DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE

JAUNO MATEMĀTIĶU SKOLA

Grafiskās metodes matemātikā:

uzdevumu ar parametru grafiskā risināšana

Docētāja: Dr.math. I. Jermačenko

2008. g. 18. oktobris

Saturs

1. Uzdevumu ar parametru klasifikācija

Uzdevumi ar parametru

↙ ↘

Uzdevumi, kuri ir jāatrisinā atkarībā no parametra vērtībām

Uzdevumi, kuros ir jāatrod parametra vērtības, kurām izpildās noteiktais nosacījums

↙ ↓ ↘

1. 2. 3.

1. Uzdevumi ar nosacījumu par atrisinājumu skaitu.

2. Uzdevumi ar nosacījumu par atrisinājuma novērtējumu.

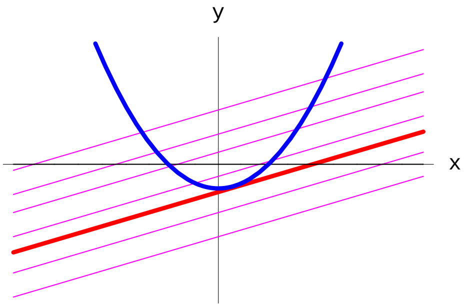
3. Uzdevumi ar nosacījumu par atrisinājuma piederību noteiktai kopai.

2. Uzdevumu ar parametru grafiskā risināšana plaknē xOy

Lai atrisinātu grafiski vienādojumu ar parametru, ir jārīkojās šādi.

1. Vienādojumu pārveido veidā $\boxed{f(x) = g(x,\, a)}$, pie tam parametru a atstāj tajā vienādojuma pusē, kuras grafiku konstruēt vienkāršāk (piemēram, $y = g(x,\, a)$ - taišņu saime, bet $y = f(x)$ - parabola).
2. Konstruē funkcijas $y = f(x)$ grafiku.
3. Konstruē funkciju $y = g(x,\, a)$ grafiku saimi atsevišķām parametra a vērtībām.
4. Sadala plakni xOy atsevišķos apgabalos atkarībā no tā, kāds ir katras tādas līnijas $y = g(x,\, a)$ ar funkcijas $y = f(x)$ grafiku krustpunktu skaits.
5. Veic analīzi, apkopojot tās parametra a vērtības, kurām atrisinājumu skaits (vai novērtējums) ir vienāds.

$$x^2 - 2x - 1 + a = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x^2 - 1 = 2x - a}$$



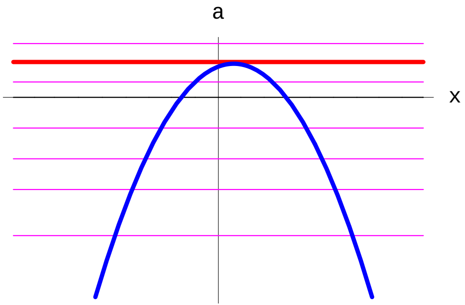
1. zīm.

3. Uzdevumu ar parametru grafiskā risināšana plaknē xOa

Lai atrisinātu grafiski vienādojumu ar parametru plaknē xOa, ir jārīkojās šādi.

1. Vienādojumu pārveido veidā $\boxed{a = f(x)}$.
2. Koordinātu plaknē konstruē funkcijas $a = f(x)$ grafiku (kur x - funkcijas arguments, parametru a uzskata par funkcijas vērtību).
3. Sadala plakni xOa ar taisnēm $a = c$ (kur $c \in \mathbb{R}$) atsevišķos apgabalos atkarībā no tā, cik punktos tās krusto funkcijas $a = f(x)$ grafiku; atzīmē robežtaisnes, zem un virs kurām krustpunktu skaits ir dažāds; paņem jebkuru taisni $a = c$ no katra apgabala un nosaka tai krustpunktu skaitu ar funkcijas $a = f(x)$ grafiku.
4. Veic analīzi, apkopojot tās parametra a vērtības, kurām atrisinājumu skaits ir vienāds.

$$x^2 - 2x - 1 + a = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = 1 + 2x - x^2}$$



2. zīm.

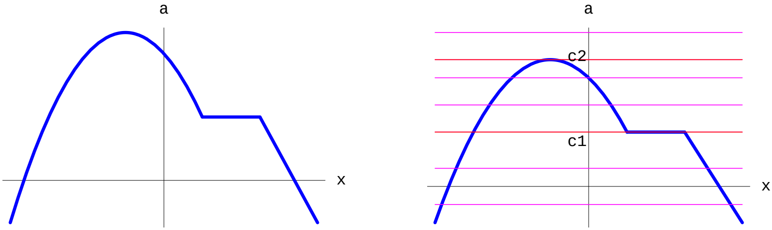
Risinot grafiski vienādojumu $\boxed{a = f(x)}$, varētu būt 4 gadījumi.

a) Taisne $a = c$ nekrusto funkcijas $a = f(x)$ grafiku. Tas nozīmē, ka ar šādu parametra vērtību vienādojumam nav atrisinājumu.

b) Taisne $a = c$ krusto funkcijas $a = f(x)$ grafiku galīga skaita punktos, tad vienādojumam ir viens vai vairāk atrisinājumu, kurus var atrast vai nu no zīmējuma, aprēķinot krustpunktu abscisas, vai nu analitiski.

c) Taisne $a = c$ pieskaras funkcijas $a = f(x)$ grafikam, tad vienādojumam ir divkārša sakne, kuru var atrast kā pieskaršanas punkta abscisu.

c) Taisnes $a = c$ daļa saplūst ar funkcijas $a = f(x)$ grafika daļu, tad atbilstošai parametra a vērtībai vienādojumam $a = f(x)$ ir bezgalīgi daudz atrisinājumu (tie veido intervālus, kurus iegūst funkcijas $a = f(x)$ grafika daļu, kas saplūst ar taisni $a = c$, projecējot uz Ox asi).



a) b)

3. zīm. a) Funkcijas $a = f(x)$ grafiks;
b) kritiskas parametra vērtības
$a = c_1$, $a = c_2$.

Vienādojumam $a = f(x)$ ir 2 atrisinājumi, ja $a \in (-\infty, c_1) \cup (c_1, c_2)$;
ir viens atrisinajums, ja $a = c_2$;
nav atrisinājumu, ja $a \in (c_2, +\infty)$;
ja $a = c_1$, tad vienadojumam ir atrisinajumi $x = x_0$, $x \in [x_1, x_2]$.

4. Uzdevumi

1. uzdevums. Kādām parametra a vērtībām vienādojumam

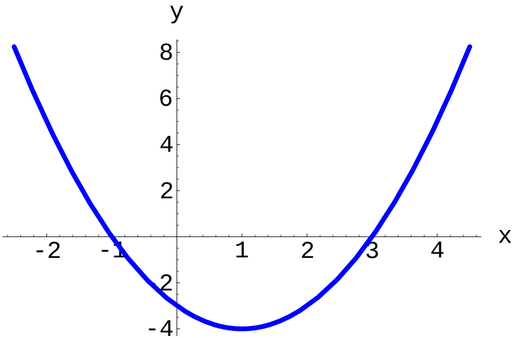
$$|x^2 - 2x - 3| = a$$

ir tieši 3 dažādas saknes?

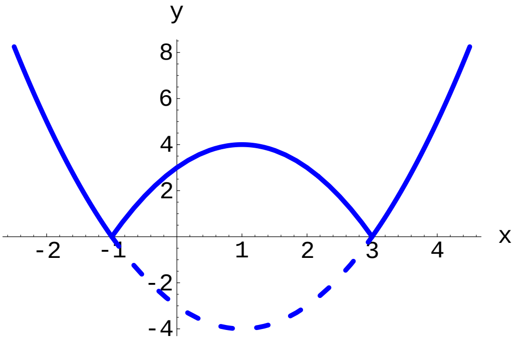
Risinājums. Doto uzdevumu var risināt gan plaknē xOy, gan arī plaknē xOa.

1. Konstruēsim funkcijas $y = x^2 - 2x - 3$ grafiku.

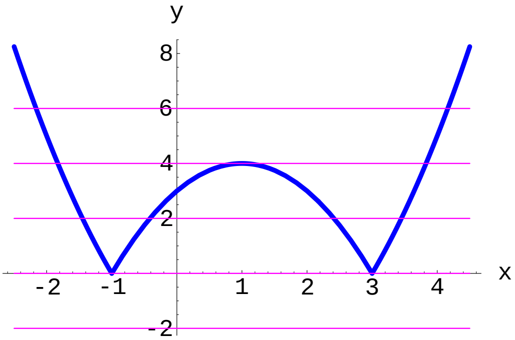
2. Konstruēsim funkcijas $y = |x^2 - 2x - 3|$ grafiku, pielietojot grafika daļējo simetriju attiecībā pret Ox asi.



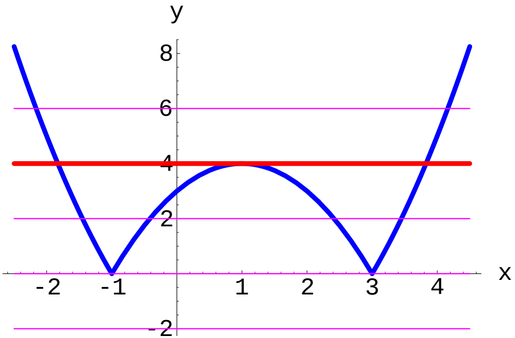
4. zīm. Funkcijas $y = x^2 - 2x - 3$ grafiks.



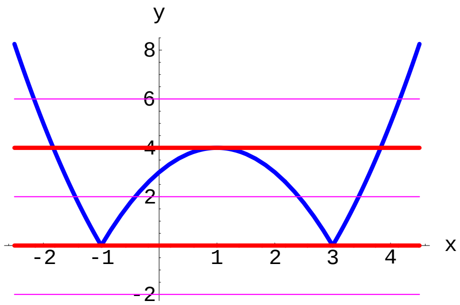
5. zīm. Funkcijas $y = |x^2 - 2x - 3|$ grafiks.



6. zīm. Funkcijas $y = |x^2 - 2x - 3|$ grafiks un taisnes $y = a$.



7. zīm. Vienādojumam $a = |x^2 - 2x - 3|$ ir 3 saknes, ja $a = 4$.



8. zīm. Vienādojuma $a = |x^2 - 2x - 3|$ sakņu skaits atkarībā no parametra vērtībām.

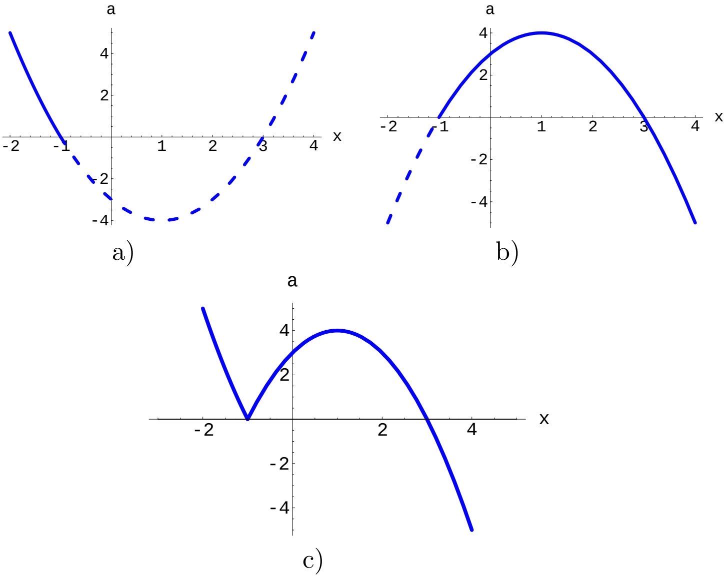
Ja $a \in (-\infty, 0)$, tad nav atrisinājumu.
Ja $a = 0$, tad ir 2 atrisinājumi $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.
Ja $a \in (0, 4)$, tad ir 4 atrisinājumi.
Ja $a = 4$, tad ir 3 atrisinājumi.
Ja $a \in (4, +\infty)$, tad ir 2 atrisinājumi.

2. uzdevums. Kādām parametra a vērtībām vienādojuma

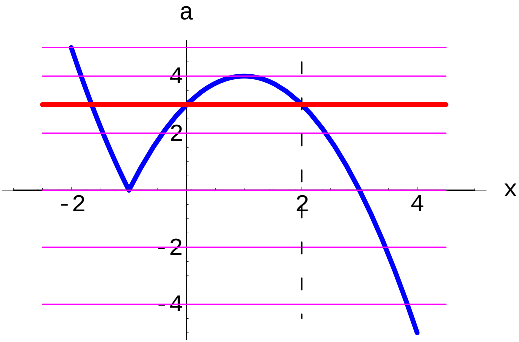
$$(3-x)\cdot|x+1|=a$$

visas saknes ir mazākas par 2?

$$a=\begin{cases} x^2-2x-3, & \text{ja} \quad x<-1; \\ -x^2+2x+3, & \text{ja} \quad x\geq -1. \end{cases}$$



9. zīm. Funkcijas $a = (3 - x) \cdot |x + 1|$ grafiks.



10. zīm. Visas vienādojuma $a = (3 - x) \cdot |x + 1|$ saknes ir mazākas par 2, ja $a \in (3, +\infty)$.

3. uzdevums. Atrisināt vienādojumu $\sqrt{2|x|-x^2}=a$.

$$y=\sqrt{2|x|-x^2};$$

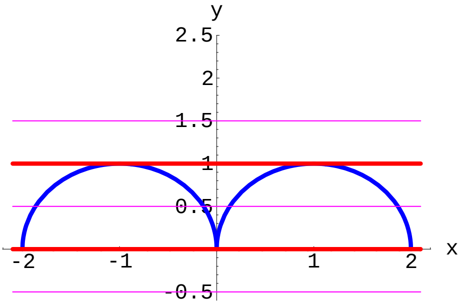
$$y^2=2|x|-x^2 \quad (y\geq 0);$$

$$\big(|x|-1\big)^2+y^2=1 \quad (y\geq 0);$$

$$(x-1)^2+y^2=1 \quad (y\geq 0,\ x\geq 0)$$

vai

$$(x+1)^2+y^2=1 \quad (y\geq 0,\ x\leq 0).$$



11. zīm. Vienādojuma $\sqrt{2|x|-x^2}=a$ atrisinājumi atkarībā no parametra a vērtībām.

Ja $a\in(-\infty,\,0)$, tad atrisinājumu nav;
ja $a=0$, tad $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm2$;
ja $a\in(0,\,1)$, tad $x_{1,2,3,4}=\pm1\pm\sqrt{1-a^2}$;
ja $a=1$, tad $x_{1,2}=\pm1$;
ja $a\in(1,\,+\infty)$, tad atrisinājumu nav.

4. uzdevums. Atrisināt nevienādību $\sqrt{1-x^2}+x>a$.

Pārveidosim nevienādību veidā $\sqrt{1-x^2}>a-x$.

Konstruēsim funkcijas $y=\sqrt{1-x^2}$ grafiku un taisnes $y=a-x$.

$y^2=1-x^2 \quad (y\geq 0) \quad$ jeb $\quad x^2+y^2=1 \quad (y\geq 0)$.

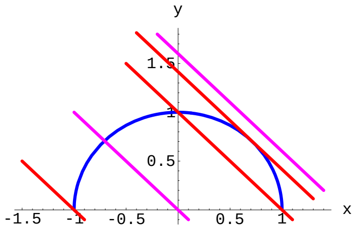
Grafiku krustpunktu abscisas var būt aprēķinātas:

$\sqrt{1-x^2}=a-x$,

$1-x^2=a^2-2ax+x^2$,

$2x^2-2ax+a^2-1=0$,

$$x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-2a^2+2}}{2}=\frac{a\pm\sqrt{2-a^2}}{2}.$$



12. zīm. $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = a - x$.

Ja $a \in (-\infty, -1)$, tad $x \in [-1, 1]$;

ja $a \in [-1, 1)$, tad $x \in \left(\dfrac{a - \sqrt{2 - a^2}}{2}, 1 \right]$;

ja $a = 1$, tad $x \in (0, 1)$;

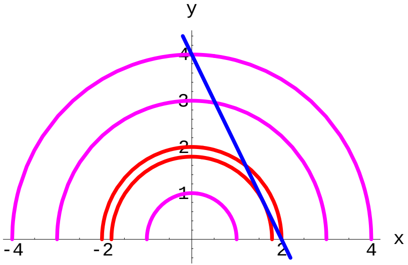
ja $a \in (1, \sqrt{2})$, tad $x \in \left(\dfrac{a - \sqrt{2 - a^2}}{2}, \dfrac{a + \sqrt{2 - a^2}}{2} \right)$;

ja $a \in [\sqrt{2}, +\infty)$, tad nevienādībai atrisinājumu nav.

5. uzdevums. Atrisināt nevienādību $\sqrt{a^2 - x^2} \geq -2x + 4$, $a \geq 0$.

Konstruēsim funkciju $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ grafikus un taisni $y = -2x+4$.

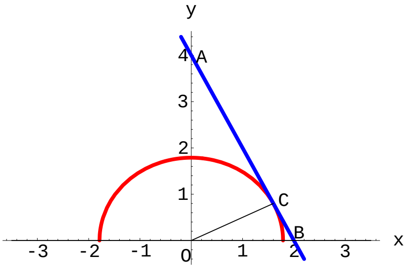
$x^2 + y^2 = a^2 \quad (y \geq 0)$.



13. zīm. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $y = -2x + 4$.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{OA \cdot OB}{2} = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4; \qquad S_{\triangle ABC} = \frac{OC \cdot AB}{2}$$

$$8 = OC \cdot \sqrt{16+4} \qquad \Rightarrow \qquad a = OC = \frac{4}{\sqrt{5}} = 0.8\sqrt{5}.$$



14. zīm.

$$\cos\angle COB = \frac{OC}{OB} = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \Rightarrow \qquad \sin\angle COB = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$y_C = OC \cdot \sin\angle COB = 0.8 \qquad \Rightarrow \qquad x_C = 1.6.$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = -2x + 4 \qquad \Rightarrow \qquad a^2 - x^2 = 4x^2 - 16x + 16$$

$$5x^2 - 16x + 16 - a^2 = 0,$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 80 + 5a^2}}{5} = \frac{8 \pm \sqrt{5a^2 - 16}}{5}$$

Ja $a \in (-\infty,\ 0.8\sqrt{5})$, tad atrisinājumu nav;

ja $a = 0.8\sqrt{5}$, tad $x = 1.6$;

ja $a \in (0.8\sqrt{5},\ 2)$, tad $x \in \left[\dfrac{8 - \sqrt{5a^2 - 16}}{5},\ \dfrac{8 + \sqrt{5a^2 - 16}}{5}\right]$;

ja $a \in [2,\ +\infty)$, tad $x \in \left[\dfrac{8 - \sqrt{5a^2 - 16}}{5},\ a\right]$.

6. uzdevums. Kādām parametra a vērtībām visi nevienādības

$$\sqrt{x+a} < a - \sqrt{x}$$

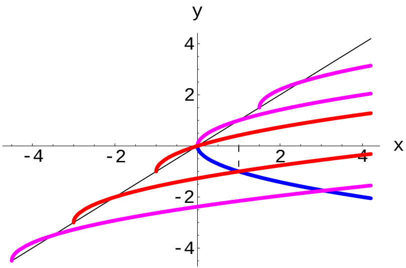
atrisinājumi ir mazāki par 1?

Pārrakstīsim doto nevienādību: $\sqrt{x+a} - a < -\sqrt{x}$.

Konstruēsim funkcijas $y = -\sqrt{x}$ grafiku un līknes $y = \sqrt{x+a} - a$.

$$y + a = \sqrt{x+a} \qquad \Rightarrow \qquad (y+a)^2 = x + a \quad (y \geq -a)$$

$$x = (y+a)^2 - a \quad (y \geq -a)$$



15. zīm. Kritiskas parametra vērtības.

Līkne $x = (y + a)^2 - a \ (y \geq -a)$ iet caur punktu $(0, 0)$, ja $a = 0$ vai $a = 1$.

Līkne $x = (y + a)^2 - a \quad (y \geq -a)$ iet caur punktu $(1, -1)$

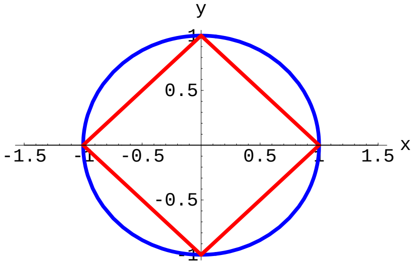
$$\Rightarrow \qquad 1 = (-1 + a)^2 - a \quad \Rightarrow \qquad a^2 - 3a = 0 \text{ jeb } a = 3.$$

Ja $a \in (1, 3]$, tad dotās nevienādības atrisinājums $x \in [0, x_a)$, kur $x_a < 1$.

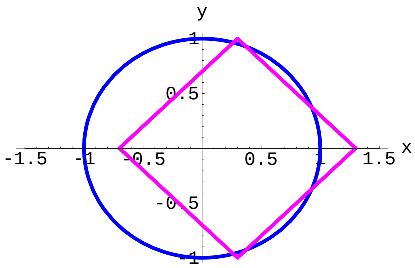
7. uzdevums. Noteikt sistēmas

$$\begin{cases} |x-a|+|y|=1, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

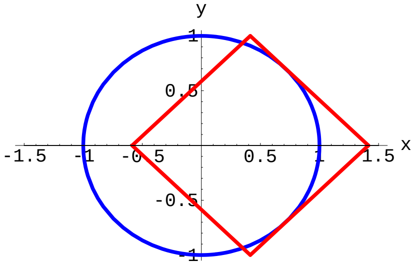
sakņu skaitu atkarībā no parametra a.



16. zīm. $a=0$; 4 atrisinājumi.



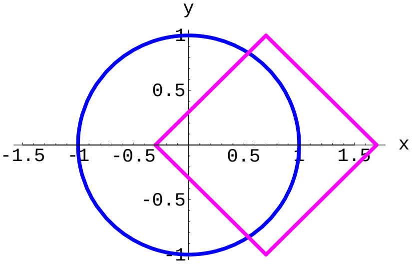
17. zīm. 6 atrisinājumi.



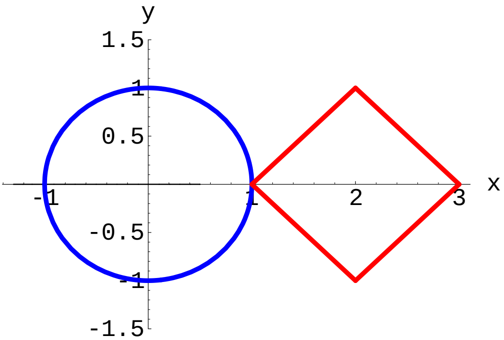
18. zīm. 4 atrisinājumi.

Ja $x \geq a$, $y \geq 0$, tad $x - a + y = 1$ jeb $y = -x + 1 + a$.

Ja taisne $y = -x + 1 + a$ pieskaras riņķa līnijai, tad $1 + a = \sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $a = \sqrt{2} - 1$.



19. zīm. 2 atrisinājumi.



20. zīm. $a = 2$; 1 atrisinājums.

Atbilde:

ja $a \in (-\infty,\ -2) \cup (2,\ +\infty)$, tad atrisinājumu nav;

ja $a = \pm 2$, tad sistēmai ir viens vienīgs atrisinājums;

ja $a \in (-2,\ -\sqrt{2}+1) \cup (\sqrt{2}-1,\ 2)$, tad sistēmai ir 2 atrisinājumi;

ja $a \in \{1-\sqrt{2};\ 0;\ \sqrt{2}-1\}$, tad sistēmai ir 4 atrisinājumi;

ja $a \in (-\sqrt{2}+1,\ 0) \cup (0,\ \sqrt{2}-1)$, tad sistēmai ir 6 atrisinājumi.

8. uzdevums. Paralelograma $ABCD$ virsotnes ir punkti $A(1,\ 0)$, $B(2,\ 2)$, $C(5,\ 3)$ un $D(4,\ 1)$. Kādām parametra a vērtībām kaut viens diagonāles AC punkts ir nevienādību sistēmas

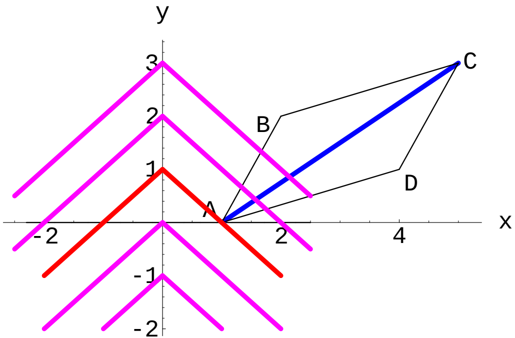
$$\begin{cases} x + y + a \leq 0, \\ x - y - a \geq 0 \end{cases}$$

atrisinājums?

Konstruēsim paralelogramu $ABCD$.

Pārrakstīsim doto sistēmu šādi:

$$\begin{cases} y \leq -x - a, \\ y \leq x - a. \end{cases}$$



21. zīm. Kritiska vērtība $a = -1$.

Ja $a \in (-\infty, -1]$, tad kaut viens diagonāles AC punkts ir dotās nevienādību sistēmas atrisinājums.