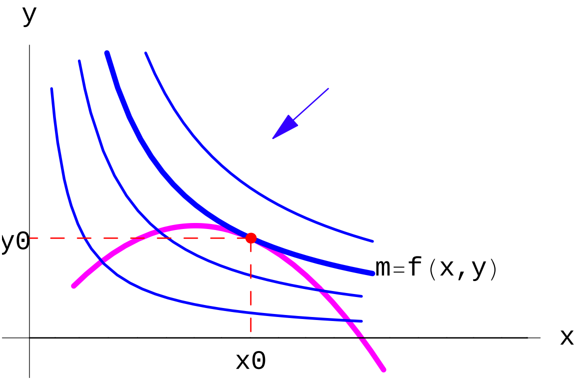
3. zīm. Līmeņlīnija $f(x, y) = m$ pieskaras saites vienādojuma $g(x, y) = 0$ grafikam.



4. zīm. Pieskaršanās punkta koordinātu noteikšana.



5. zīm. $A(x_0; y_0)$ ir funkcijas $f(x, y)$ nosacītā maksimuma punkts.



6. zīm. $A(x_0; y_0)$ ir funkcijas $f(x, y)$ nosacītā minimuma punkts.

2. Raksturīgākie ekstrēmu uzdevumi un to grafiskā risināšana

1. uzdevums. Noteikt funkcijas $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ekstrēmus, ja x un y saista vienādojums $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$, kur $a > 0$ un $b > 0$.

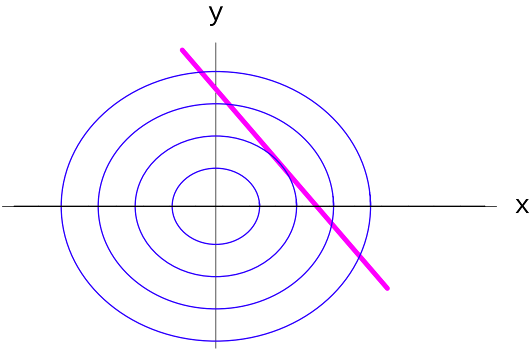
Atrisinājums.

Saites vienādojuma $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ grafiks ir taisne, kas atšķeļ no koordinātu asīm nogriežņus, kuru garumi ir attiecīgi vienādi ar a un b.

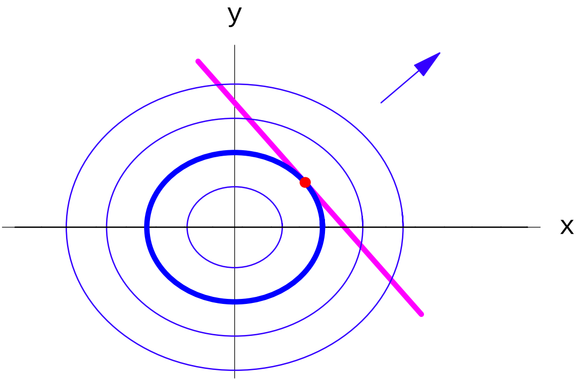
Lai noteiktu funkcijas $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ līmeņlīnijas, sastādīsim vienādojumus $\sqrt{x^2 + y^2} = c$, kur c - konstante.

Ja $c = 0$, tad iegūstam punktu $(0; 0)$.

Ja $c > 0$, tad iegūstam vienādojumu $x^2 + y^2 = c^2$. Tātad dotās funkcijas $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ līmeņlīniju saimi veido koncentriskas riņķa līnijas ar centru koordinātu sākumpunktā un rādiusu c.

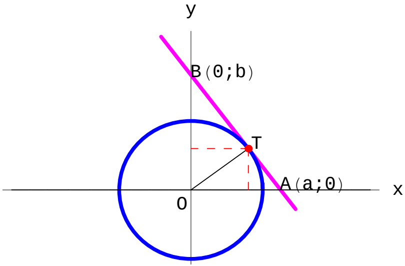


7. zīm. Saites vienādojuma $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ grafiks, funkcijas $f(x,\, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ līmeņlīnijas.



8. zīm. Pieskaršanās punktā $T(x_0; y_0)$ funkcija $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ sasniedz vismazāko vērtību, ja $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

Dotās funkcijas nosacītais minimums ir vienāds ar atbilstošās riņķa līnijas rādiusu, t.i., $f_{\min}(x,\, y) = OT$.



$\triangle\ AOB: \quad OA = a, \quad OB = b$

$OT \perp AB, \quad \triangle\ AOT \sim \triangle\ ABO$

$$\frac{OT}{OB} = \frac{OA}{AB} \Rightarrow OT = \frac{OA \cdot OB}{AB}$$

$$\boxed{OT = \frac{a\,b}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

$$\triangle\ BOT: \quad \cos\angle BOT = \frac{OT}{b}$$

$$x_0 = \sin\angle BOT \cdot OT$$

$$\boxed{x_0 = \frac{ab^2}{a^2 + b^2}}$$

$$\triangle\ AOT: \quad \cos\angle AOT = \frac{OT}{a}$$

$$y_0 = \sin\angle AOT \cdot OT$$

$$\boxed{y_0 = \frac{a^2 b}{a^2 + b^2}}$$

Atbilde.

Ja $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ (kur $a>0,\ b>0$),

tad funkcijai $f(x,\,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ eksistē nosacītais minimums

$$f_{\min}=f\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2};\ \frac{a^2b}{a^2+b^2}\right)=\frac{a\,b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Sekas.

Ja $a=b$, t.i., ja x un y saista vienādojums $x+y=a$, tad funkcijai $f(x,\,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ eksistē nosacītais minimums

$$f_{\min}=f\left(\frac{a}{2};\ \frac{a}{2}\right)=\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

1. piemērs. Skaitli 16 sadalīt divos saskaitāmajos tā, lai to kvadrātu summa būtu vismazākā.

Apzīmēsim meklējamos saskaitāmos ar x un y. Tātad mums ir jānosaka funkcijas $s(x, y) = x^2 + y^2$ minimums, ja $x + y = 16$. Ņemot vērā 1. uzdevuma rezultātu

$$f_{\min} = f\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right) = \frac{a}{\sqrt{2}},$$

iegūstam, ka saskaitāmo kvadrātu summa būt vismazākā, ja abi saskaitāmie būs vienādi savā starpā.

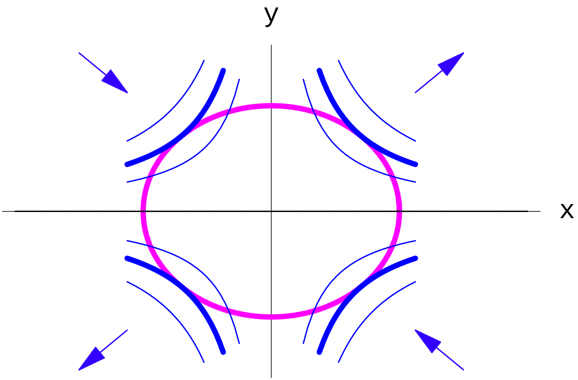
$$s_{\min} = s(8; 8) = 128.$$

2. uzdevums. Noteikt funkcijas $f(x, y) = x\,y$ ekstrēmus,
ja x un y saista vienādojums $x^2 + y^2 = a^2$ $(a > 0)$.

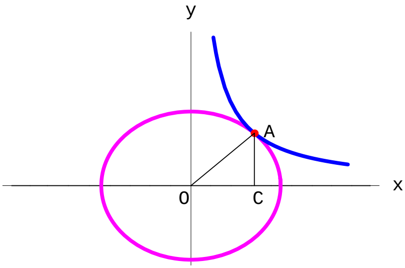
Atrisinājums.

Saites vienādojuma $x^2 + y^2 = a^2$ grafiks ir riņķa līnija ar centru koordinātu sākumpunktā un rādiusu a.

Funkcijas $f(x, y) = x\,y$ līmeņlīniju saimi veido koordinātu asis un saistītas hiperbolas, kuru asimptotas ir koordinātu asis.(1.)



9. zīm. Saites vienādojuma $x^2 + y^2 = a^2$ grafiks
un funkcijas $f(x,\, y) = x\,y$ līmeņlīnijas.



Pieskaršanās punkts A atrodas uz 1. kvadranta bisektrises.

$\triangle\, AOC$ – taisnleņka trijstūris

$OA = a \qquad \Rightarrow$

$$x_A = y_A = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Tātad funkcijas f(x,y)=x y nosacītais maksimums ir

$$f_{\max} = f\left(\frac{a}{\sqrt{2}};\ \frac{a}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= f\left(-\frac{a}{\sqrt{2}};\ -\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = \frac{a^2}{2};$$

nosacītais minimums ir

$$f_{\min} = f\left(\frac{a}{\sqrt{2}};\ -\frac{a}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= f\left(-\frac{a}{\sqrt{2}};\ \frac{a}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{a^2}{2}.$$

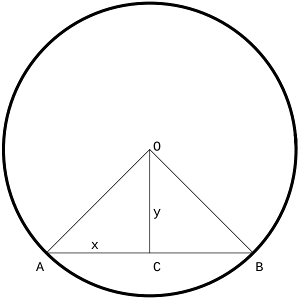
Atbilde.

Ja $x^2 + y^2 = a^2$, tad funkcijai $f(x, y) = x\,y$ eksistē nosacītais maksimums un nosacītais minimums:

$$f_{\max} = f\left(\frac{a}{\sqrt{2}};\ \frac{a}{\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{a}{\sqrt{2}};\ -\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = \frac{a^2}{2};$$

$$f_{\min} = f\left(\frac{a}{\sqrt{2}};\ -\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{a}{\sqrt{2}};\ \frac{a}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{a^2}{2}.$$

2. piemērs. Riņķā līnijā ar rādiusu R ievilkt vienādsānu trijstūri ar vislielāko laukumu, tā, lai trijstūra virsotne atrastos riņķa līnijas centrā.



$OA = R$;
$\triangle\, OAB$ – vienādsānu trijstūris
$OC \perp AB$; $\quad AC = x$; $\quad OC = y$

$$S_{\triangle OAB} = \frac{2AC \cdot OC}{2} = x\,y.$$

Uzdevums tiek novests pie funkcijas $S = x\,y$ vislielākās vērtības atrašanas, ja mainīgos x un y saista vienādojums $x^2 + y^2 = R^2$ ($x > 0$, $y > 0$).

$$S_{\max} = S\left(\frac{R}{\sqrt{2}}; \frac{R}{\sqrt{2}}\right) = \frac{R^2}{2}.$$

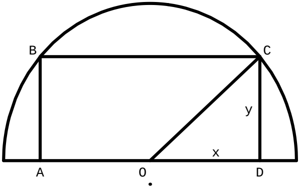
No atrisinājuma seko, ka trijstūra laukums būs vislielākais gadījumā, ja $x = y$.

Tā kā $x = y$, tad $\triangle OAC$ ir vienādsānu trijstūris.
Tātad $\angle AOC = 45^0$.
Tā kā $\angle AOC = \angle BOC$, tad $\angle AOB = 90^0$.

Atbilde.

Starp visiem vienādsānu trijstūriem, kuru viena virsotne atrodas dotās riņķa līnijas centrā, bet divas citas atrodas uz riņķa līnijas, vislielākais laukums būs trijstūrim, kura leņķis pie virsotnes ir taisns.

3. piemērs. Pusriņķī ievilkts taisnstūris ar vislielāko laukumu. Aprēķināt šī taisnstūra laukumu, ja riņķa rādiuss ir 2 cm.



$CD = y$
$AD = 2\,x$

Uzdevums tiek novests pie funkcijas $S = 2\,x\,y$ vislielākās vērtības atrašanas, ja mainīgos x un y saista vienādojums $x^2 + y^2 = 4$ $(x > 0,\ y > 0)$.

$$S_{\max} = S\left(\sqrt{2};\ \sqrt{2}\right) = 2 \cdot 2 = 4(\mathrm{cm}^2).$$

Atbilde.

No visiem taisnstūriem, kas ievilkti dotajā pusriņķī ar rādiusu 2 cm, vislielākais laukums 4 cm^2 būs tam taisnstūrim, kura divas virsotnes tiek iegūtas, novelkot rādiusus, kas veido ar pusriņķa diametru 45^0 leņķus (divas pārējās virsotnes iegūst, novelkot perpendikulus uz pusriņķa diametru).

3. Uzdevumu risināšana, izmantojot teorēmu par pieskaršanās punktu

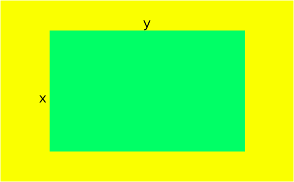
Teorēma. Ja līknes $f(x, y) = m$ un $g(x, y) = 0$, kur $f(x\,y)$ un $g(x, y)$ ir kādi mainīgo x un y polinomi, pieskaras viena otrai punktā $(x_0; y_0)$, tad $x = x_0$, $y = y_0$ ir vismaz divkāršs vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} g(x, y) = 0, \\ f(x, y) = m \end{cases}$$

atrisinājums.

Citiem vārdiem sakot, ja, piemēram, izslēgt no šīs sistēmas mainīgo y, tad iegūtajam vienādojumam attiecībā pret x būs divkārša sakne $x = x_0$.

4. piemērs. Taisnstūrveida puķu dobei ir jāaizņem laukums 216 m^2. Gar dobes garumu celiņa platumam jābūt 2 m, bet gar tās platumu - 3 m. Kādiem jābūt dobes izmēriem, lai celiņu laukums būtu vismazākais?



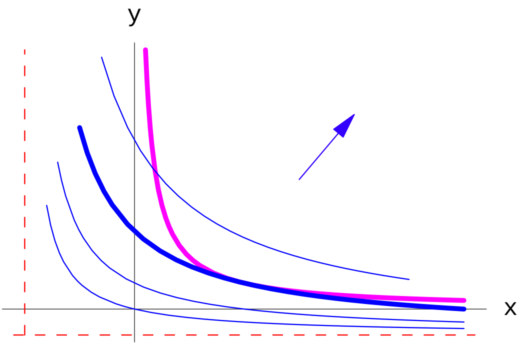
$S_{dob.} = xy = 216;$
$S_{cel.} = (x+4)(y+6) - 216$

Uzdevums tiek novests pie funkcijas

$$f(x, y) = (x+4)(y+6) - 216$$

vismazākās vērtības atrašanas, ja mainīgos x un y saista vienādojums

$$x\,y = 216 \ (x > 0,\ y > 0).$$



10. zīm.

Funkcijas $f(x, y) = (x+4)(y+6) - 216$ līmeņlīniju saimi veido hiperbolas, kuru asimptotas ir $x = -4$, $y = -6$.

Saites vienādojuma $x\,y = 216$ grafiks ir hiperbola, kuru asimptotas ir koordinātu asis.

Noteiksim pieskaršanās punkta koordinātas, aprēķināsim $f_{\min} = S_0$.

Tā kā līkne $x\,y = 216$ pieskaras līknei $(x+4)(y+6) - 216 = S_0$, tad vienādojumu sistēmai

$$\begin{cases} x\,y = 216, \\ xy + 4y + 6x - 192 = S_0 \end{cases}$$

ir divkāršs atrisinājums. Šī sistēma ir ekvivalenta šādai sistēmai

$$\begin{cases} x\,y = 216, \\ 4y + 6x + 24 = S_0. \end{cases}$$

Izslēdzot mainīgo y, iegūstam $\qquad 6x^2 + 24x - S_0x + 864 = 0.$
Izmantojot Vjeta formulas

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{S_0 - 24}{6}, \\ x_1x_2 = 144, \end{cases}$$

un pieņemot, ka $x_1 = x_2 = x_0$, iegūstam

$$\begin{cases} 2x_0 = \dfrac{S_0 - 24}{6}, \\ x_0^2 = 144. \end{cases}$$

Iegūstam $x_0 = 12$ (m).
Ievietojot iegūto x_0 vērtību pirmajā vienādojumā, iegūstam, ka $f_{\min} = S_0 = 168$ (m^2). No saites vienādojuma aprēķinām $y_0 = 18$(m).

Atbilde.

Puķu dobes izmēriem jābūt 12×18 m^2, tad celiņu laukums būs vismazākais, t.i., 168 m^2.