

DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
JAUNO MATEMĀTIĶU SKOLA

Grafiskās metodes matemātikā:
*vienādojumu un nevienādību
grafiskā risināšana*

Docētāja: Dr.math. I. Jermačenko

2008. g. 11. oktobris

Saturs

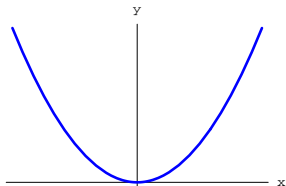
1. Funkciju un vienādojumu grafiki	3
1.1. Funkcijas grafiks un tā pārveidojumi	3
1.2. Vienādojumu grafiki	6
2. Vienādojumu grafiskā risināšana	15
2.1. Vienādojums $f(x) = 0$	15
2.2. Vienādojums $f(x) = g(x)$	17
2.3. Vienādojumu sistēmas ar diviem mainīgajiem	19
3. Nevienādību grafiskā risināšana	21
3.1. Nevienādība $f(x) > 0$	21
3.2. Nevienādība $f(x) > g(x)$	24
3.3. Nevienādība $f(x, y) > 0$	26
4. Uzdevumi	30

1. Funkciju un vienādojumu grafiki

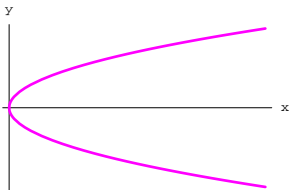
1.1. Funkcijas grafiks un tā pārveidojumi

Definīcija. Ja pēc noteikta likuma f katrai mainīgā x vērtībai no kādas konkrētas kopas X tiek piekārtota tieši viena noteikta mainīgā y vērtība no kopas Y , tad šo piekārtojuma likumu f sauc par funkciju un raksta $y = f(x)$.

Definīcija. Par funkcijas $y = f(x)$ grafiku sauc visu to punktu kopu koordinātu plaknē, kuru koordinātas ir $(x; f(x))$, un pie tam $x \in D(f)$.



1. zīm. Attēlota līkne ir kādas funkcijas $y = f(x)$ grafiks.



2. zīm. Attēlota līkne nav funkcijas $y = f(x)$ grafiks.

- Funkcijas grafika pārbīde $y = f(x + a)$
- Funkcijas grafika pārbīde $y = f(x) + b$
- Funkcijas grafika simetrija $y = -f(x)$
- Funkcijas grafika simetrija $y = f(-x)$
- Funkcijas grafika simetrija $y = -f(-x)$
- Funkcijas grafika daļēja simetrija $y = |f(x)|$
- Funkcijas grafika daļēja simetrija $y = f(|x|)$
- Funkcijas grafika deformācija $y = k f(x)$
- Funkcijas grafika deformācija $y = f(kx)$

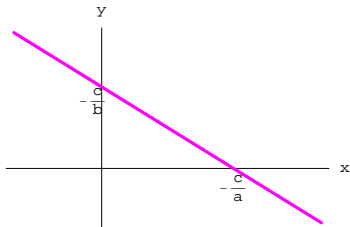
1.2. Vienādojumu grafiki

Definīcija. Par vienādojuma $f(x, y)=0$ grafiku sauc visu to punktu kopu koordinātu plaknē, kuru koordinātas $(x; y)$ ievietojot dotajā vienādojumā, iegūst patieso vienādību.

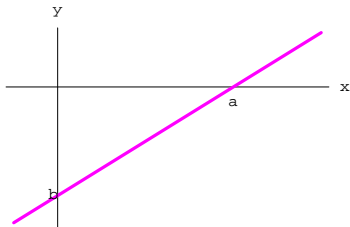
Vienādojumu grafiku piemēri:

- taisne ;
- parabola ;
- hiperbola ;
- riņķa līnija ;
- elipse.

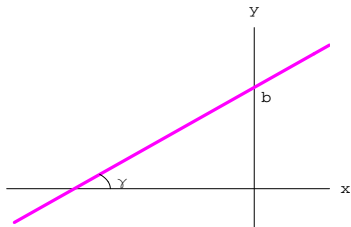
Taisne



$$ax + by + c = 0$$



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

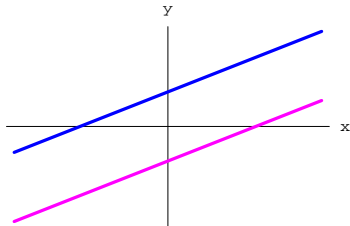


$$y = kx + b$$

3. zīm.

$$l_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$l_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

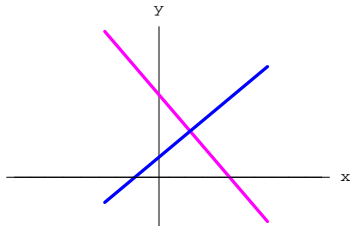


$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

$$k_1 = k_2$$

$$l_1 : y = k_1x + b_1$$

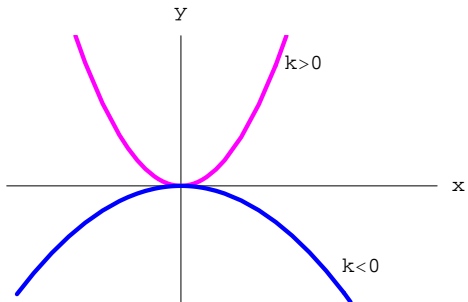
$$l_2 : y = k_2x + b_2$$



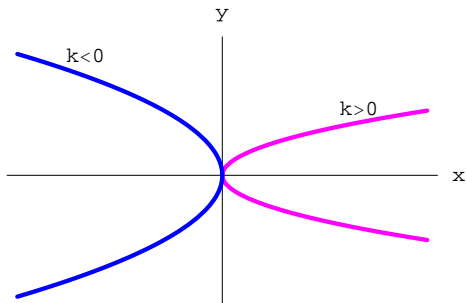
4. zīm.

$$a_1 \cdot a_2 = -b_1 \cdot b_2$$

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}$$

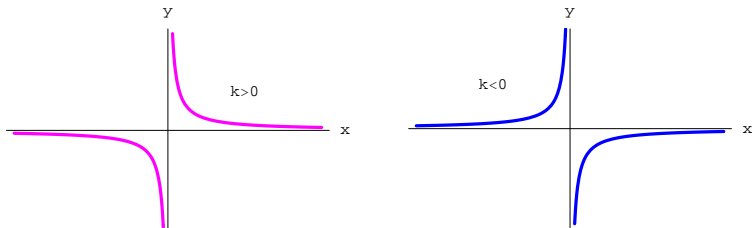
Parabola

5. zīm. $y = kx^2$

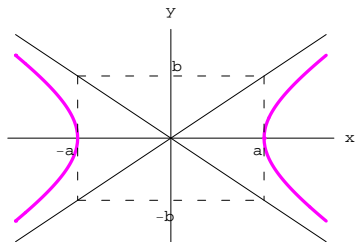


6. zīm. $x = ky^2$

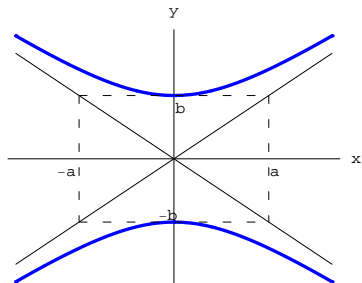
Hiperbola



7. zīm. $y = \frac{k}{x}$



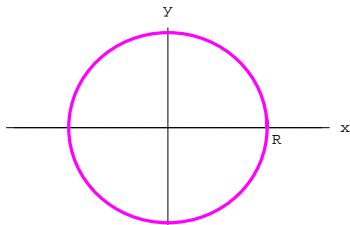
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



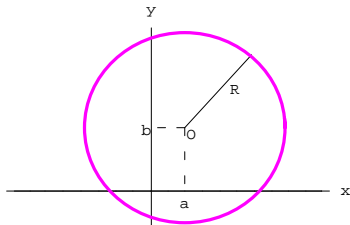
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

8. zīm.

Riņķa līnija



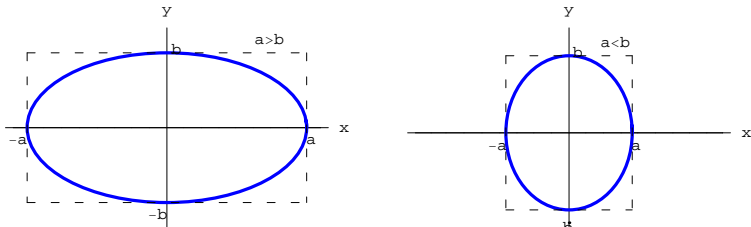
$$x^2 + y^2 = R^2$$



$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

9. zīm.

Elipse



10. zīm. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

2. Vienādojumu grafiskā risināšana

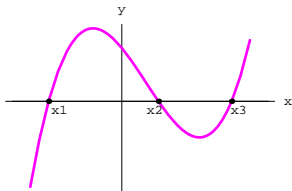
2.1. Vienādojums $f(x) = 0$

Lai grafiski noteiktu vienādojuma

$$\boxed{f(x) = 0}, \quad (1)$$

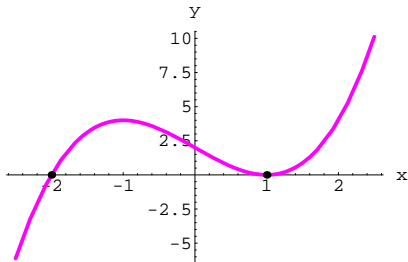
reālas saknes, ir jārikojās šādi:

1. jākonstruē funkcijas $y = f(x)$ grafiks;
2. jāatrod šīs līknes krustpunkti ar Ox asi.
3. Tad šo punktu abscisas ir vienādojuma (1) saknes.



11. zīm. $y = f(x)$. Vienādojumam $f(x) = 0$ ir saknes x_1 , x_2 , un x_3 .

Piemērs. Atrisināt grafiski vienādojumu $x^3 - 3x + 2 = 0$.



12. zīm. $y = x^3 - 3x + 2$.

Dotajam vienādojumam ir saknes $x_1 = -2$ un $x_2 = x_3 = 1$.

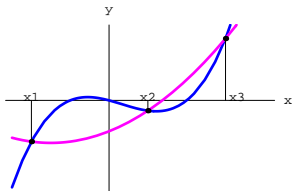
2.2. Vienādojums $f(x) = g(x)$

Lai grafiski noteiktu vienādojuma

$$f(x) = g(x), \quad (2)$$

reālas saknes, ir jārikojās šādi:

1. jākonstruē funkciju $y = f(x)$ un $y = g(x)$ grafiki vienā koordinātu sistēmā;
2. jāatrod grafiku krustpunktus.
3. Tad šo punktu abscisas ir vienādojuma (2) saknes.

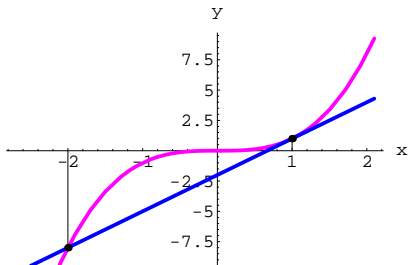


13. zīm. $y = f(x)$; $y = g(x)$.

Vienādojumam $f(x) = g(x)$ ir saknes x_1 , x_2 , un x_3 .

Piemērs. Atrisināt grafiski vienādojumu $x^3 - 3x + 2 = 0$.

$$x^3 = 3x - 2$$



14. zīm. $y = x^3$; $y = 3x - 2$.

Dotajam vienādojumam ir saknes $x_1 = -2$ un $x_2 = x_3 = 1$.

2.3. Vienādojumu sistēmas ar diviem mainīgajiem

Lai grafiski atrisinātu sistēmu

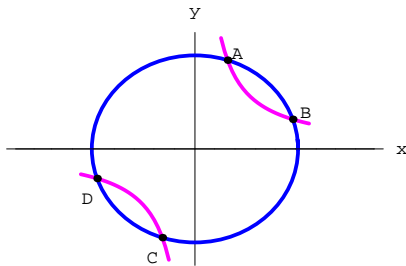
$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0 \end{cases}, \quad (3)$$

ir jārikojās šādi:

1. jākonstruē vienādojumu $f(x, y) = 0$ un $g(x, y) = 0$ grafiki vienā koordinātu sistēmā;
2. jāatrod grafiku krustpunkti.
3. Šie krustpunkti ir vienādojumu sistēmas (3) atrisinājumi.

Piemērs. Grafiski atrisināt vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = 3. \end{cases}$$



15. zīm. $x^2 + y^2 = 10$; $xy = 3$.
Dotajai sistēmai ir 4 atrisinājumi.

Ja $A(x_0; y_0)$, tad $B(y_0; x_0)$, $C(-x_0; -y_0)$ un $D(-y_0; -x_0)$.

Atbilde: $(1; 3)$, $(3; 1)$, $(-1; -3)$, $(-3; -1)$.

3. Nevienādību grafiskā risināšana

3.1. Nevienādība $f(x) > 0$

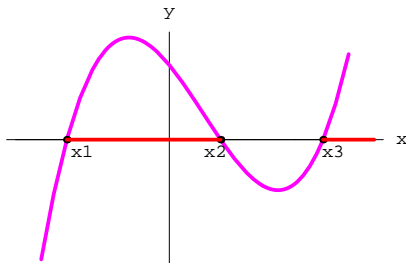
Lai grafiski atrisinātu nevienādību ar vienu mainīgo

$$f(x) > 0, \quad (4)$$

ir jārikojās šādi:

1. jākonstruē funkcijas $y = f(x)$ grafiks ;
2. jāatrod šīs līknes krustpunkti ar Ox asi ;
3. jāatrod grafika daļas, kas atrodas virs Ox ass, un jāprojecē šīs daļas uz Ox asi.
4. Iegūtie intervāli uz Ox ass ir nevienādības (4) atrisinājumi.

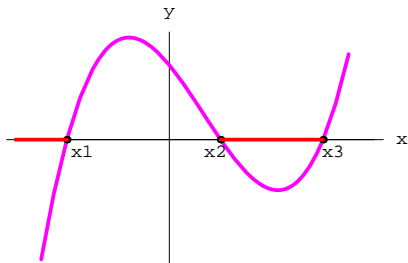
$$f(x) > 0$$



16. zīm. $y = f(x)$.

Dotās nevienādības atrisinājumi: $x \in (x_1, x_2) \cup (x_3, +\infty)$.

$$f(x) \leq 0$$



17. zīm. $y = f(x)$.

Dotās nevienādības atrisinājumi: $x \in (-\infty, x_1] \cup [x_2, x_3]$.

3.2. Nevienādība $f(x) > g(x)$

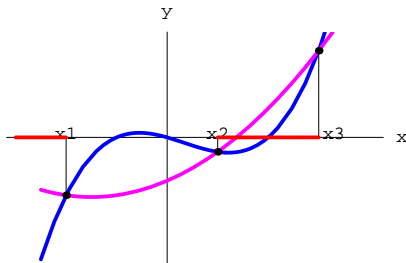
Lai grafiski atrisinātu nevienādību ar vienu mainīgo

$$\boxed{f(x) > g(x)}, \quad (5)$$

ir jārikojās šādi:

1. jākonstruē funkciju $y = f(x)$ un $y = g(x)$ grafiki vienā koordinātu sistēmā ;
2. jāatrod grafiku krustpunkti ;
3. jāatrod funkcijas $y = f(x)$ grafika daļas, kas atrodas virs funkcijas $y = g(x)$ grafika,
un jāprojecē šīs daļas uz Ox asi.
4. Iegūtie intervāli uz Ox ass ir nevienādības (5) atrisinājumi.

$$f(x) > g(x)$$



18. zīm. $y = f(x)$; $y = g(x)$.

Dotās nevienādības atrisinājumi: $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, x_3)$.

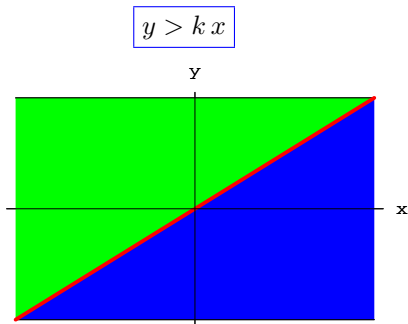
3.3. Nevienādība $f(x, y) > 0$

Lai grafiski atrisinātu nevienādību ar diviem mainīgajiem

$$f(x, y) > 0, \quad (6)$$

rīkosīmies šādi:

1. konstruēsim vienādojuma $f(x, y) = 0$ grafiku, tas sadala koordinātu plakni apgabalos;
2. paņemsim jebkuru punktu no jebkura apgabala un izvēlētā punkta koordinātas ievietosim nevienādībā (6);
3. ja punkts apmierina doto nevienādību (6), tad nevienādību apmierinās arī viss apgabals, no kura tika ņemts šis punkts.
4. Šādā veidā pārbaudīsim arī pārējos apgabalus.

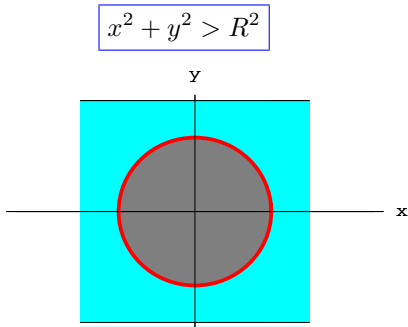


19. zīm.

Taisne $y = kx$

$y > kx \Leftrightarrow$ zaļš apgabals

$y \leq kx \Leftrightarrow$ zils apgabals ar robežu



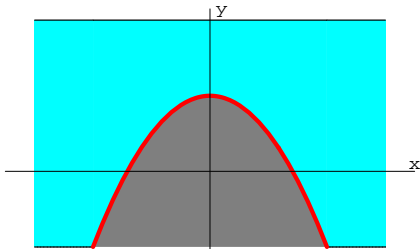
20. zīm.

Riņķa līnija $x^2 + y^2 = R^2$

$x^2 + y^2 > R^2$ \Leftrightarrow gaišzils apgabals

$x^2 + y^2 < R^2$ \Leftrightarrow pelēks apgabals

$$y + x^2 - 1 > 0$$



21. zīm.

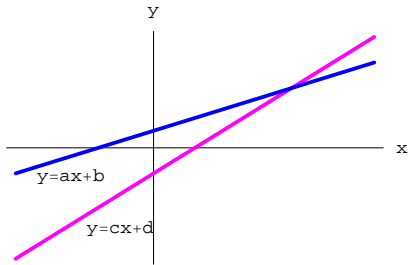
Parabola $y = -x^2 + 1$

$y + x^2 - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ gaišzils apgabals

$y + x^2 - 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ pelēks apgabals

4. Uzdevumi

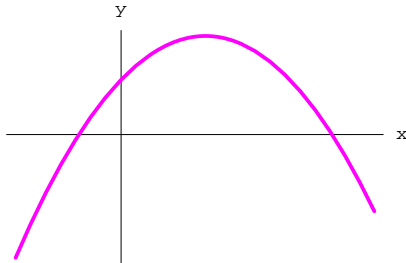
1.uzdevums. Koordinātu plaknē konstruēti funkciju $y = ax + b$ un $y = cx + d$ grafiki.



22. zīm.

Noteikt izteiksmes $(c - a)(b - d)$ zīmi.

2.uzdevums. Dots funkcijas $y = ax^2 + bx + c$ grafiks.



23. zīm.

Noteikt izteiksmes $\frac{cb}{a}$ zīmi.

3.uzdevums. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x - 6y = 13, \\ xy - 3x + 2y = 11. \end{cases}$$

$$(x^2 + 4x) + (y^2 - 6y) = 13,$$

$$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) = 13 + 13,$$

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 26.$$

$$(xy - 3x) + 2y = 11,$$

$$x(y - 3) + 2(y - 3) = 11 - 6,$$

$$(x + 2)(y - 3) = 5.$$

$$u = x + 2, \quad v = y - 3 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u^2 + v^2 = 26, \\ uv = 5. \end{cases} \quad (15.)$$

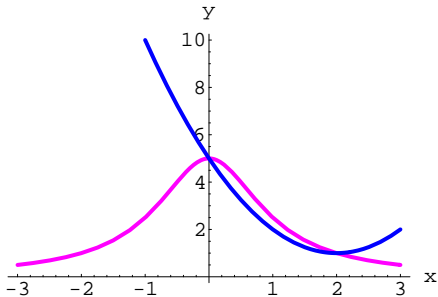
$$(u; v) : \quad (1; 5), (5; 1), (-1; -5), (-5; -1).$$

$$\textit{Atbilde.} \quad (x; y) : \quad (-1; 8), (3; 4), (-3; -2), (-7; 2).$$

4.uzdevums. Atrisināt vienādojumu $\frac{5}{1+x^2} = x^2 - 4x + 5$.

$$f(x) = x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1,$$

$$g(x) = \frac{5}{1+x^2}.$$



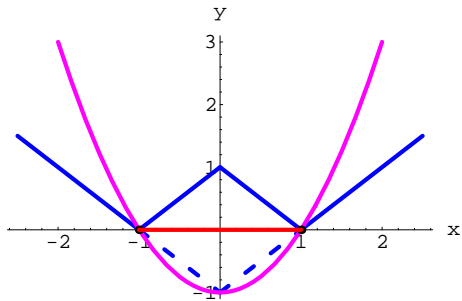
24. zīm.

Atbilde. $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

5.uzdevums. Atrisināt nevienādību $||x| - 1| > x^2 - 1$.

$$f(x) = ||x| - 1|$$

- $y = |x|$;
- $y = |x| - 1$;
- $y = ||x| - 1|$.



25. zīm.

Atbilde. $x \in (-1, 1)$.